

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Формула полной вероятности является следствием теорем о сложении и умножении вероятностей.

Пусть требуется определить вероятность события A , которое может произойти только вместе с одним из событий H_1, H_2, \dots, H_n образующих полную группу несовместных событий.

Эти события называются гипотезами.

ПРИМЕР.

Студент, выйдя из дома за 30 минут до начала занятий, может приехать в институт автобусом, троллейбусом или трамваем. Все эти варианты равновозможны. Вероятность приехать на занятия вовремя для этих видов транспорта соответственно равна 0.99, 0.98 и 0.9. Какова вероятность, что студент приедет на учебу вовремя?

Пусть событие A заключается в том, что студент не опоздает на занятия. Оно может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1 - студент поехал автобусом;

H_2 - студент поехал троллейбусом;

H_3 - студент поехал трамваем.

Так как гипотезы образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с одной из этих гипотез. Поэтому,

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A$$

Так как гипотезы образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с одной из этих гипотез. Поэтому,

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A$$

Так как гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n несовместны, то и комбинации $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ тоже несовместны. Тогда по теореме о сложении вероятностей

$$P(A) = P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A)$$

Так как гипотезы образуют полную группу, то событие A может появиться только в комбинации с одной из этих гипотез. Поэтому,

$$A = H_1 \cdot A + H_2 \cdot A + \dots + H_n \cdot A$$

Так как гипотезы H_1, H_2, \dots, H_n несовместны, то и комбинации $H_1 A, H_2 A, \dots, H_n A$ тоже несовместны. Тогда по теореме о сложении вероятностей

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1 \cdot A) + P(H_2 \cdot A) + \dots + P(H_n \cdot A) = \\ &= P(A/H_1) \cdot P(H_1) + P(A/H_2) \cdot P(H_2) + \dots + P(A/H_n) \cdot P(H_n) \end{aligned}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | H_i) \cdot P(H_i)$$

ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

ПРИМЕР.

Студент, выйдя из дома за 30 минут до начала занятий, может приехать в институт автобусом, троллейбусом или трамваем. Все эти варианты равновозможны. Вероятность приехать на занятия вовремя для этих видов транспорта соответственно равна 0.99, 0.98 и 0.9. Какова вероятность, что студент приедет на учебу вовремя?

Решение:

Пусть событие A заключается в том, что студент не опоздает на занятия. Оно может произойти только вместе с одной из гипотез:

H_1 - студент поехал автобусом;

H_2 - студент поехал троллейбусом;

H_3 - студент поехал трамваем.

Чтобы использовать формулу полной вероятности, необходимо знать вероятности каждой из гипотез и условные вероятности события A для каждой из гипотез.

Так как гипотезы образуют полную группу событий, то суммарная вероятность всех гипотез равна 1.

По условию задачи все гипотезы равновероятны, следовательно

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$

Условные вероятности события A для каждой из гипотез даны по условию задачи:

$$P(A|H_1)=0.99; P(A|H_2)=0.98; P(A|H_3)=0.9$$

Следовательно, по формуле полной вероятности,

$$P(A) = 0.99 \cdot \frac{1}{3} + 0.98 \cdot \frac{1}{3} + 0.9 \cdot \frac{1}{3} \approx 0.96$$



ПРИМЕР.

В магазин изделия поставляются тремя фирмами. Известно, что первая фирма поставляет товар с браком в 0,1%, вторая - 0,15%, третья - 0,25%.

С первой фирмы поступило 500, со второй - 200, а с третьей - 300 изделий. Найти вероятность, что приобретённое изделие окажется

- а) стандартным;
- б) нестандартным;

ПРИМЕР.

При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой можно перелить только кровь его группы.

Среди населения 33,7%, имеют первую, 37,5% - вторую,

20,9% - третью и 7,9% - четвертую группу крови.

Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора.

ПРИМЕР.

33.7% I
37,5% - II
20,9% - III
7,9% - IV

ПРИМЕР.

Больной	Донор
I	I
II	I, II
III	I, III
IV	I, II, III, IV

А - случайно взятому больному можно перелить кровь случайного взятого донора

ПРИМЕР.

A - случайно взятому больному можно перелить
кровь случайного взятого донора
 $P(A)=0,57$