

### 3 Законы распределения с.в.

Из материалов предыдущего раздела следует, что распределение с.в. является наиболее полной ее характеристикой. Однако его определение по имеющимся экспериментальным данным, на практике, задача очень непростая. Поэтому стараются, опираясь на теоретические рассуждения и предшествующий опыт, отнести это распределение к одному из известных типов. Изучению некоторых из них и будет посвящен этот раздел.

#### 3.1 Равномерное дискретное распределение

Пример. 1. Число выпавших очков при подбрасывании правильного кубика совпадает с одним из значений  $1, \dots, 6$ . Все они равновероятны.

2. Пусть из 10 человек надо выбрать одного добровольца и выбор проводится случайно.

В общем случае. Говорят, что если с.в.  $\xi$  принимает  $n$  значений

$$x_1 = a, x_2 = a + \Delta, \dots, x_n = b = a + \Delta(n-1)$$

и при этом

$$P(\{\xi = x_i\}) = 1/n, i = 1, \dots, n,$$

то она имеет равномерное дискретное распределение (рис.1).

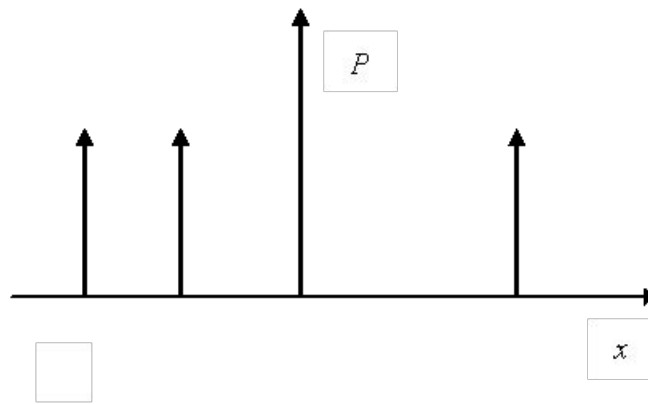


Рис.1

Можно показать, что м.о. и дисперсия  $\xi$  определяются выражениями

$$M\xi = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} (a + i\Delta) = (a + b) / 2;$$

$$D\xi = 1/n \sum_{i=0}^{n-1} (a + i\Delta - M\xi)^2 = \Delta^2 (n^2 - 1) / 12 .$$

Если

$$\Delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ так что } \Delta(n-1) = b - a ,$$

то дисперсия стремится к величине

$$(b - a)^2 / 12 .$$

### 3.2 Распределение Бернулли

Примеры. 1.Фирма выпускает некоторые изделия. Каждое, из изделий может быть либо годным с вероятностью  $p$ , либо бракованным с вероятностью  $1-p$ . С выпускаемыми изделиями можно связать д.с.в., которая принимает два значений 1 и 0 с вероятностями  $p$  и  $1-p$  соответственно.

2.Бинарный сигнал на входе приемника

3.Стрельба по мишени. Попадание -1, промах -0.

В общем случае. Говорят, что если с.в.  $\xi$  принимает 2 значения 0,1 с вероятностями  $p$  и  $1-p$  соответственно, то она имеет распределение Бернулли (рис.2), а сама с.в называется бернуллиевой с.в.

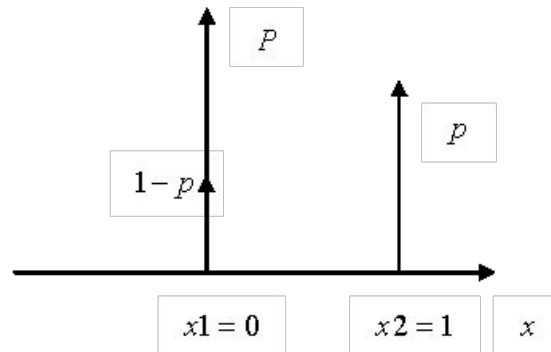


Рис.2

Найдем м.о. и дисперсию бернуллиевой с.в. Имеем

$$M\xi = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p, D\xi = (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p) = p(1-p).$$

### 3.3 Биномиальное распределение

Одно из самых важных распределений д.с.в. Пусть имеется некоторое событие  $A$ , которое может наступить с вероятностью  $p$  или не наступить с вероятностью  $1-p$  в результате проведения эксперимента  $\Sigma$ . Предположим, что эксперимент повторяется независимо от предыдущих  $n$  раз и требуется определить, что при этом событие  $A$  наступит  $k$  раз (последовательность испытаний Бернулли).

С испытаниями Бернулли можно связать д.с.в., которая принимает значения  $0, 1, \dots, n$ . Мы хотим найти вероятности событий

$$P\{A \text{ наступит } k \text{ раз}\} = p_n(k) = P(\{\omega : \xi(\omega) = k, k = 0, \dots, n\}).$$

Д.с.в., принимающая значения  $0, 1, \dots, n$  с вероятностями  $p_n(k)$  называется биномиальной с.в.

Примеры. 1. Многократное подбрасывание монеты, кубика.

2. В любом производственном процессе, независимо от того, как хорошо он сконструирован или тщательно поддерживается всегда, имеется определенная изменчивость. Эта природная изменчивость ("background noise") есть суммарный эффект действия многих малых существенно неустраняемых причины и поэтому представляется естественным допущение о том, что она носит случайный характер в соответствии с которым, время от времени, появляются бракованные изделия. Считается, что процесс, в котором присутствует только такого типа изменчивость, находится под *статистическим контролем*. Другие возможные типы изменчивости, которые появляются, время от времени, могут быть вызваны, например, разладкой оборудования, ошибками оператора, не качественным сырьем и т.д. Предполагается, что они, как правило, существенно выше природной и определяют неприемлемый уровень качества. Процесс, в котором наряду с природной присутствует еще и такие типы изменчивости находится *вне контроля*.

Пусть на выходе ОТК проверяются  $n$  изделий и производственный процесс удовлетворяет условиям

- а) вероятность того, что любое выпускаемое изделие является браком, есть  $p$ ;
- б) бракованные изделия производятся независимо друг от друга.

Выполнение первого условия означает, что результат проверки каждого изделия есть реализация бернуллиевой случайной величины, принимающей значение 1 или 0 в зависимости от того, соответствует ли оно заданным требованиям или нет с вероятностями  $p$  и  $1-p$  соответственно, а весь процесс проверки  $n$  изделий есть последовательность испытаний Бернулли. Требуется определить вероятность того, что  $k$  изделий будут бракованными.

Вернемся к общей постановке задачи. Вероятностное пространство для испытаний Бернулли строится так

$$\Omega = \underbrace{\{A, A^c\}}_n^* \cdot \underbrace{\{A, A^c\}}_n^* \cdot \dots \cdot \underbrace{\{A, A^c\}}_n^* = \{A, A^c, \bar{A}, \bar{A}\}, \Omega_1 = \{A, A^c\}.$$

Пусть  $B_k$  событие, состоящее в том, что  $A$  произойдет  $k$  раз ( $B_k \subset \Omega$ ). Событие  $B_k$  состоит из всевозможных множеств вида

$$B_k = \{\underbrace{A^* \cdot \dots \cdot A^*}_k \cdot \underbrace{A^c \cdot \dots \cdot A^c}_{n-k}, \dots\} = \{B_1^k, \dots, B_N^k\} = \sum_{i=1}^N B_i^k.$$

Каждый элемент  $B_i^k$  содержит ровно  $k$  повторений  $A$  и  $n-k$   $A^c$  в произвольном порядке. В силу независимости экспериментов имеем

$$P(B_i^k) = p^k (1-p)^{n-k} = p^k q^{n-k}, i = 1, \dots, N.$$

Так как события  $B_i^k, i = 1, \dots, N$ , несовместны, то

$$P_n(k) = P(B^k) = \sum_{i=1}^N P(B_i^k) = N p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Для биномиальной случайной величины

$$M\xi = np, D\xi = np(1-p).$$

И наконец, приведем соотношение, связывающее биномиальную и бернуллевую с.в. Пусть  $\xi_i, i=1, \dots, n$  независимые с.в. Бернулли, а  $\xi$  - биномиальная с.в. Тогда

$$\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n.$$

Откуда, в частности, следуют приведенные соотношения для м.о. и дисперсии.

Пример. 3. Какова вероятность однократной ошибки при чтении 32-разрядного слова, если вероятность ошибки при чтении двоичной цифры составляет  $10^{-3}$ .

Пусть А – появление однократной ошибки,  $n=32, k=1, p=10^{-3}$ . Имеем

$$P\{\text{одна ошибка в слове}\} = P_{32}(1) = C_{32}^1 10^{-3} 0.999^{31} = 0.9685.$$

Кроме вероятностей  $P(B^k)$ , в приложениях могут представлять интерес и другие вероятности. Например:

$$C_k = \{\text{А произошло менее } k \text{ раз}\},$$

$$D_k = \{\text{А произошло более } k \text{ раз}\},$$

$$E_k = \{\text{А произошло не более } k \text{ раз}\},$$

$$F_k = \{\text{А произошло не менее } k \text{ раз}\}.$$

Найдем вероятности этих событий. Имеем:

$$C_k = B_0 + \dots + B_{k-1}, D_k = B_{k+1} + \dots + B_n,$$

$$E_k = B_0 + \dots + B_k, F_k = B_k + \dots + B_n.$$

Так как события, входящие в эти суммы несовместны, то

$$P(C_k) = \sum_{i=0}^{k-1} P(B_i) = \sum_{i=0}^{k-1} p_n(i), P(D_k) = \sum_{i=k+1}^k P(B_i) = \sum_{i=k+1}^k p_n(i),$$

$$P(E_k) = \sum_{i=0}^k P(B_i) = \sum_{i=0}^k p_n(i), P(F_k) = \sum_{i=k}^k P(B_i) = \sum_{i=k}^k p_n(i).$$

Рассмотрим важный частный случай общей задачи: определим вероятность того, что А произойдет хотя бы раз в  $n$  испытаниях.

Ясно, что требуется найти

$$P(F_1) = \sum_{i=1}^n p_n(i).$$

При больших  $n$  сумму найти сложно, поэтому воспользуемся равенством

$$F_1 + E_0 = \Omega.$$

Откуда находим

$$P(F_1) = 1 - P(E_0) = 1 - p_n(0) = 1 - (1 - p)^n.$$

Из этого соотношения следует, что как бы ни была мала вероятность наступления А, при достаточно большом числе испытаний оно произойдет хотя бы раз с вероятностью сколь угодно близкой к 1. Действительно, при  $n \rightarrow \infty$  правая часть этого равенства стремится к 1. Пусть, например,  $p=0.0001$ . Тогда при  $n=100000$  будем иметь  $P(F_1)=0.99995$ .

### Локальная теорема Лапласа

$$p_n(k) = 1/\sqrt{npq}\varphi(x),$$

при  $n \rightarrow \infty$ , где

$$\varphi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \exp(-x^2/2), \quad x = (k - np)/\sqrt{npq}.$$

### Интегральная теорема Лапласа

Пусть  $p_n(k_1, k_2)$  - вероятность того, что  $A$  появится в  $n$  испытаниях от  $k_1$  до  $k_2$  раз. Тогда при  $n \rightarrow \infty$

$$p_n(k_1, k_2) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \exp(-x^2) dx,$$

где

$$x_1 = (k_1 - np)/\sqrt{npq}, \quad x_2 = (k_2 - np)/\sqrt{npq}.$$

### Независимость и отсутствие памяти в испытаниях Бернулли

Пример. Пусть

$$\beta = \xi_1 + \dots + \xi_5, \quad \alpha = \xi_6 + \dots + \xi_9,$$

где  $\xi_i$  - независимые с.в. Бернулли. Тогда с.в.  $\beta, \alpha, \zeta$  - независимы.



### 3.4 Геометрическое распределение

Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли, которые продолжаются до тех пор, пока не наступит событие  $A$ . Имеем

$$P(\{A \text{ наступит в первый раз}\})=p, \dots, P(\{A \text{ наступит в } s\text{-ый раз}\})=q^{s-1}p.$$

Эти вероятности следуют из представления

$$\{A \text{ наступит в } s\text{-ый раз}\} = A^C \dots A^C A$$

и независимости наступления события  $A$  в каждом испытании.

Введем с.в.  $\xi$ , принимающую значения  $1, 2, \dots$  с вероятностями

$$P(\{\xi = s\}) = q^{s-1}p = p_s, s = 1, 2, \dots$$

Такое распределение называется геометрическим. Используя формулу суммирования геометрической прогрессии можно показать, что

$$P(\{\xi=1 \text{ или } \xi=2, \dots\}) = p + qp + \dots = p/(1-q) = 1$$

(геометрическая прогрессия с показателем  $q$ ).

Имеет м.о и дисперсию

$$M\xi = 1/p, D\xi = (1-p)/p^2.$$

Играет важную роль в теории очередей. Предположим, что очередь покупателей ждет обслуживания, и в каждый малый промежуток времени прибывает либо один, либо ноль покупателей, Вероятность, что прибывает, равна  $p$ , а не пребывает  $1-p$ . Тогда время до прибытия, следующего покупателя  $T$  имеет геометрическое распределение. Вероятность того, что ни один покупатель не появится за  $k$  единиц времени, определяется выражением

$$P(\{T > k\}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} q^{i-1} p = q^k (1 + qp + \dots) = q^k.$$

Следует из выражения

$$\{T > k\} = \{B k + 1\} + \{B k + 1\} + \dots .$$

Возможное обобщение: опыты продолжаются до тех пор пока  $A$  не наступит ровно  $k$  раз и требуется найти вероятность того, что для этого потребуется  $s$  опытов. Такое распределение называется отрицательным биномиальным распределением.

Пример. Встретить двух людей с одним и тем же днем рождения. Как много людей вы должны встретить, чтобы среди них оказался человек, рожденный, например, 3 марта?

Решение. Пусть выполняются условия:

1. Вероятности родиться в любой день года одинаковы и равны  $p = 1/365$ .
2. Независимость дней рождения, встреченных людей.

Имеем

$$P_k = P(\xi > k) = (1 - p)^k.$$

Откуда  $P_{30} = 0.92$ ,  $P_{100} = 0.76$ ,  $P_{1000} = 0.064$ .

### 3.5 Гипергеометрическое распределение

Пример. Пусть имеется партия из  $N$  изделий, которую мы будем называть генеральной совокупностью, в которой  $M$  изделий дефектных. Из генеральной совокупности случайным образом *без возвращения* извлекается выборка размера  $n$  ( $n < N$ ). Требуется найти вероятность, что в выборке будет  $k$  бракованных.

Количество бракованных изделий  $\xi$  в случайной выборке объема  $n$  *без возвращения* из генеральной совокупности состоящей из  $N$  изделий, включающей  $M$  бракованных имеет гипергеометрическое распределение, в соответствии с которым, вероятность того, что  $\xi$  примет значение  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) определяется выражением

$$P(\{\xi = k\}) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n.$$

Если из описанной выше генеральной совокупности извлекать случайно изделия *с возвращением* или объем выборки достаточно велик, то вероятность того, что любое из них будет бракованным, есть *постоянная* величина равная  $M/N$ . В этом случае, количество бракованных изделий  $\xi$  в случайной выборке имеет биномиальное распределение, а вероятность того, что выборка из  $n$  изделий содержит  $m$  таких изделий, определяется выражением

$$P(\{\xi = m\}) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n.$$

Биномиальное распределение может быть использовано в качестве приближения для гипергеометрического распределения, если  $0.1 < p < 0.9$ ,  $n > 10$ ,  $n/N < 0.1$ .

### 3.6 Распределение Пуассона

Возникает во многих ситуациях и является одним из трех наиболее важных дискретных распределений (другие два: биномиальное и равномерное). Может быть получено, как из биномиального, так и из экспоненциального. Здесь мы покажем его связь с биномиальным.

Примеры 1. Телефонные звонки в милицию. Мы хотим моделировать эту ситуацию так, чтобы можно было рассматривать вероятности, например, таких событий: более чем 10 звонков за 5 минут.

2. Число отказов за заданный промежуток времени.

3. Число несчастных случаев в автокатастрофах за заданный промежуток времени.

4. Число дефектов в некотором изделии.

Пусть  $\xi(t)$  число появлений события А на интервале  $[0, t]$ . Тогда число появлений А на  $[t_1, t_2]$  равно  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ . Пусть также выполняются условия:

1) Вероятность появления А за малый промежуток времени  $h$  пропорционально  $h$

$$P(\{\xi(t+h) - \xi(t) > 0\}) = \lambda h + o(h), \lambda > 0, h \rightarrow 0.$$

2) Если в интервале длины  $h$  уже произошло событие А то вероятность повторного появления А в этом же интервале стремится к нулю при  $h \rightarrow 0$

$$P(\{\xi(t+h) - \xi(t) > 1\}) = o(h), h \rightarrow 0.$$

3) С.в.  $\xi(t_1), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$  независимы между собой.

Для примера 1 эти условия означают следующее. Вероятность звонка пропорциональна длине рассматриваемого интервала и не зависит от его расположения на оси (стационарность). В течение, скажем, пяти минут происходит, обычно, не более одного звонка (ординарность). События, что имеются  $i$  звонков между 5 и 6 часами и  $k$  звонками между 6 и 7 независимы.

Разобьем весь интервал  $[0, t]$  на  $n$  непересекающихся, коротких интервалов длины  $h$  и применим схему испытаний Бернулли для подсчета вероятностей

$$p_n(k) = P(\{\xi(t) = k\}), k = 0, \dots, n.$$

Имеем

$$p_n(k) = C_n^k (\lambda h)^k (1 - \lambda h)^{n-k} = C_n^k (\lambda t/n)^k (1 - \lambda t/n)^{n-k}.$$

Откуда

$$p_n(0) = C_n^1 (1 - \lambda t/n)^n \rightarrow p(0) = e^{-\lambda t}, n \rightarrow \infty.$$

Так как

$$p_n(k)/p_n(k-1) = (n-k+1)/n / (1 - \lambda t/n) \lambda t/k \rightarrow \lambda t/k, n \rightarrow \infty,$$

то

$$p(1) = (\lambda t) e^{-\lambda t}, n \rightarrow \infty.$$

Продолжая аналогичным образом, получаем

$$p(k) = (\lambda t)^k / k! e^{-\lambda t}, k = 0, 1, \dots$$

Это распределение называется распределением Пуассона. В силу того, что оно было получено в предположении, что  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$  его называют еще законом редких событий. Можно показать, что величина  $\lambda t$  есть одновременно математическое ожидание (среднее число наступлений события  $A$ ) и дисперсия.

Пример 5. Имеется две телефонные станции А и В. А должна обеспечить связь 2000 абонентов с В. Качество должно быть таким, чтобы только 1 вызов из 100 ждал, когда линия освободится. Сколько нужно провести линий, чтобы обеспечить заданное качество связи? Очевидно, что глупо создавать 2000 линий.

Построим модель, описывающую интенсивность обращений абонентов к сети. Пусть каждый абонент использует линию в среднем 2 минуты за час и подключается независимо (это справедливо, если не происходит событие, затрагивающее всех). Тогда вероятность, что абонент будет разговаривать есть  $p=2/60=1/30$ . Имеем

$$P(\{\xi = m\}) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, m = 0, 1, \dots, 2000.$$

Требуется найти такое  $m$  при котором  $P(\{\xi = m\}) < 0.01$ . Можно показать, что  $m=86$ . Аналогичный результат значительно проще получить, используя распределение Пуассона  $\lambda^m / m! e^{-\lambda} < 0.01$ .

Мы показали, что распределение Пуассона может быть выведено из биномиального распределения. Однако распределение Пуассона может возникать в ситуациях, когда трудно интерпретировать или найти параметры  $p$  и  $n$ .

Пример 6. Пусть в определенном, фиксированном объеме крови  $W$  человек имеет в среднем 40 белых кровяных шариков. Пусть  $\xi$  с.в. – число белых кровяных шариков в случайном объеме  $W$  случайно выбранного человека. Мы можем представлять себе  $\xi$ , как б.с.в. для которой каждый шарик представляет собой испытание Бернулли. Тогда  $p$  должно быть определено, как отношение  $W$  к объему всей крови и будет числом шариков в конкретном человеке. Очевидно, что измерить эти параметры очень сложно. Но оценить среднее их число существенно проще.

### 3.7 Экспоненциальное распределение

Появляется, главным образом, в двух прикладных задачах:

- а) оценка надежности технических систем или времени жизни;
- б) оценка характеристик систем массового обслуживания и интервалов между вызовами скорой помощи, обращения клиентов и

т.д.

Пример 1. На рис.1 представлены данные о долговечности в часах для 100 ламп на 60в.

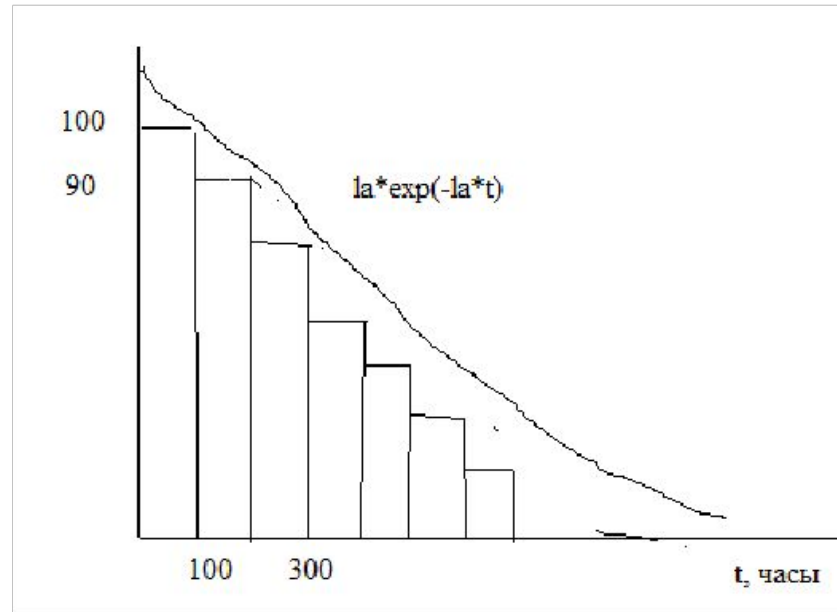


Рис.1

Н.с.в., принимающая только положительные значения имеет экспоненциальное распределение, если ее плотность распределения определяется выражением

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x > 0, \lambda > 0.$$

Установим закон распределения э.с.в. из общих соображений, используя геометрическое распределение.

Рассмотрим моменты времени  $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, h \rightarrow 0$ . В моменты  $t_k$  осуществляется испытание Бернулли в каждом из которых может наступить событие  $A$  с вероятностью

$$p = \lambda h, \lambda > 0.$$

Обозначим, через  $T$  время до первого наступления  $A$ . Тогда

$$P(T \geq x) = P(T/h \geq x/h) = (1-p)^{x/h} = (1-\lambda h)^{x/h} \rightarrow \exp(-\lambda x), h \rightarrow 0.$$

Следует из первого замечательного предела. Откуда

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0, F(x) = 0, x < 0.$$

Выражение для плотности получается дифференцированием ф.р.

Нетрудно показать, что

$$M\xi = 1/\lambda, D\xi = 1/\lambda^2.$$



### 3.8 Нормальное распределение

Нормальное распределение (распределение Гаусса) самое важное в ТВ. Оно впервые рассматривалось А.Муавром в 1753г. в качестве непрерывной аппроксимации биномиального закона. Затем оно было вновь открыто и изучено независимо друг от друга Гауссом (1809) и П.Лапласом (1812). Оба пришли к нормальному распределению в связи с разработкой теории ошибок, возникающих при обработке наблюдений.

Пример 1. Пусть  $x$  дальность полета снаряда. Мы предполагаем существование некоторой средней дальности,  $x_0$  на которую устанавливается орудие. Разность  $\delta = x - x_0$  определяет промах, который зависит от многих причин, действующих независимо друг от друга: случайные колебания ствола орудия, различие в весе снарядов, изменения атмосферы и т.д. Таким образом, промах определяется суммарным действием большего числа независимых с.в. Ясно, что подобным образом будут вести себя ошибки и во многих других задачах, с которыми сталкиваются на практике. Далее будет показано, что при определенных условиях распределение с.в., являющейся суммой большего числа взаимно независимых с.в может быть аппроксимировано нормальным распределением.

2. При броуновском движении имеется бесконечное количество независимых воздействий на отдельную частицу со стороны молекул, поэтому полагают, что координаты частиц имеют нормальное распределение.

3. Вес человека определяется бесконечным числом факторов.

Будем говорить, что н.с.в. имеет нормальное распределение, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = 1 / \sigma \sqrt{2\pi} \exp\{-(x - a)^2 / (2\sigma^2)\},$$

где  $a, \sigma$  - некоторые параметры. Можно показать, что  $a$  - есть м.о.,  $\sigma$  - с.к.о. Мы будем это записывать так  $\xi \sim N(a, \sigma^2)$ .

Графики п.р. показаны на рис.1,2.

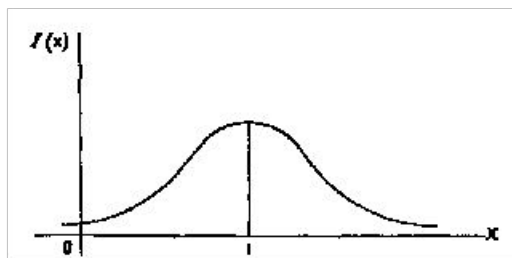


Рис.1

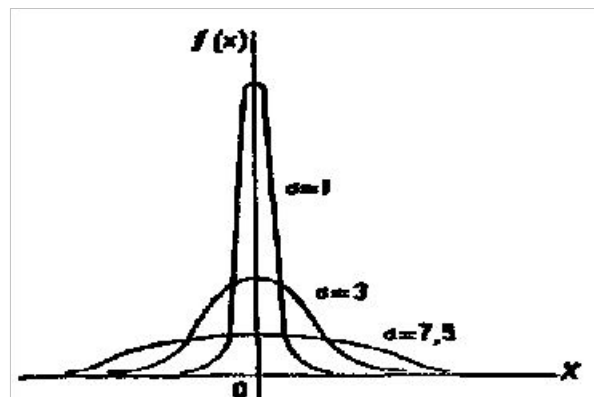


Рис.2

Можно отметить следующие его свойства:

- а) имеет только один максимум,
- б) симметричен относительно  $a$ ,
- в)  $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +/\infty$ ,
- г) "ширина колокола" пропорциональна  $\sigma$ .

Для ф.р. н.с.в. имеем

$$F(x) = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp\{-(x-a)^2/(2\sigma^2)\}dx.$$

Положим

$$(x-a)/\sigma = s, ds = dx/\sigma, s = -\infty,$$

тогда

$$F(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{(x-a)/\sigma} \exp\{-s^2/2\}ds = \Phi((x-a)/\sigma).$$

Функция

$$\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x \exp\{-s^2/2\}ds$$

называется функцией Лапласа. Она табулирована для  $x > 0$ , а для  $x < 0$  вычисляется с помощью выражения

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$

Используя ее, представим выражение для вероятности попадания н.с.в. на интервал в виде

$$P(\{b < \xi < d\}) = F(d) - F(b) = \Phi((d-a)/\sigma) - \Phi((b-a)/\sigma).$$

Это выражение упрощается, если интервал симметричен относительно м.о.

$$P(\{a-b < \xi < a+b\}) = \Phi(b/\sigma) - \Phi(-b/\sigma) = 2\Phi(b/\sigma) - 1.$$

Так как п.р. симметрична, то нечетные моменты равны нулю а для четных можно доказать справедливость представления

$$\mu_{2k} = (2k-1)\sigma^2\mu_{2k-2}, k = 1, 2, \dots, \mu_0 = 1.$$

Откуда, в частности, следует, что эксцесс н.р. равен нулю.

Найдем вероятность попадания н.с.в. в интервал  $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$ . Имеем

$$P(\{a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma\}) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973.$$

Итак, с вероятностью 0.9973, н.с.в. попадает в интервал  $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$  (правило "3  $\sigma$ "). Аналогично, находим

$$P(\{a - 2\sigma < \xi < a + 2\sigma\}) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9544, \quad P(\{a - \sigma < \xi < a + \sigma\}) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826.$$

В ТВ и ее приложениях большее значение имеет многомерное н.р. Плотность распределения  $n$ -мерной н.с.в. определяется выражением

$$f(x_1, \dots, x_n) = 1/(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2} \exp[-1/2(x - a)^T \Sigma^{-1}(x - a)],$$

где  $a, \Sigma$  есть вектор средних и ковариационная матрица, соответственно. Для двумерного случая имеем

$$f(x_1, x_2) = 1/[(2\pi)(1 - \rho^2)^{1/2}] \exp\{-1/2[(x_1 - a_1)/\sigma_1^2 + (x_2 - a_2)/\sigma_2^2 - 2\rho(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)/\sigma_1\sigma_2]/(1 - \rho^2)\},$$

где  $\rho$  коэффициент корреляции. Из этого выражения следует, что если  $\rho = 0$  для н.с.в., то они независимы. И, наконец, последнее, можно показать, что сумма независимых н.с.в. распределена по нормальному закону.

### 3.9 Равномерное непрерывное распределение

На практике появляется тогда, когда все значения с.в. из заданного интервала есть равновозможные.

Примеры 1. Вертикально, установленное, симметричное колесо приводится во вращение и затем останавливается вследствие трения. С.в. угол, отсчитываемый от горизонтальной оси до маркера на колесе.

2. Часто полагают, что фаза гармонического сигнала распределена по равномерному закону.

Говорят, что н.с.в. имеет равномерное непрерывное распределение на отрезке  $[a, b]$ , если ее п.р. имеет вид

$$f(x) = 1/(b - a), x \in [a, b], f(x) = 0, x \notin [a, b] \text{ (рис.1).}$$

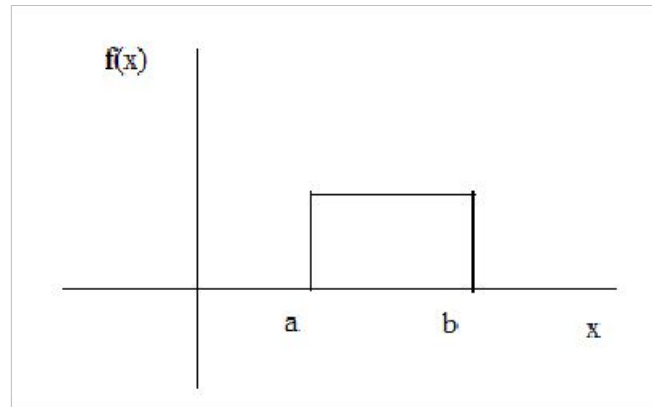


Рис.1

Ф.р. определяется выражением

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x - a)/(b - a), & a \leq x \leq b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Покажем, что вероятность того, что с.в. примет значения из заданного интервала  $(x_1, x_2) \subset [a, b]$

не зависит от положения интервала на числовой оси и пропорциональна длине этого интервала (может быть использовано в качестве определения). Действительно, имеем

$$P(\{x_1 < \xi < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)/(b - a).$$

Среднее и дисперсия определяются выражениями

$$m = (a + b)/2, D = (b - a)^{1/2} / 12.$$

### 3.10 Распределения Релея

Пусть даны две с.в.  $\xi, \beta \sim N(0, \sigma^2)$  и требуется найти распределение с.в.  $R = (\xi^2 + \beta^2)^{1/2}$ .

Пример 1. Амплитуды значений тока или напряжения.

2. При пристрелке оружия (Рис.1).

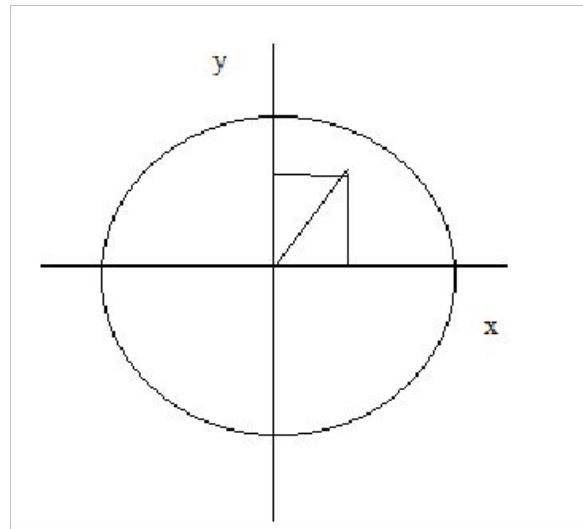


Рис.1

П.р. определяется выражением

$$f(x) = \begin{cases} x / \sigma^2 \exp(-x^2 / (2\sigma^2)), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Можно показать, что

$$MR = (\pi / 2)^{1/2} \sigma, DR = 0.429\sigma^2.$$

### 3.11 Распределения Стьюдента, $\chi^2$ и Фишера

В отличие от законов распределений, рассмотренных выше, не используются, как модели для описания физических явлений. Далее будет показано, как они используются в МС.

Пусть  $\xi_0, \dots, \xi_n$  независимые н.р.с.в. -  $\xi_i \sim N(0, \sigma^2), i = 0, \dots, n$ . Тогда по определению с.в.

$$t_n = \xi_0 / (\sum_{i=1}^n \xi_i^2 / n)^{1/2}$$

имеет распределение Стьюдента с  $n$  степенями свободы, а с.в.

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

имеет распределение  $\chi^2$ .

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_m, \beta_1, \dots, \beta_n \sim N(0, \sigma^2)$ . Тогда с.в.

$$F_{m,n} = (\sum_{i=1}^m \xi_i^2 / m) / (\sum_{i=1}^n \beta_i^2 / n)$$

имеет распределение Фишера с  $m$  и  $n$  степенями свободы.







