# Тема: Цифровые фильтры.

**Кафедра Радиоэлектроники.**

**Преподаватель:**
**Лазаренко**
**Сергей Валерьевич.**

**Учебные вопросы:**

**1.** Трансверсальный цифровой фильтр.

**2.** Рекурсивный цифровой фильтр.

# 1. Трансверсальный цифровой фильтр.

Физически осуществимые цифровые фильтры, которые работают в реальном масштабе времени, для формирования выходного сигнала в $i$-тый дискретный момент времени могут использовать следующие данные:
1) значение $x_i$ входного сигнала в момент $i$-того отсчета, а также некоторое число "прошлых" входных отсчетов $x_{i-1}, x_{i-2}, ..., x_{i-m}$;
2) некоторое число предшествующих отсчетов выходного сигнала $y_{i-1}, y_{i-2}, ..., y_{i-n}$.

Так принято называть фильтры, не использующие для формирования выходного сигнала в $i$-тый момент времени его предыдущие отсчеты, т.е. фильтры, работающие в соответствии с алгоритмом:

$$y_i = a_0 x_i + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-2} + \ldots + a_m x_{i-m} \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ - последовательность коэффициентов.

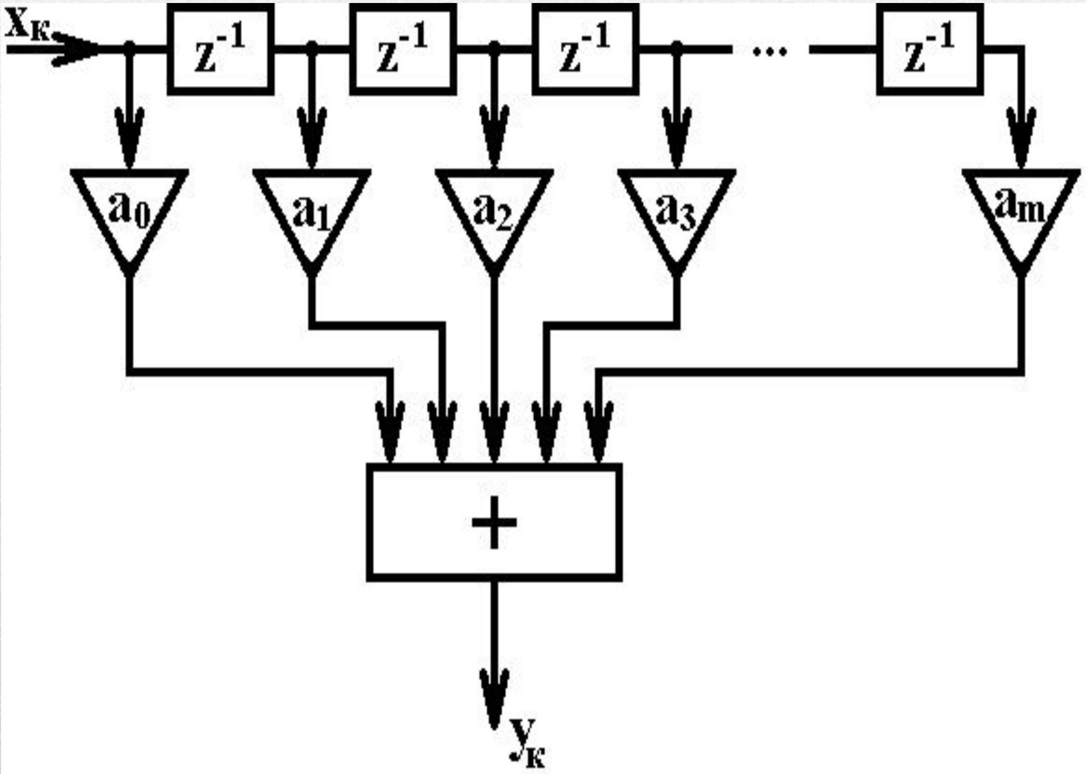
Применив $Z$-преобразование к обеим частям выражения (1), получим

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}) X(z)$$

Отсюда следует, что системная функция трансверсального равна

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m} =$$

$$= \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m}{z^m} \qquad (2)$$




Системная функция трансверсального цифрового фильтра есть дробно-рациональная функция аргумента *z*, имеющей *m*-кратный полюс при *z=0* и *m* нулей, координаты которых определяются коэффициентами фильтра.

Комплексный коэффициент передачи цифрового фильтра получается из системной функции заменой аргумента $z$ на $e^{j\omega\Delta}$. Следовательно, получим:

$$\dot{K}(\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta} + a_2 e^{-2j\omega\Delta} + \ldots + a_m z^{-mj\omega\Delta}$$

На основе задания комплексного коэффициента передачи может быть реализован один из алгоритмов цифровой фильтрации непрерывного сигнала:

1) производится дискретизация непрерывного входного сигнала;

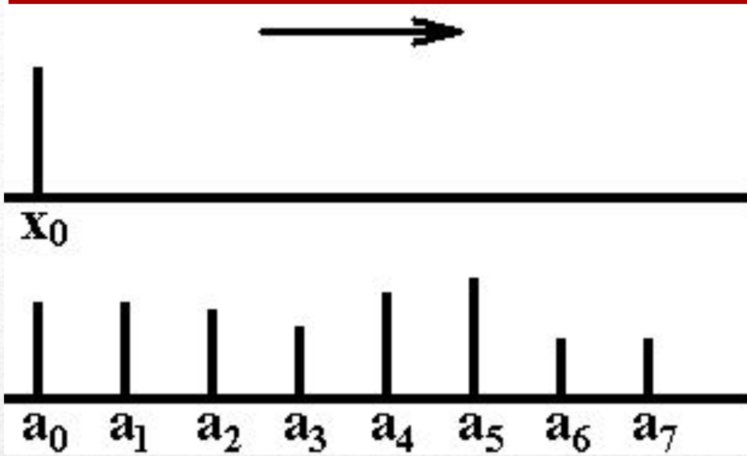
2) определяется дискретное преобразование Фурье (в том числе с использованием алгоритма быстрого преобразования);

3) перемножением комплексных коэффициентов дискретного ряда Фурье входного сигнала и значений комплексного коэффициента передачи цифрового фильтра определяется дискретное преобразование выходного сигнала;

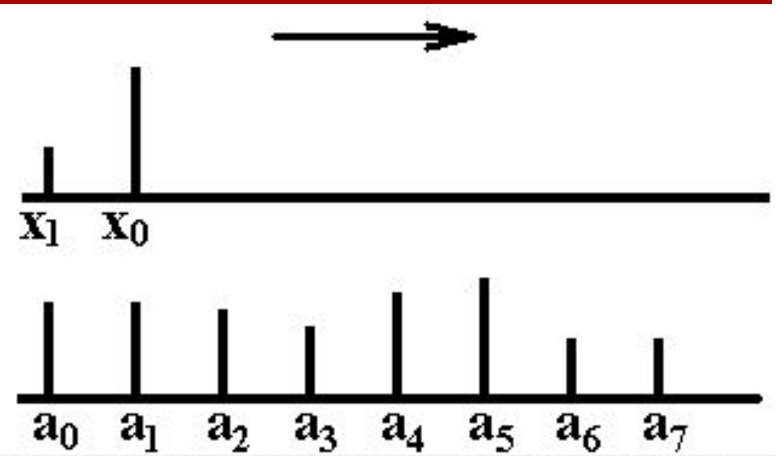
4) путем использования обратного дискретного преобразования Фурье определяется выходная последовательность, которая затем может быть преобразована в непрерывный сигнал.

Прямая подстановка системной функции трансверсального цифрового фильтра (2) в выражение (3) с учетом соотношений (4)...(6) дает следующий результат:

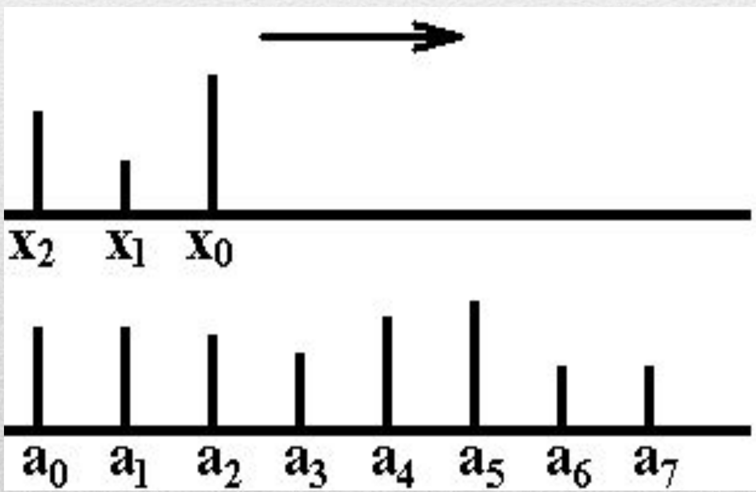
$$\{h_k\} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$$



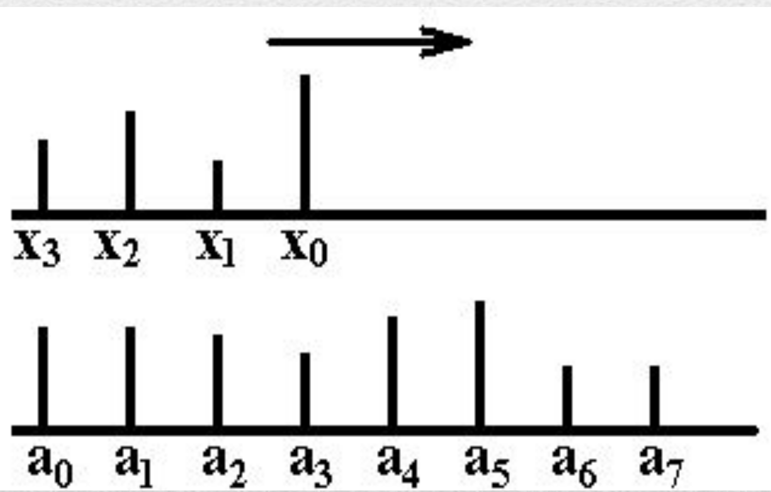

Нулевой такт




Первый такт




Второй такт




Третий такт

Из рассмотрения рисунков видно, что

$$y_0 = x_0 \cdot a_0$$
$$y_1 = x_0 \cdot a_1 + x_1 \cdot a_0$$
$$y_2 = x_0 \cdot a_2 + x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_0$$
$$y_2 = x_0 \cdot a_3 + x_1 \cdot a_2 + x_2 \cdot a_1 + x_3 \cdot a_0 \quad \text{и т.д.}$$

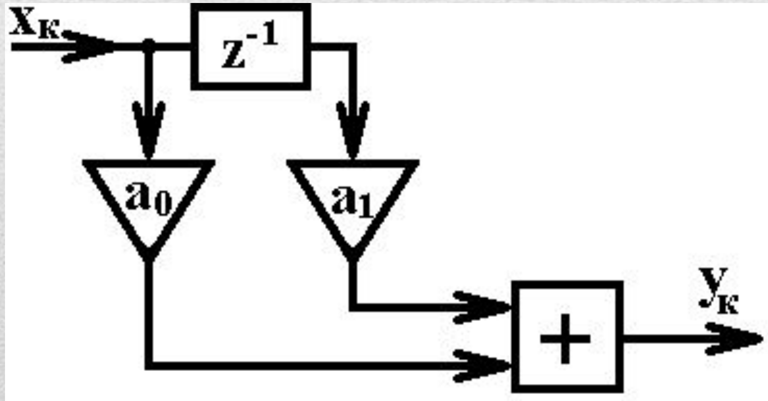
В общем случае

$$y_m = x_0 a_m + x_1 a_{m-1} + x_2 a_{m-2} + \ldots + x_m a_0 = \sum_{k=0}^{m} x_k a_{m-k} \qquad (4)$$

**Трансверсальный фильтр первого порядка**

Входная последовательность фильтра определяется выражением

$$y_m = a_0 x_m + a_1 x_{m-1}$$




Следовательно, импульсная характеристика равна

$$\{h_k\} = (a_0,\, a_1)$$

Системная функция такого фильтра $H(z) = a_0 + a_1 z^{-1}$

Комплексный коэффициент передачи

$$\dot{K}(\omega) = a_0 + a_1 e^{-j\omega\Delta}$$

Очень просто найти выражение для АЧХ фильтра.

$$K(\omega) = \left|\dot{K}(\omega)\right| = \left|a_0 + a_1\cos\omega\Delta - ja_1\sin\omega\Delta\right| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + 2a_0a_1\cos\omega\Delta}$$

При $a_0=a_1=1$ получаем

$$K(\omega) = \sqrt{2+2\cos\omega\Delta} = \left|2\cos\frac{\omega\Delta}{2}\right|$$

На частоте $\omega=\Pi/\Delta$ АЧХ обращается в нуль, и данный фильтр может выступать в качестве режекторного.

При $a_0=1, a_1=-1$ имеем

$$K(\omega) = \sqrt{2-2\cos\omega\Delta} = \left|2\sin\frac{\omega\Delta}{2}\right|$$

и фильтр становится полосовым, средняя частота которого равна $\omega=\Pi/\Delta$ .

# 2. Рекурсивный цифровой фильтр.

Рекурсивный цифровой фильтр характерен тем, что для формирования *k*-того выходного отсчета используются предыдущие значения не только входного, но и выходного сигнала:

$$y_k = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \ldots + a_m x_{k-m} + b_1 y_{k-1} + b_2 y_{k-2} + \ldots + b_n y_{k-n} \qquad (5)$$

Преобразуем уравнение (5), сгруппировав отсчеты выходного сигнала слева, входного - справа:

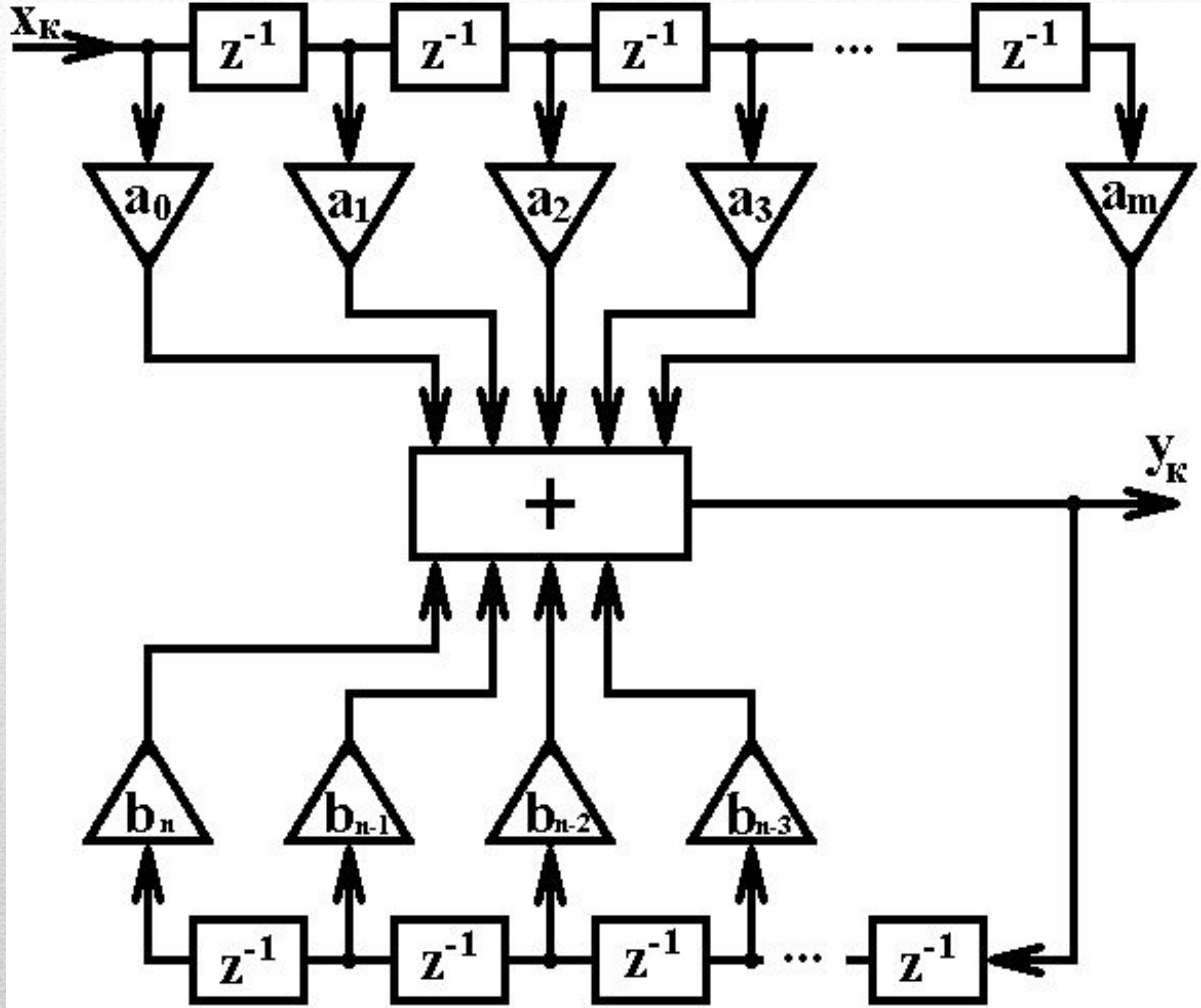
$$y_k - b_1 y_{k-1} - b_2 y_{k-2} - \ldots - b_n y_{k-n} = a_0 x_k + a_1 x_{k-1} + \ldots + a_m x_{k-m} \qquad (6)$$

Найдем *z*-преобразование от обеих частей уравнения

$$Y(z)(1 - b_1 z^{-1} - \ldots - b_n z^{-n}) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}) \qquad (7)$$

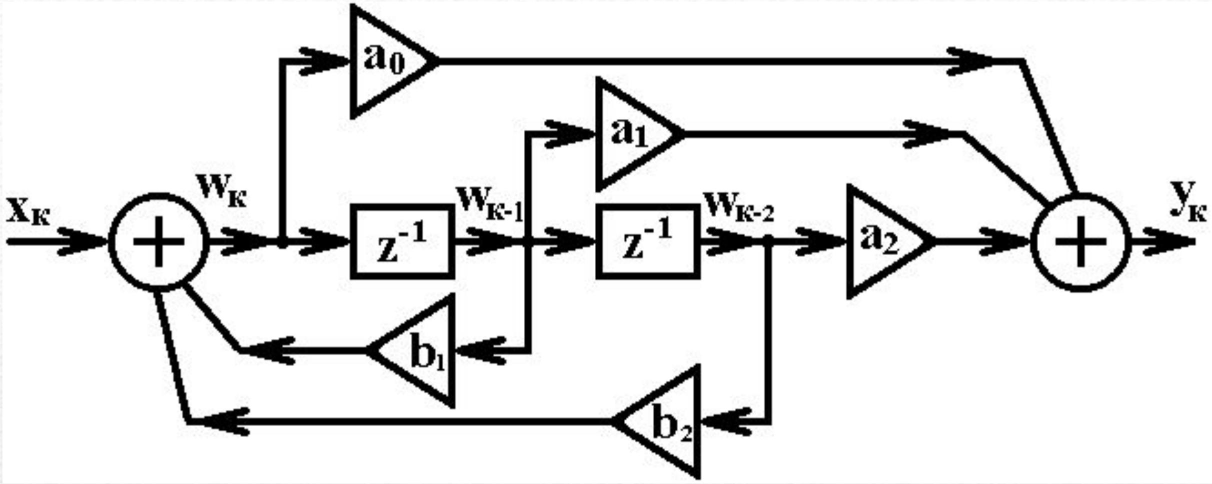
и получим выражение для системной функции рекурсивного цифрового фильтра

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_m z^{-m}}{1 - b_1 z^{-1} - \ldots - b_n z^{-n}} = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_m z^{n-m}}{z^n - b_1 z^{n-1} - \ldots - b_n} \qquad (8)$$



xк
z-1
z-1
z-1
...
z-1
a0
a1
a2
a3
am
+
yк
bn
bn-1
bn-2
bn-3
z-1
z-1
z-1
...
z-1

В качестве примера на рисунке изображена структурная схема канонического рекурсивного фильтра 2-го порядка, которой отвечает системная функция




$$H(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}} \qquad (9)$$

Для того, чтобы убедиться, что эта система реализует заданную функцию, рассмотрим вспомогательный дискретный сигнал $\{w_k\}$ на выходе первого сумматора и запишем два очевидных соотношения:

$$w_k=x_k+b_1w_{k-1}+b_2w_{k-2}$$
$$y_k=a_0w_k+a_1w_{k-1}+a_2w_{k-2} \qquad (10)$$

Выполнив *z*-преобразование выражений (10), получим

$$W(z)=\frac{X(z)}{1-b_1z^{-1}-b_2z^{-2}} \qquad Y(z)=\left(a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\right)W(z) \qquad (11)$$

Характерная черта, отличающая рекурсивный цифровой фильтр, состоит в том, что из-за наличия обратной связи его импульсная характеристика имеет вид неограниченно-протяженной последовательности. Покажем это на примере простейшего фильтра первого порядка, системная функция которого описывается выражением

$$H(z) = \frac{a}{1 - b z^{-1}} = \frac{a z}{z - b}$$

Импульсная характеристика, как известно, есть обратное *z* - преобразование от системной функции, поэтому можно записать

$$g_m = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{a z}{z - b} z^{m-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{a z^m}{z - b} dz$$

Вначале найдем $g_0$:

$$g_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{a}{z - b} dz$$

Произведя замену $z\text{-}b=y$, получим

$$g_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{a}{y} dy = a$$

Аналогично найдем $g_1$

$$g_1 = \frac{1}{2\pi\, j}\oint \frac{a\,z}{z-b}\,dz = \frac{1}{2\pi\, j}\oint \frac{a\,(y+b)}{y}\,dz = ab$$

Не трудно убедиться в том, что $g_2=ab^2$, $g_3=ab^2$ и т.д. Искомая импульсная характеристика представляет собой геометрическую прогрессию. Очевидно, что для того, чтобы прогрессия была убывающей (чтобы фильтр был устойчивым), необходимо выполнения условия $b<1$.

Комплексный коэффициент передачи рекурсивного цифрового фильтра первого порядка получим на основе системной функции путем замены $z$ на $e^{j\omega\Delta}$:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{a}{1-b e^{-j\omega\Delta}}$$

Отсюда не трудно найти АЧХ

$$K(\omega) = \frac{a}{\left|1-b\cos\omega\Delta + j\sin\omega\Delta\right|} = \frac{a}{\sqrt{1+b^2-2b\cos\omega\Delta}}$$