Переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами

Стационарный (установившийся) режим – это режим при котором распределение электромагнитной энергии между элементами цепи постоянно (цепи постоянного тока) или меняется во времени по периодическому закону (цепи синусоидального и периодического несинусоидального тока.

Переходные процессы – это явление изменения во времени напряжений, токов или производных от них величин, обусловленное переходом от одного стационарного состояния цепи к другому.

Коммутациями называют скачкообразные изменения элементов цепи.

Законы коммутации

Энергия, накопленная в катушке индуктивности: $$W_{M(0-)} = \frac{L \cdot i^2_{(0-)}}{2} = \frac{L \cdot i^2_{(0+)}}{2} = W_{M(0+)}$$

Потокосцепление $$\Psi(0+) = \Psi(0-)$$

1й закон коммутации – ток в катушке индуктивности скачком измениться не может

$$i_L(0+) = i_L(0-)$$

Энергия, накопленная конденсатором: $$W_{Э(0-)} = \frac{C \cdot u^2_{(0-)}}{2} = \frac{C \cdot u^2_{(0+)}}{2} = W_{Э(0+)}$$

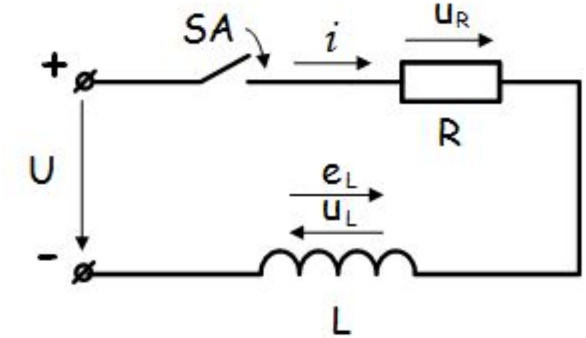
Заряд $$Q(0+) = Q(0-)$$

2й закон коммутации – напряжение на емкости скачком измениться не может

$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

Классический метод расчета переходных процессов

Подключение последовательной RL-цепи к источнику постоянного напряжения



$$u_L + u_R = U$$

$$L\frac{di}{dt} + iR = U$$

$$i = i_{пр} + i_{св}$$

$i_{пр}$ - принужденная составляющая

$i_{св}$ - свободная составляющая

$$i_{пр} = \frac{U}{R}$$

$$L\frac{di}{dt}+iR=0$$

$$i_{\text{св}}=Ae^{pt}$$

A – постоянная интегрирования

p – корень характеристического уравнения

Характеристическое уравнение: $pL+R=0$ $\quad p=-\frac{R}{L}$

$$i_{\text{св}}=Ae^{-\frac{R}{L}t} \qquad i=i_{np}+i_{\text{св}}=\frac{U}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

Начальные условия: $i(0-)=i_L(0-)=i_L(0+)=0$

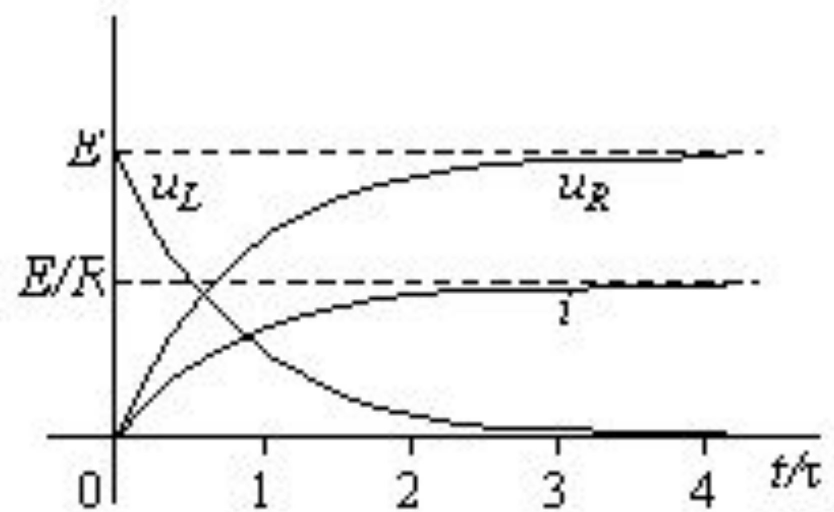
$$0=\frac{U}{R}-A \qquad A=-\frac{U}{R} \qquad i=\frac{U}{R}-\frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\tau=\frac{1}{|p|}=\frac{L}{R}$ - постоянная времени

$$i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$U_R = iR = U(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

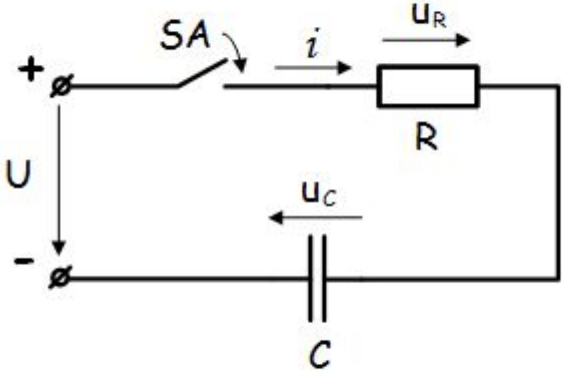
$$U_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\frac{R}{L}t}$$



Короткое замыкание последовательной RL - цепи

Подключение последовательной RL-цепи к источнику синусоидального напряжения

Подключение последовательной RC-цепи к источнику постоянного напряжения



$$u_R + u_C = U$$

$$U_R = iR$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

$$u_C = u_{C\,np} + u_{C\,\text{св}}$$

$$u_{C\,\text{пр}} = U$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$u_{C\,\text{св}} = Ae^{pt}$$

Характеристическое уравнение:

$$RCp + 1 = 0$$

$$p = -\frac{1}{RC}$$

$$u_C = U + Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

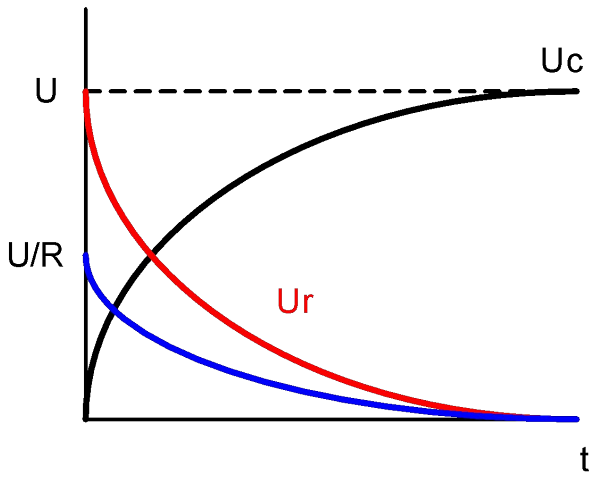
$$u_C = U + Ae^{-\frac{1}{RC}t}$$

Начальные условия: $$u_C(0-) = u_C(0+) = 0$$

$$0 = U + A \qquad A = -U$$

$$u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\tau = \frac{1}{|p|} = RC$$ - постоянная времени

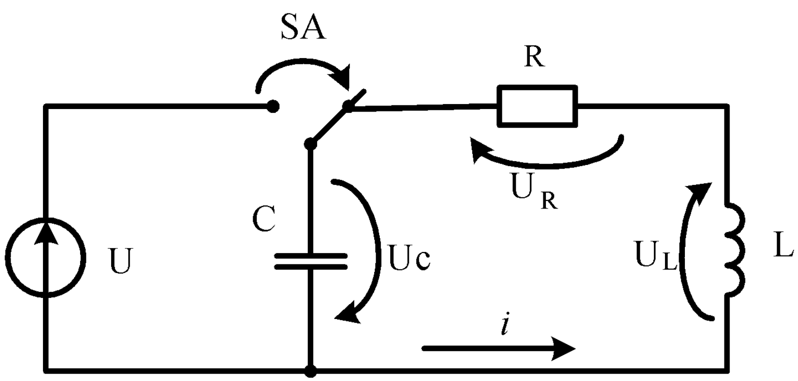


$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = -CU(-\frac{1}{RC})e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$U_R = iR = Ue^{-\frac{1}{RC}t}$$

Разрядка емкости через конденсатор

Свободные колебания в последовательной RLC-цепи



Начальные условия:

$$i_L(0-) = 0 \qquad u_C(0-) = U$$

$$u_L + u_R + u_c = 0$$

$$L\frac{di}{dt} + iR + u_c = 0$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{d^2u_c}{dt} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0$$

$$\frac{R}{L} = 2\delta \qquad \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0$$

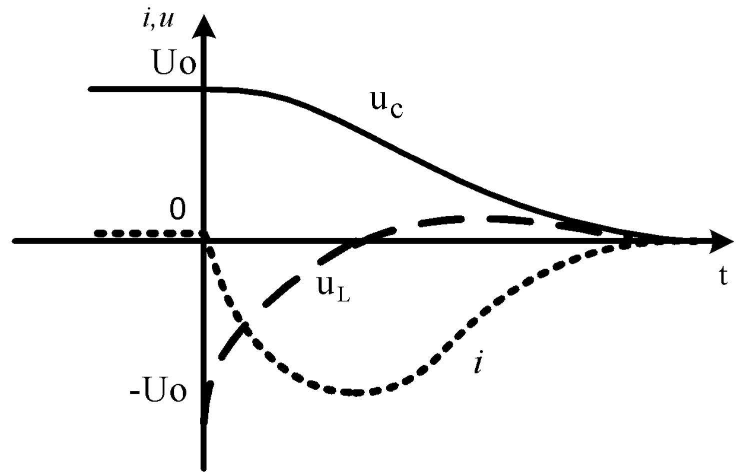
$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

1 вариант

$$\delta > \omega_0 \qquad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad R > 2\sqrt{\rho} \qquad Q < \frac{1}{2}$$

$p_1 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ $\quad p_2 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ - отрицательные, действительные числа

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \qquad i = C\frac{du_C}{dt} = CA_1 e^{p_1 t} + CA_2 e^{p_2 t} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$



Свободный процесс носит апериодический характер

2 вариант

$$\delta = \omega_0 \qquad \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = p_2 = -\delta$$

Свободный процесс носит граничный апериодический характер

3 вариант

$$\delta < \omega_0 \qquad Q > \frac{1}{2}$$

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{4\rho^2}}$$

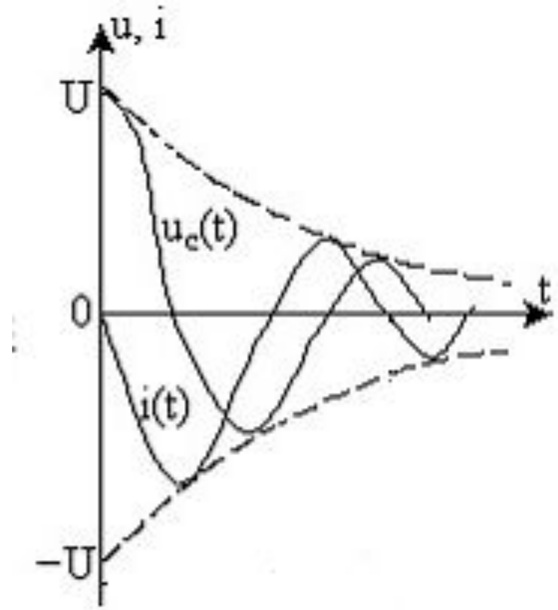
ω_C -собственная частота последовательного колебательного контура

$$p_1 = -\delta + j\omega_C \qquad p_2 = -\delta - j\omega_C$$

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} e^{j\omega_C t} + A_2 e^{-\delta t} e^{-j\omega_C t} = U \frac{\omega_0}{\omega_C} e^{-\delta t} \sin(\omega_C t + \psi)$$

где $\psi = \arcsin \dfrac{\omega_c}{\omega_0}$

$$i = \frac{U}{\omega_C L} e^{-\delta t} \sin(\omega_C t + \pi)$$



Свободный процесс носит колебательный характер

Операторный метод расчета переходных процессов

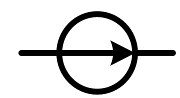
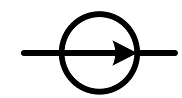
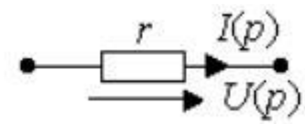
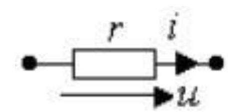
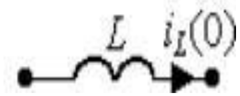
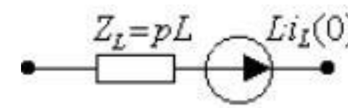
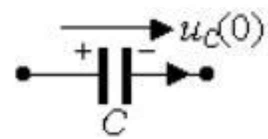
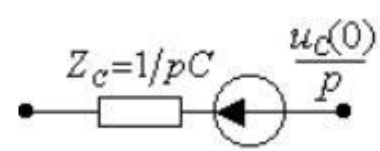
Операторный метод расчета переходных процессов основывается на использовании линейного интегрального преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad \text{или} \qquad F(p) \doteqdot f(t)$$

где *f(t) – оригинал,*
F(p) – изображение, $p = s + j\omega$

Порядок расчета

1. Составить операторную схему замещения
   а) рассчитать начальные условия
   б) изобразить схему после коммутации
   в операторном виде, используя таблицу

Исходная электрическая цепь	Операторная расчетная цепь
E(t) 	E/p 
	
	
	

2. Рассчитать операторную схему, используя методы теории электрических цепей.

3. Определить оригинал по изображению, используя теорему разложения.

Если $F(p) = \dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, то найти оригинал можно по формуле:

$$f(t) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{F_1(p_\kappa)}{F_2^{'}(p_\kappa)} e^{p_\kappa t}$$

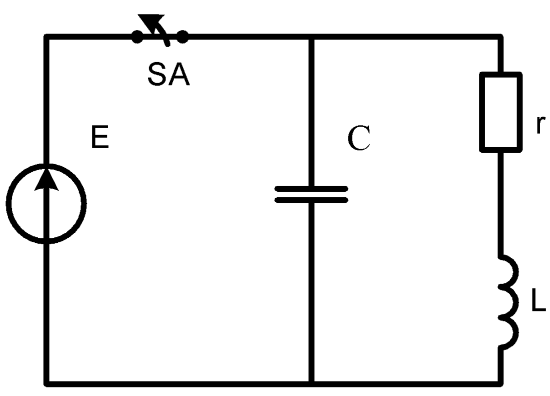
где p_k - корни уравнения $F_2(p) = 0$

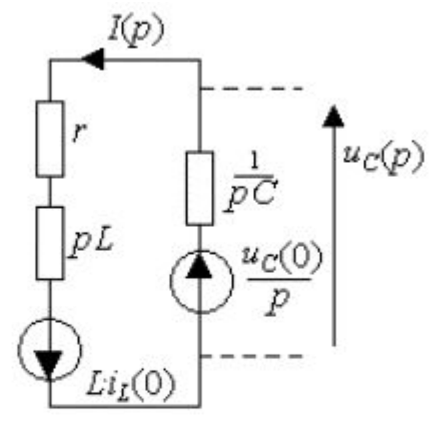
Пример расчета

Для цепи второго порядка найти операторным методом ток после размыкания ключа SA.
Параметры цепи: E=40 В; r =40 Ом; L = 1 Гн; C = 1/300 Ф.

Решение задачи начинаем с изображения операторной цепи, которая соответствует послекоммутационному состоянию цепи . Начальные условия для внутренних источников энергии находятся для момента времени t = 0- так же, как это было сделано при решении задачи классическим методом: i_L (0-) = E/r = 1 А; u_C(0-) = E = 40 В.

В операторной одноконтурной цепи протекает операторный ток I(p) под действием операторных источников напряжения





Формально рассматривая эту цепь как цепь постоянного тока, найдем

$$I(\mathbf{p}) = \frac{Li_L(0) + u_C(0)/\mathbf{p}}{\mathbf{p}L + r + 1/\mathbf{p}C} = \frac{Li_L(0)\mathbf{p} + u_C(0)}{\mathbf{p}^2L + r\mathbf{p} + 1/C}$$

После подстановки численных значений параметров получим

$$I(\mathrm{p}) = \frac{F_1(\mathrm{p})}{F_2(\mathrm{p})} = \frac{\mathrm{p} + 40}{\mathrm{p}^2 + 40\mathrm{p} + 300}$$

Приравнивая нулю знаменатель, найдем корни

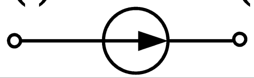
$$F_2(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + 40\mathbf{p} + 300 = 0 \qquad \mathbf{p}_1 = -10 \qquad \mathrm{p}_2 = -30$$

Следует заметить, что знаменатель совпадает с характеристическим уравнением для исследуемой цепи.. Далее найдем производную знаменателя

$$F_2' = \frac{dF_2}{d\mathbf{p}} = 2\mathbf{p} + 40$$

Применим Теорему разложения и найдем оригинал тока как функцию времени

$$i(t) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{2} \frac{F_1(\mathrm{p_k})}{F_2'(\mathrm{p_k})} \mathrm{e}^{\mathrm{p_k} t} = \frac{-10 + 40}{2(-10) + 40} \mathrm{e}^{-10t} + \frac{-30 + 40}{2(-30) + 40} \mathrm{e}^{-30t} = 1.5\mathrm{e}^{-10t} - 0.5\mathrm{e}^{-30t}$$

$e(t)=10e^{-200t}\cdot 1(t)$ 	Яким є операторне зображення цього джерела напруги?

$$E(p)=\frac{10}{p}$$

$$E(p)=-200$$

.

$$E(p)=\frac{10}{p+200}$$

$$E(p)=10\sin(p+200)$$

$$E(p)=\frac{10p}{p^2-200^2}$$