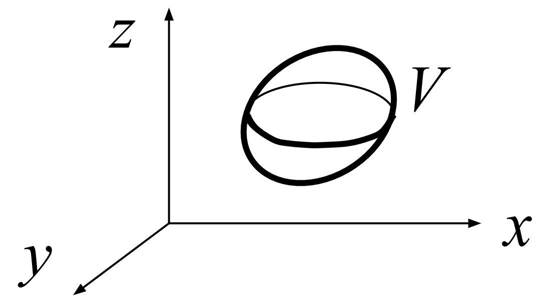
Лекция 2-3.
10. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.
10.1. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл.

- **Рассмотрим тело объемом** V
- **переменной плотности**

$$\gamma = \gamma(x, y, z).$$



Разобьем тело произвольным образом на n **частей элементарными объемами** $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$.
Выберем в каждом из элементарных объемов произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$.
Масса элементарного объема приближенно равна

$$\Delta M_k \approx \gamma(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Просуммируем массу всех элементарных объемов

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k .$$

- **Выражение в правой части называется интегральной суммой. Устремим наибольший диаметр элементарных объемов к нулю и рассмотрим предел** $\lim\limits_{\max \varnothing \Delta V_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k .$

Если этот предел интегральной суммы существует, то, очевидно, он равен массе тела и называется тройным интегралом от функции $\gamma=\gamma\left(x, y, z\right)$ **по объему** V

$$M=\lim_{\max \varnothing \Delta V_k \to 0}\sum_{k=1}^{n}\gamma\left(x_k, y_k, z_k\right)\Delta V_k=\iiint\limits_V \gamma\left(x, y, z\right)dV .$$

Вообще, тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ **по объему** V **называется предел интегральной суммы**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\,\Delta V_k .$$

- **Свойства двойных интегралов переносятся на тройные интегралы:**

1) $$\iiint\limits_V \big(f_1(x,y,z) \pm \ldots \pm f_n(x,y,z)\big)dV = \iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \pm \ldots \pm \iiint\limits_V f_n(x,y,z)\,dV .$$

2) $$\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV .$$

3) $V = V_1 \cup V_2,\ V_1 \cap V_2 = \varnothing.$ **Тогда**

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV .$$

4) **Если** ∀(x,y,z)∈V $f_1(x,y,z) \ge f_2(x,y,z)$,

то $$\iiint\limits_V f_1(x,y,z)\,dV \ge \iiint\limits_V f_2(x,y,z)\,dV.$$

5) **Если** $m = f_{наим}$ в V, $M = f_{наиб}$ в V,

то $$mV \le \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \le MV,$$

где $$V = \iiint\limits_V dV.$$

6) $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = f(\xi,\eta,\varsigma)V, \quad (\xi,\eta,\varsigma) \in V.$$

$f(\xi,\eta,\varsigma)$ **- среднее значение f в области V.**

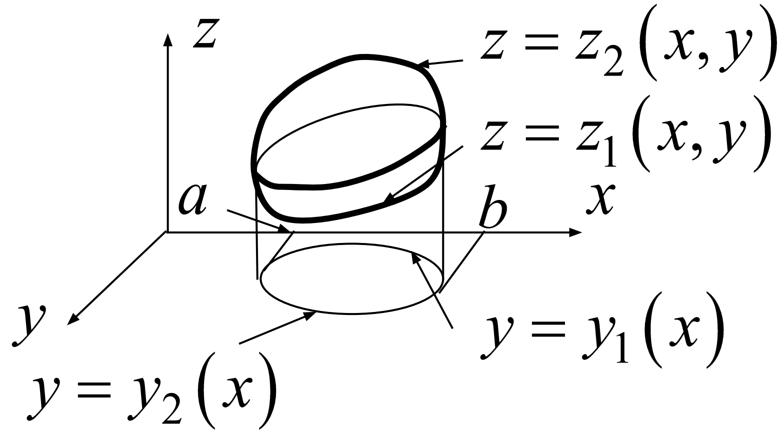
10.2. Вычисление тройных интегралов.
1) Декартовы координаты.

- **Пусть дан тройной интеграл** $I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV.$
- **Разобьем область интегрирования** V **на элементарные объемы плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда элементарный объем равен** $dV = dxdydz.$ **Следовательно**

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

-

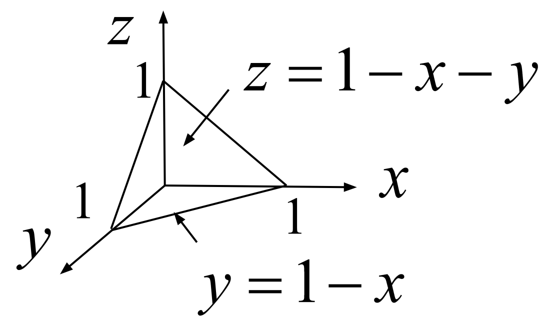
Установим правило вычисления тройного интеграла



$$I = \iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Пример.
Вычислить тройной интеграл $I = \iiint\limits_V (x+y+z)\,dxdydz$

по области, ограниченной плоскостями: $x=0,\ y=0,\ z=0$
и $x+y+z=1.$
Построим область интегрирования:



$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(-\frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \right) dy = \int_0^1 dx \left(-\frac{x^2}{2}y - x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2}y \right)\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

2) Цилиндрические координаты.

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ \left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\right).$$

Замена переменных в тройном интеграле производится на тех же принципах, что и в двойном интеграле.

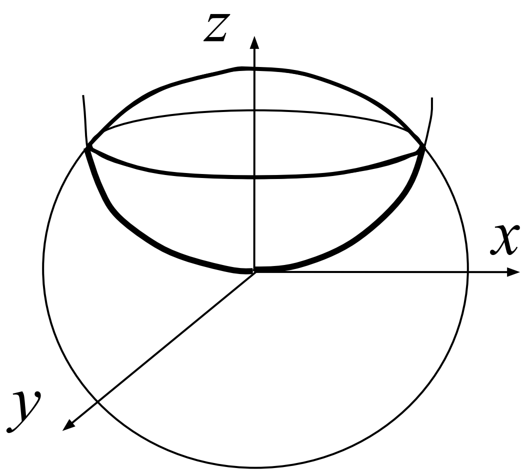
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

Тройной интеграл в цилиндрических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,d\varphi\,dr\,dz.$$

Пример. **Вычислить тройной интеграл** $\iiint\limits_V z\,dv$ **по области, ограниченной поверхностями**

$$V:\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6. \end{cases}$$



Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,\ \ J = r.$$

Уравнение параболоида примет вид:

$$z = x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \to z = r^2.$$

Уравнение сферы примет вид:

$$r^2 + z^2 = 6 \to z = \sqrt{6 - r^2}.$$

Линией пересечения поверхностей является окружность радиуса $r = \sqrt{2}$ $\left(r^2 + r^4 = 6\right)$.

Переменные изменяются в следующих пределах:

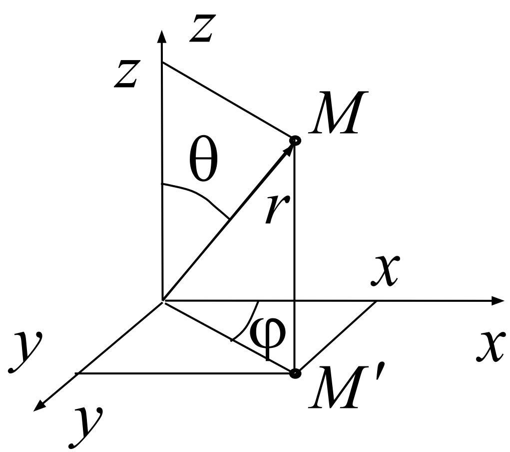
$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad r^2 \le z \le \sqrt{6 - r^2}.$$

Интеграл запишется в виде:

$$I = \iiint\limits_V z\,dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \left.\frac{z^2}{2}\right|_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(6 - r^2 - r^4\right) r\,dr = \frac{11}{3}\pi.$$

3) Сферические координаты.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$
$$\left(0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi\right).$$



Якобиан преобразования вычисляется по формуле

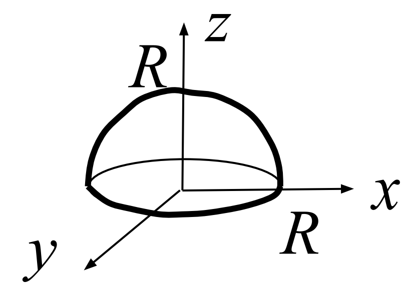
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r^2\sin\theta.$$

Тройной интеграл в сферических координатах примет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f\left(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\right)r^2\sin\theta\,d\varphi\,dr\,d\theta.$$

Пример. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dv$,

где область V **- верхняя половина шара** $x^2+y^2+z^2\le R^2$.



Перейдем к сферическим координатам:

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,$

$z = r\cos\theta,\ \ J = r^2\sin\theta.$

Для данной области интегрирования, переменные изменяются в пределах: $0\le r\le R,\ 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}.$

Интеграл запишется в виде:

$$I=\iiint\limits_V\left(x^2+y^2\right)dv=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^4dr\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=$$

$$=2\pi\frac{R^5}{5}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2\theta-1\right)d\left(\cos\theta\right)=2\pi\frac{R^5}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{4}{15}\pi R^5.$$