




Лекція 2

Математичний опис мереж зв'язку



Питання лекції 2

- 
1. Морфологічний опис мережі за допомогою графа
 2. Морфологічний опис у матричній формі
 3. Поточкова модель мережі
 4. Імовірнісна модель мережі



Морфологічний опис мережі

Формалізація опису мережі необхідна для рішення завдань аналізу та синтезу (проектування)

Опис телекомунікаційної мережі може бути:

- Морфологічний
- Функціональний

Морфологічний опис - це опис складу, конфігурації мережі й взаємозв'язків її елементів

Морфоло́гія (від греч. морфh «форма» + греч. лоґіа «наука») у широкому розумінні - наука про форми й будову.

Функціональний опис - це опис процесів функціонування мережі й закономірностей зміни її параметрів

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Основні поняття теорії графів

Граф - математичний інструмент морфологічного опису мережі.

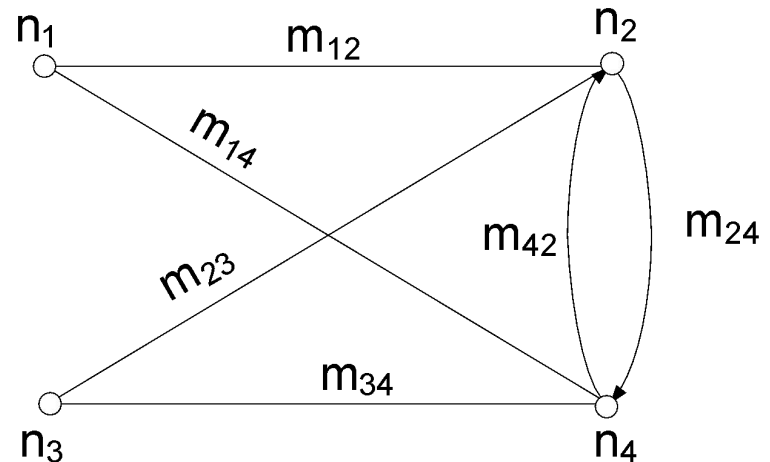
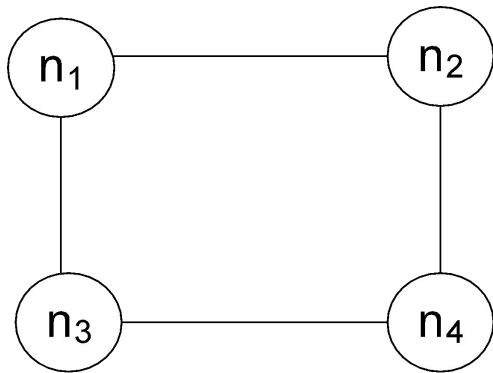
Граф $G(N, M)$ описує структуру мережі, у якій, кількість вершин N відповідає кількості комутаційних центрів (КЦ), а ребра M - гілкам/лініям/каналам зв'язку, що з'єднує КЦ

Граф називається позначеним, якщо його вершини й ребра мають ідентифікаційні написи

Граф називають орієнтованим, якщо в ньому є орієнтовані ребра

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Вершини n_i й n_j **суміжні**, якщо існує ребро m_{ij}
Ребро m_{ij} є інцидентним (прилягаючим) для вершин n_i й n_j



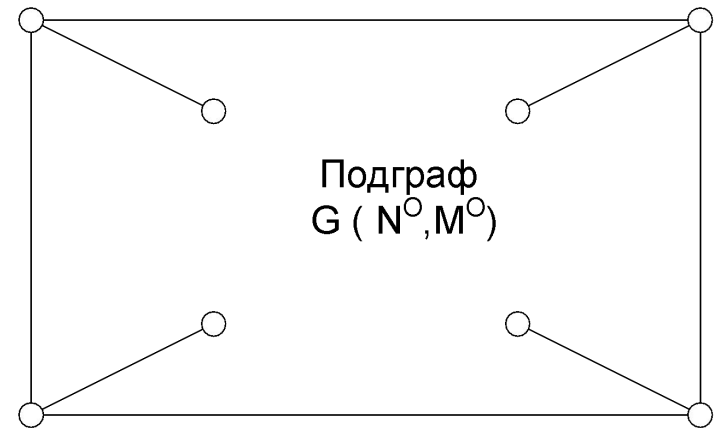
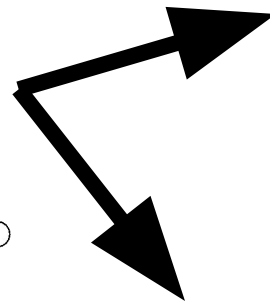
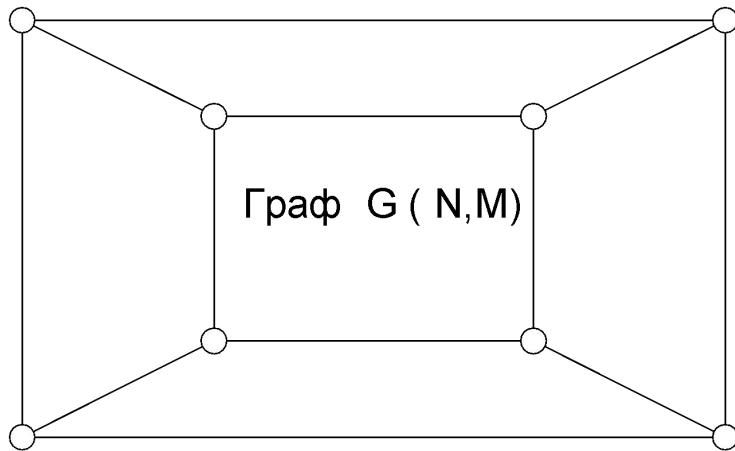
Приклад графа, що відображає структуру 4-вузлової мережі

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Властивість декомпозиції графа

Будь-який граф $G(N, M)$ можна розбити на два підграфу $G(N^0, M^0)$ і $G(N^T, M^T)$:

$$G(N, M) = G(N^0, M^0) \cup G(N^T, M^T)$$



Підграф $G(N^0, M^0)$ відповідає мережі кінцевих КЦ



Підграф $G(N^T, M^T)$ відповідає мережі транзитних КЦ

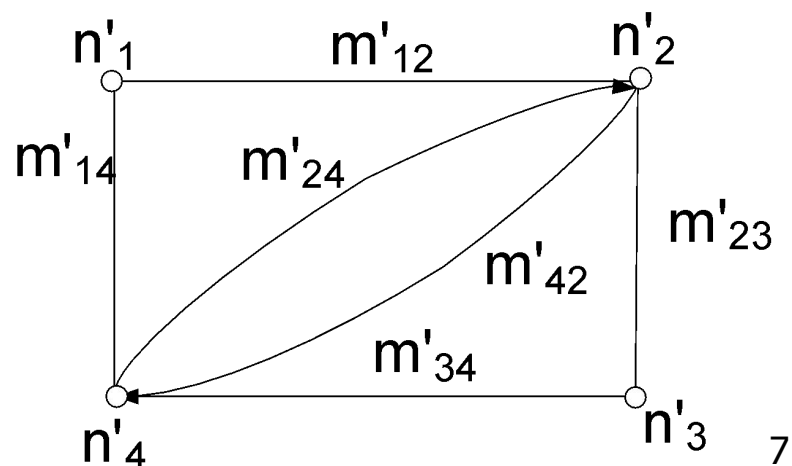
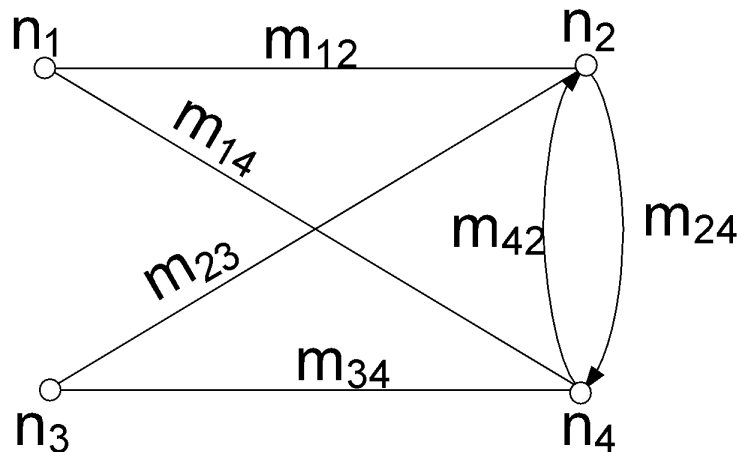
Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Ізоморфізм (от греч. *ísos* — рівний, однаковий, подібний і морфоформа).

Загальне поняття ізоморфізму означає наявність подібності в різних об'єктах.

Два графа $G (N, M)$ и $G' (N', M')$ називаються **ізоморфними**, якщо між множинами їхніх вершин і ребер можна існує однозначна відповідність вершин $\{n_i\}$ **BI** $\{n'_i\}$ і ребер $\{m_{ij}\}$ **BI** $\{m'_{ij}\}$

Приклад ізоморфних графів



Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Маршрут (шлях)

Маршрутом μ у графі називається послідовність, у якій чередуються вершини і ребра

- Послідовність починається й закінчується вершиною
- Кожне ребро послідовності інцидентне двом вершинам

$$\mu = n_1 \cup n_2 \cup n_3 \cup \dots \cup n_{k-1} \cup n_k, \text{ де } n_k \in N$$

Маршрути або шляхи в графі звичайно визначаються для виділених напрямків зв'язку (між будь-якою парою вершин)

Маршрути (шляхи) бувають:

- Незалежні - це маршрути, які не мають спільних ребер (гілок)

$$n_i(\mu_1) \cap N(\mu_2) \text{ и } n_i(\mu_2) \cap N(\mu_1) \\ N(\mu_1) / N(\mu_2) = \emptyset$$

- Залежні - маршрути із спільними ребрами (гілками)

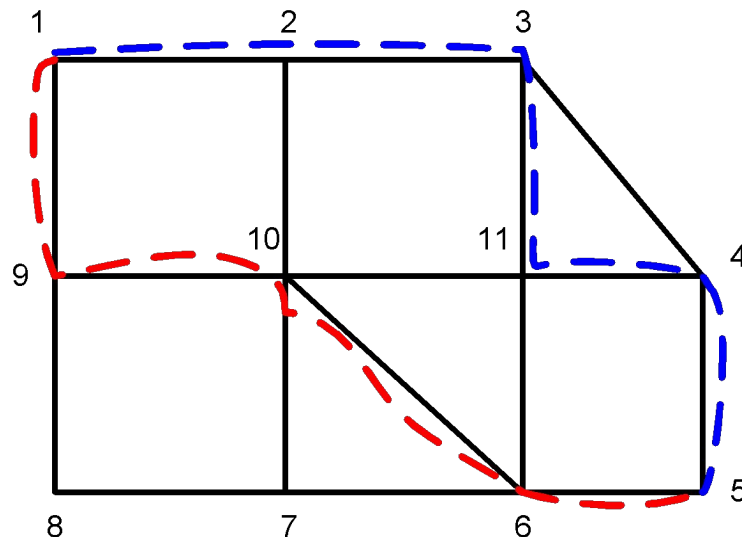
$$N(\mu_1) / N(\mu_2) = N(\mu_2) * N(\mu_1) = \emptyset$$

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Приклад незалежних маршрутів у мережі в напрямку 1-5

$$N(\mu_1) = \{1, 2, 3, 11, 4, 5\}$$

$$N(\mu_2) = \{1, 9, 10, 6, 5\}$$



Довжина шляху в графі - кількість вхідних у нього ребер

$$D(\mu_1) = 5 ; D(\mu_2) = 4$$

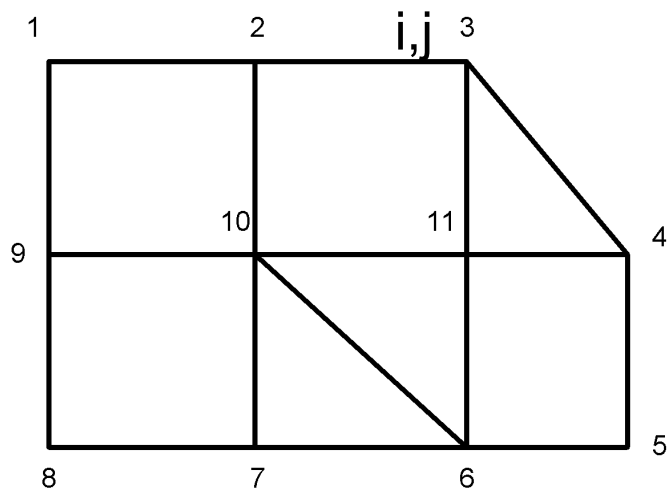
Найкоротший шлях між двома вершинами - це мінімальна відстань між цими вершинами, що виражена в кількості ребер

$$\min \mu (1 - 5) = 4$$

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Діаметром графа D називається мінімальна відстань між найбільш віддаленими вершинами

$$D = \min \max (i, j)$$



Діаметр графа: $D = 4$

Кожна вершина графа n_i має степінь $\text{Deg } n_i$.
 $\text{Deg } n_i$ – це число рівне числу інцидентних ребер

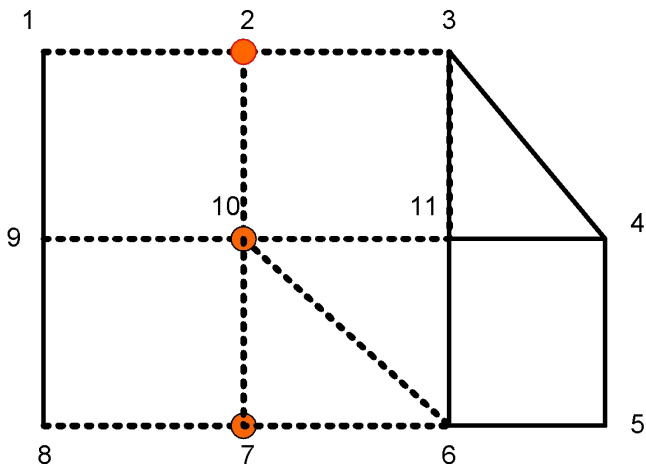
Напрмклад. $\text{Deg } 7 = 3$; $\text{Deg } 6 = 4$; $\text{Deg } 1 = 2$

Морфологічний опис мережі за допомогою графа

Переріз графа $G (N, M)$ по вершинах n_i являє собою множину вершин $\{n_i\}$, видалення яких приводить до утворення незв'язаних підграфів.

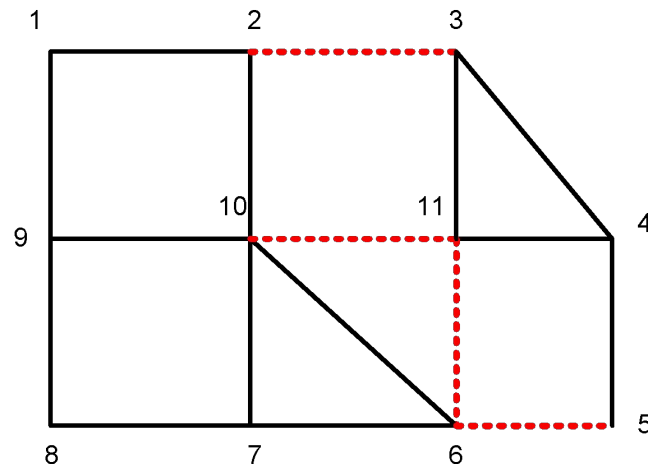
Переріз графа $G (N, M)$ по ребрах m_{ij} (або реберний переріз) являє собою множину ребер $\{m_{ij}\}$, видалення яких приводить до утворення незв'язаних підграфів.

Переріз графа G по вершинах:
 $\{2, 10, 7\}$



Підграфи: $G^1(1, 9, 8)$ и $G^2(3, 4, 5, 6, 11,)$

Переріз графа G по ребрам:
 $\{m_{23}, m_{10,11}, m_{11,6}, m_{65}\}$



Підграфи: $G^1(1, 2, 9, 10, 7, 8, 6)$ и $G^2(3, 4, 5, 11,)$

Морфологічний опис у матричній формі

Для аналітичних досліджень застосовується матрична форма опису структури мережі.

Основні типи матриць

- Суміжності $||A||$
- Потужностей $||V||$ ($N*N$)
- Інциденцій $||B||$

Матриці $||A||$ і $||V||$ мають розмірність ($N*N$), де N – число вузлів (вершин)

$A =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1N}
	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2N}

	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{iN}

	a_{N1}	a_{N2}		a_{Nj}		a_{NN}

$V =$	v_{11}	v_{12}	...	v_{1j}	...	v_{1N}
	v_{21}	v_{22}	...	v_{2j}	...	v_{2N}

	v_{i1}	v_{i2}	...	v_{ij}	...	v_{iN}

	v_{N1}	v_{N2}		v_{Nj}		v_{NN}

$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо КЦ } i \text{ та КЦ } j \text{ з'єднані ребром} \\ 0, & \text{якщо КЦ } i \text{ і КЦ } j \text{ не з'єднані ребром} \end{cases}$

v_{ij} – параметр лінії зв'язку на гілці m_{ij} (кількість каналів)

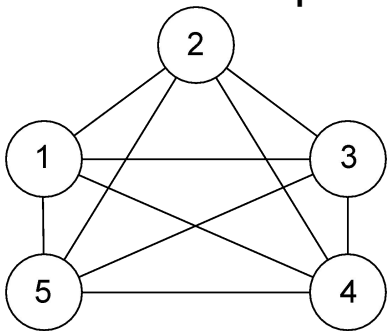
Морфологічний опис у матричній формі

Якщо $ij = ji$, то матриці $||A||$ та $||V||$ можна представити в трикутній формі (включені тільки наддіагональні елементи)

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & a_{21} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1N} \\ & & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2N} \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & a_{ij} & \dots & a_{iN} \\ & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & a_{NN} \end{array}$$

$$V = \begin{array}{c|cccccc} & v_{21} & v_{12} & \dots & v_{1j} & \dots & v_{1N} \\ & & v_{22} & \dots & v_{2j} & \dots & v_{2N} \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & v_{ij} & \dots & v_{iN} \\ & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & v_{NN} \end{array}$$

Приклад опису 5 вузлової мережі



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	1	0	1	1	1
3	1	1	0	1	1
4	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	0

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2		0	1	1	1
3			0	1	1
4				0	1
5					0

Морфологічний опис у матричній формі

Матриця інцидентності $||B||$ - це матриця розмірністю $N \times M$, у якій

$$||B|| = \{b_{ij}\},$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } m_{ij} \text{ інцидентне вершині } n_i \\ 0, & \text{якщо ребро } m_{ij} \text{ не інцидентне вершині } n_i \end{cases}$$

Між матрицями суміжності та інцидентності існує взаємна відповідність

$$A = B^T B - 2 * I,$$

де B^T - транспонована матриця інцидентності,

I - одинична матриця, розмірності $M \times M$



Потокова модель мережі

Для функціонального опису мережі використовуються

- Потокова модель мережі
- Імовірнісна модель мережі

Функціональний опис мережі характеризує основні процеси її функціонування:

- Передача повідомлень
- Розподіл інформації
- Вихід з ладу й відновлення елементів мережі
- Якість обслуговування на галузях і напрямках зв'язку мережі

Потокова модель мережі

Потокова модель характеризує здатність мережі по передачі повідомлень від джерел інформації до споживачів в умовах нормального її функціонування

Процес передачі повідомлень по мережі можна описати матрицею

$$C = \begin{matrix} C_{11}(t_{11},p_{11}) & C_{12}(t_{12},p_{12}) & \dots & C_{1j}(t_{1j},p_{1j}) & \dots & C_{1n}(t_{1n},p_{1n}) \\ & C_{22}(t_{22},p_{22}) & \dots & C_{2j}(t_{2j},p_{2j}) & \dots & C_{2n}(t_{2n},p_{2n}) \\ & & & \dots & & \dots \\ & & & C_{ij}(t_{ij},p_{ij}) & \dots & C_{in}(t_{in},p_{in}) \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & C_{nn}(t_{nn},p_{nn}) \end{matrix}$$

де $C_{ij}(t_{ij},p_{ij})$ – кількість повідомлень, обслужених на гілці m_{ij} за час t_{ij} при дотриманні імовірісно-часового параметра p_{ij}

$C_{ij}(t_{ij},p_{ij}) = 0$ при $a_{ij} = 0$ (за умови відсутності гілки m_{ij})



Потокова модель мережі

Середня кількість одночасно функціонуючих повідомлень у мережі можна розрахувати у вигляді

$$C_{\phi} = \sum \sum C_{ij}(t_{ij}, p_{ij})$$

Середня кількість повідомлень одночасно переданих у напрямку зв'язку можна також розрахувати як суму переданих повідомлень по всіх галузях, що входить в усі шляхи даного напрямку

$$C_{\Pi} = \sum \sum C_{\Pi}(t_{ij}, p_{ij})$$

Вероятностная модель сети

У будь-який довільний момент часу t канал галузі mij може бути

- Вільний/ Зайнятий

Для сталого режиму роботи мережі знаходження кожної гілки mij у зайнятому стані можна описати матрицею

Матрица вероятностей отказа в обслуживании

$$P = \begin{pmatrix} p_{m11}(t) & p_{m12}(t) & \dots & p_{m1j}(t) & \dots & p_{m1n}(t) \\ & p_{m22}(t) & \dots & p_{m2j1}(t) & \dots & p_{m2n}(t) \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & p_{mij}(t) & \dots & p_{min}(t) \\ & & & & \dots & \dots \\ & & & & & p_{mnn}(t) \end{pmatrix}$$

де $p_{mij}(t)$ – імовірність відмови в обслуговуванні на гілці mij у довільний момент часу t

Вероятностная модель сети

Оцінити ймовірність обслуговування повідомлення в напрямку зв'язку можна за допомогою формули.

якщо $\mu=1$ (одному шляхи встановлення з'єднання)

$$q = \prod_{ij} (1 - p_{ij})$$

$$p = 1 - q = 1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij})$$

якщо $\mu=k>1$ (при k шляхів встановлення з'єднання)

$$Q = 1 - \prod_k (1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij}))$$

$$P = \prod_k (1 - \prod_{ij} (1 - p_{ij}))$$

Вероятностная модель сети

- Надійність мережі може бути описана у вигляді матриці

Матрица вероятностей безотказной работы

R=	$r_{m11}(t)$	$r_{m12}(t)$...	$r_{m1j}(t)$...	$r_{m1n}(t)$
		$r_{m22}(t)$...	$r_{m2j1}(t)$...	$r_{m2n}(t)$
		
				$r_{mij}(t)$...	$r_{min}(t)$
					...	$r_{mnn}(t)$

де $r_{m_{ij}}(t)$ — імовірність безвідмовної роботи галузі m_{ij} у довільний момент часу t



Литература

- Романов А. И. Телекоммуникационные сети и управление: Учебное пособие –К. ИПЦ « Киевский университет», 2003, -247с.
- Корнышев Ю.Н., Фань Г.Л. Теория распределения информации – М.: Радио и связь, 1985
- Сети ЭВМ. Под редакцией В.М. Глушкова – М.: Связь, 1977
- Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем – М. : Наука, 1978
- Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания – М.: Наука, 1966
- Клейнрок Л. Коммутационные сети – М.: Наука, 1970
- Шварц М. Сети ЭВМ. Анализ и проектирование - М.: Радио и связь, 1981
- Советов Б.Я. и др. Построение сетей интегрального обслуживания – Л.: Машиностроение, Лен отд-е, 1990
- Клейнрок Л. Вычислительные сети с очередями – М.: Мир, 1979
- Хилс М.Т. Принципы коммутации в электросвязи - М.: Радио и связь, 1984
- Френк Г. , Фриш И. Сети, связь и потоки – М.: Связь, 1978



Спасибо за внимание!