Задачи нелинейного программирования. Методы и инструментальные средства их решения

Лекция 8

План лекции

- I Общая постановка задачи НЛП.
- II Геометрическая интерпретация решения двумерной задачи НЛП.
- III Классическая задача на условный экстремум
- IV Численные методы решения задач НЛП
- V Обзор стандартных пакетов прикладных программ для решения задач НЛП.

Постановка задачи нелинейного программирования

- Целевая функция

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \min \quad (1)$$

- Система ограничений

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0 \\ \ldots. \\ g_m(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$x \in X, \; X \subset R^n \qquad (3)$$

$$x^* = \arg\min_{x \in D} f(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad (4)$$

Геометрическая интерпретация решения двумерной задачи НЛП

Алгоритм

- 1. Находят область допустимых решений (ограничения 2-3)
- 2. Строят характерные линии уровня целевой функции 1
- 3. Находят точку области допустимых решений через которую проходят линии наименьшего уровня (наивысшего уровня) или устанавливают неразрешимость задачи, в случае неограниченности целевой функции снизу (сверху)

Пример

- Решить задачу $f(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \rightarrow \max(\min)$

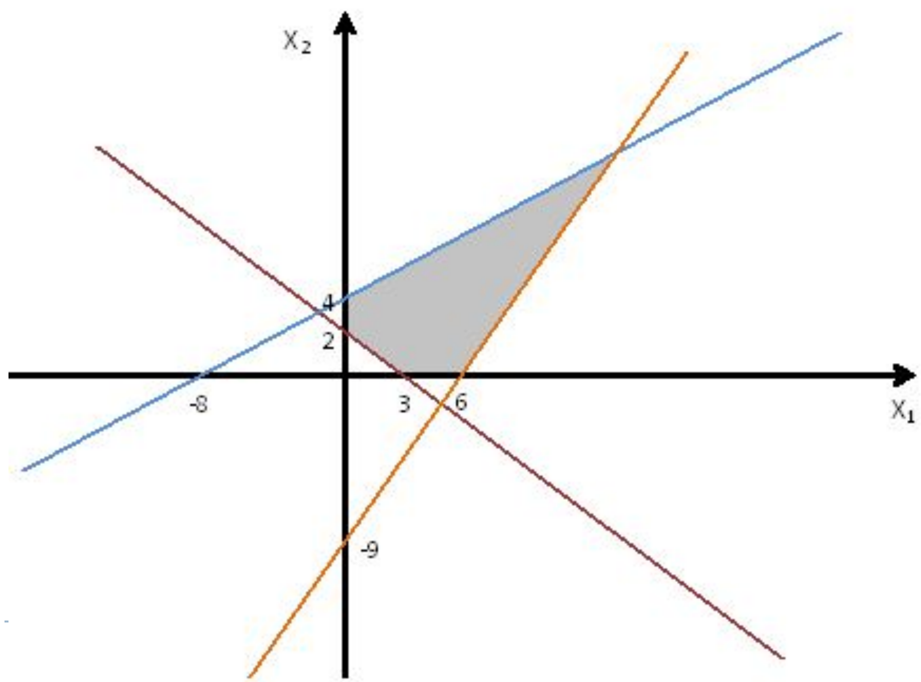
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0$$

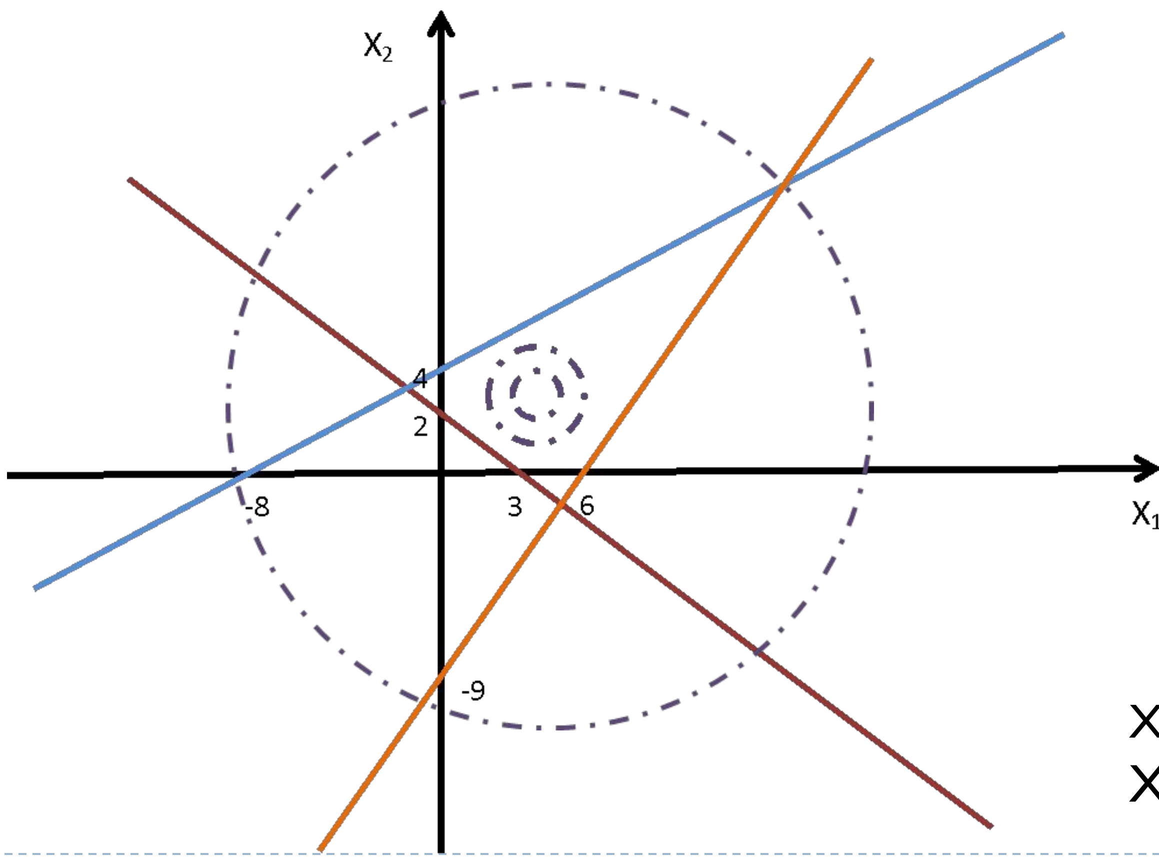
- 1. Построим ОДР

- 2. Линия уровня

$$(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = \alpha$$



Построение характерных линий уровня



Xmin=(4, 3)
Xmax=(13, 10.5)

Выводы

- Решение задачи НЛП может находится как внутри допустимой области, так и на её границе

- Решение задачи НЛП может быть затруднено наличием глобальных и локальных экстремумов целевой функции

- В теории НЛП выделяют класс задач, обладающих некоторыми свойствами, которые позволяют разработать аналитический аппарат их решения

Постановка классической задачи на условный экстремум

- Целевая функция

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \min \quad (5)$$

- Система ограничений

$$g_i(x_1, \ldots x_n) = 0 \quad i = \overline{1, m} \quad (6)$$

$$x \in R^n$$

Метод множителей Лагранжа

- Идея метода: решение задачи на условный экстремум сводится к нахождению безусловного экстремума функции с большим количеством неизвестных.

- Обобщенная функция Лагранжа

$$L(x, y_0, y) = y_0 \cdot f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot g_i(x) \to \min \ (7)$$

- Классическая (регулярная) функция Лагранжа

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot g_i(x) \ (8)$$

- Градиент функции Лагранжа $L_x{}'(x, y) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \nabla g_i(x)$
- Матрица Гёссе $L_{xx}{}''(x, y)$

Обоснование метода

- **Теорема условие локальной оптимальности задачи (5-6)**

- **Пусть функции f(x) и $g_i(x)$ i=1..m непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности точки x*. Если x* локальное решение задачи (5,6) то $\exists y_0, y^* = (y_1^*, y_2^* \dots y_m^*)$ неравные 0 одновременно и такие, что $L'_x(x^*, y^*) = 0$, $y_0^* \geq 0$. Если градиенты ограничений в точке x* линейно независимы, то**
  $\nabla f(x^*), \nabla g_i(x^*)$
- **Замечание 1: условие теоремы означает, что градиенты линейно независимы**
- **Замечание 2: если градиенты ограничений в т. x* линейно независимы, то из решения системы получим стационарную точку задачи (5, 6)**

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ g_i(x) = 0 \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \qquad (8)$$

Обоснование метода

- Теорема 2 Достаточное условие экстремума
  - Пусть функции f(x) и $g_i(x)$ i=1..m дважды непрерывно дифференцируемые в точке x* и x* является допустимым решением задачи (удовлетворяет условиям 6). Пусть выполняется необходимое условие и матрица Гёссе по переменной x функции Лагранжа является положительноопредленной (отрицательноопределенной для max), тогда точка x* является локальным решением задачи (5,6).

Обзор численных методов

- *Требование:* задачи выпуклого НЛП

- Метод условного градиента
- Метод проекции градиента
- Методы штрафных функций

Пакеты прикладных программ для решения задач НЛП

- MS Excel надстройка «Поиск решения»
- ППП MathCAD (встроенная функция)
- ППП MathLab
- Система Mathematica
- Отдельные модули в специализированных программных средствах
- Разработка собственных программных средств