

# Задания с производной при подготовке к ЕГЭ

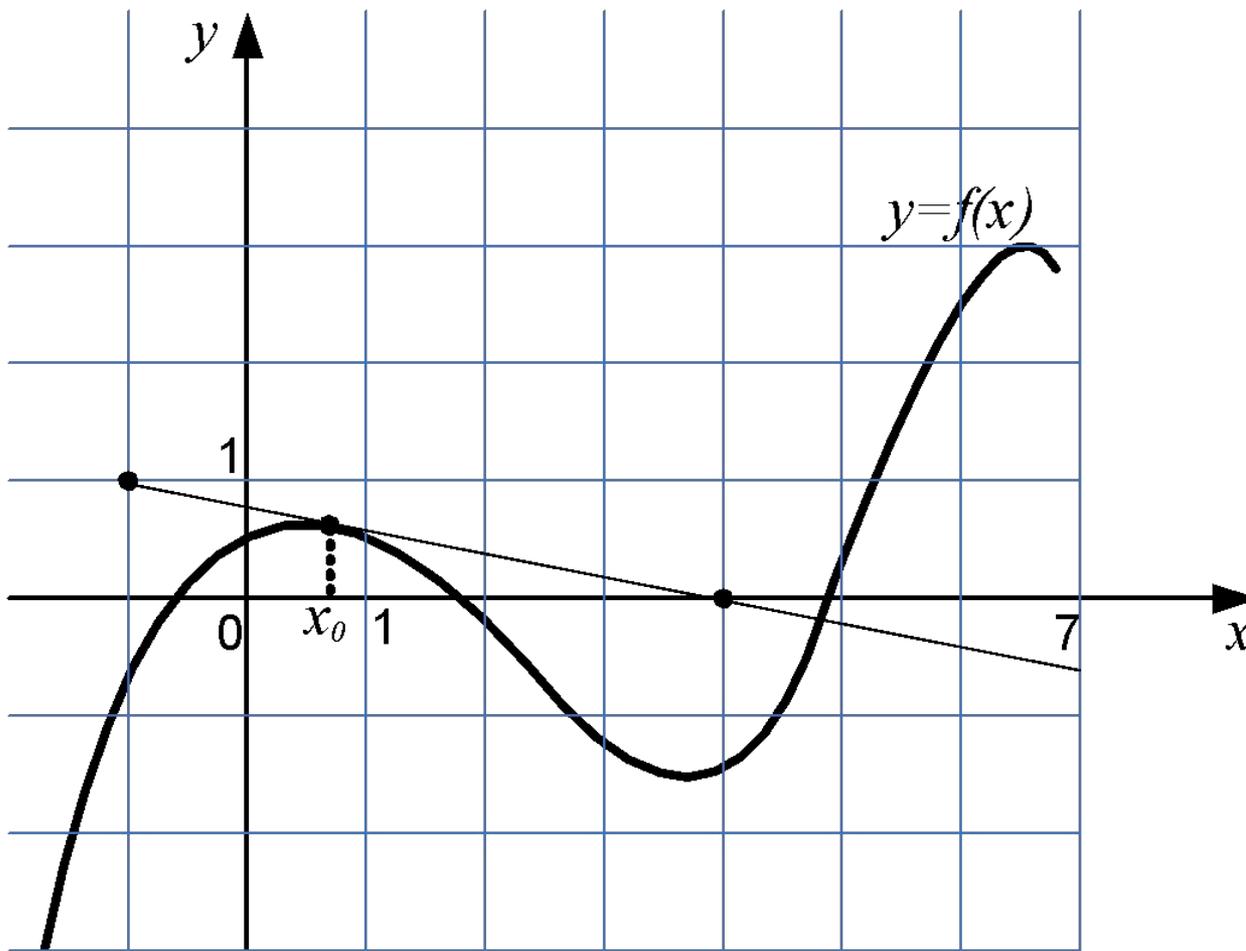
# Типы заданий

- Геометрический смысл производной
  - Касательная в точке
- Механический смысл производной
- Промежутки возрастания-убывания
- Локальные экстремумы
- Наибольшие/наименьшие значения на отрезке

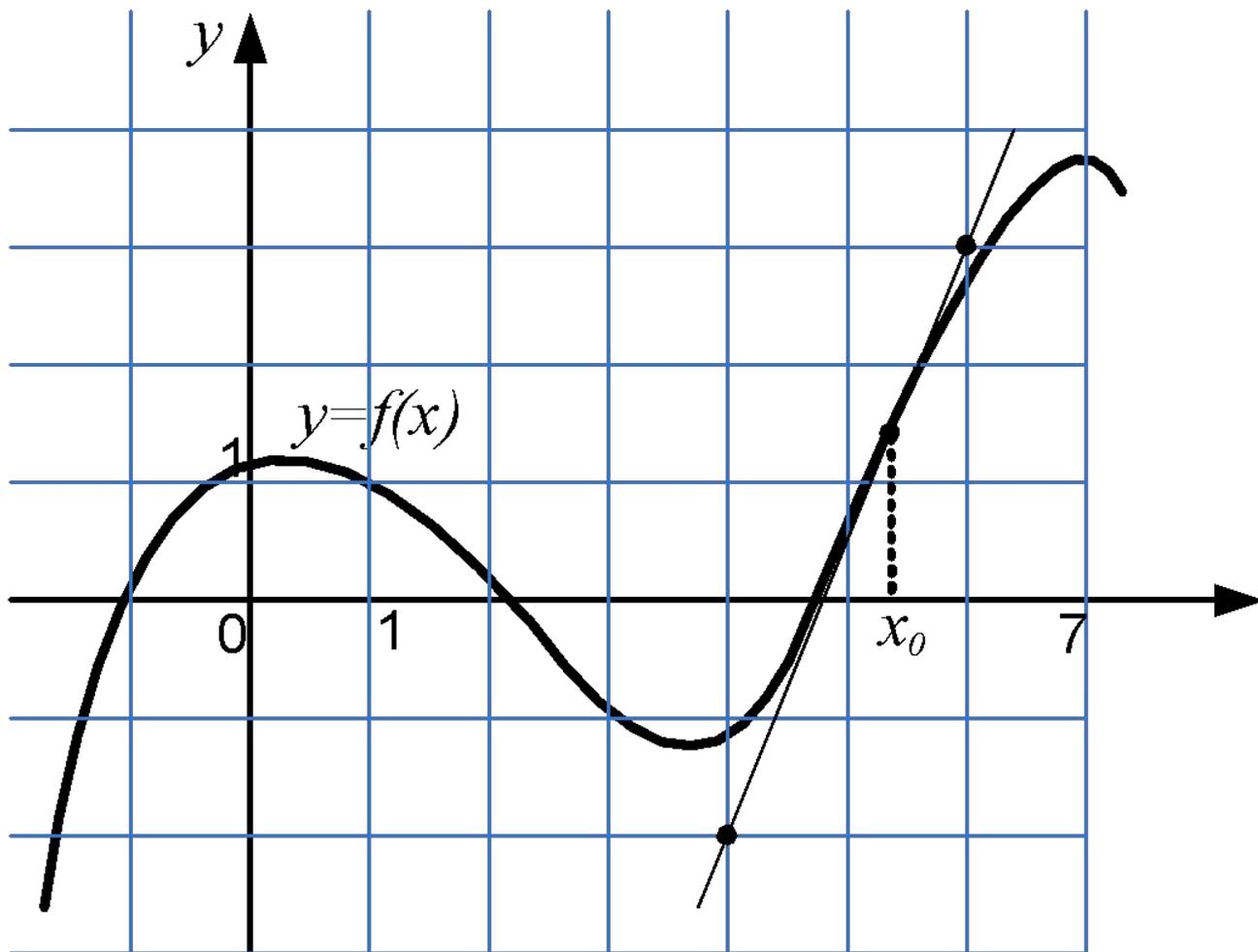
# Геометрический смысл производной (теория)

- Следующие величины равны
  - Значение производной  $f'(x_0)$  в точке  $x_0$
  - Тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y=f(x_0)$  в точке  $x_0$
  - Угловой коэффициент касательной к графику функции  $y=f(x_0)$  в точке  $x_0$

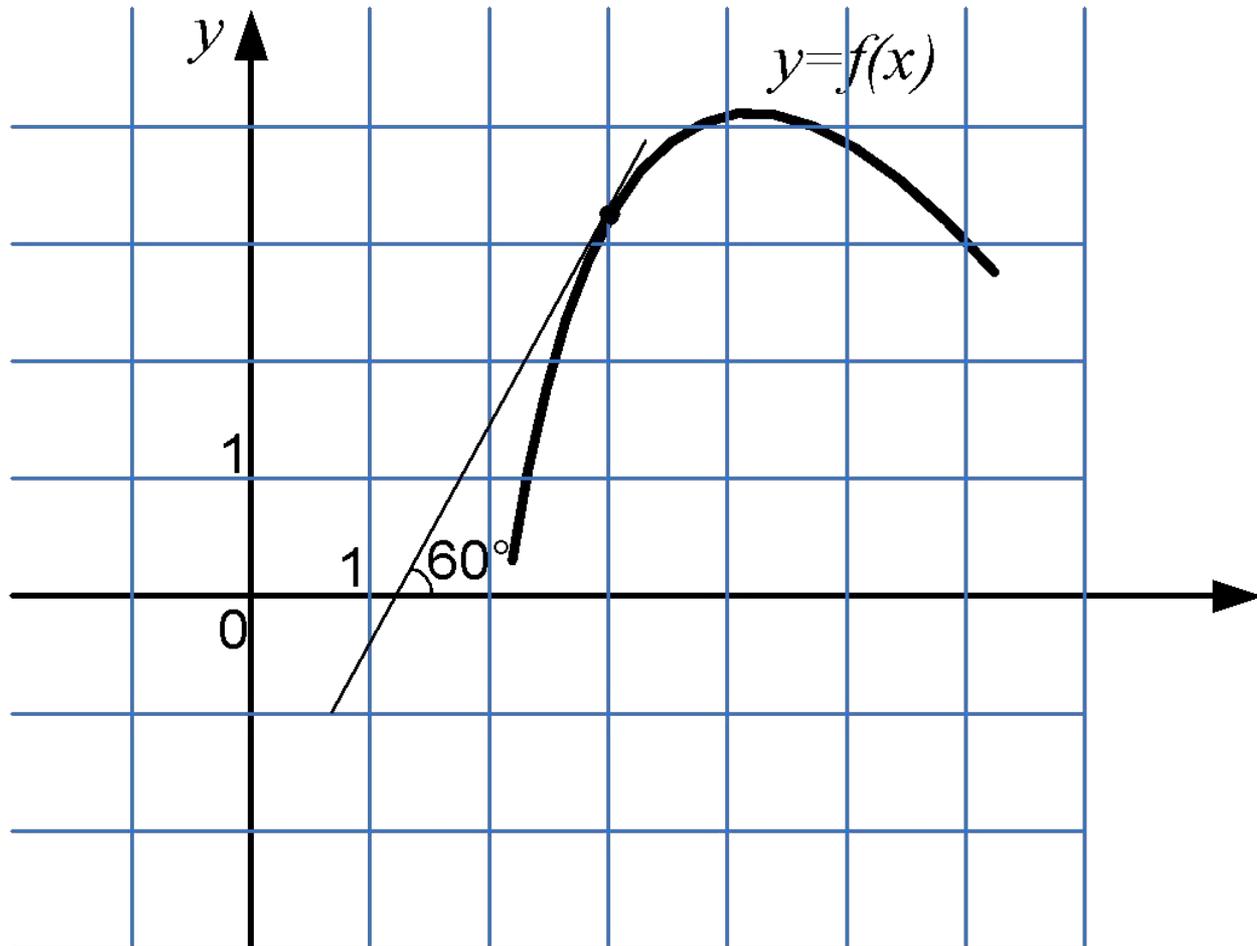
# 1. Вычислить производную



## 2. Вычислить производную

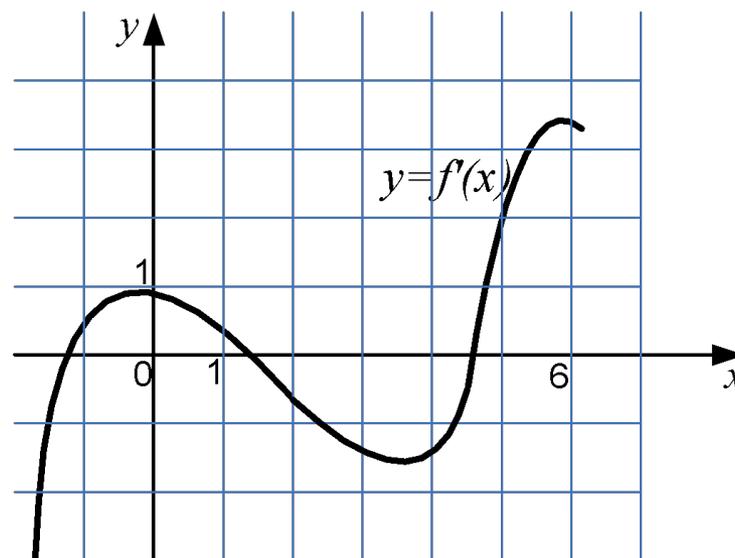


3. Вычислите величину  $\sqrt{3} f'(3)$



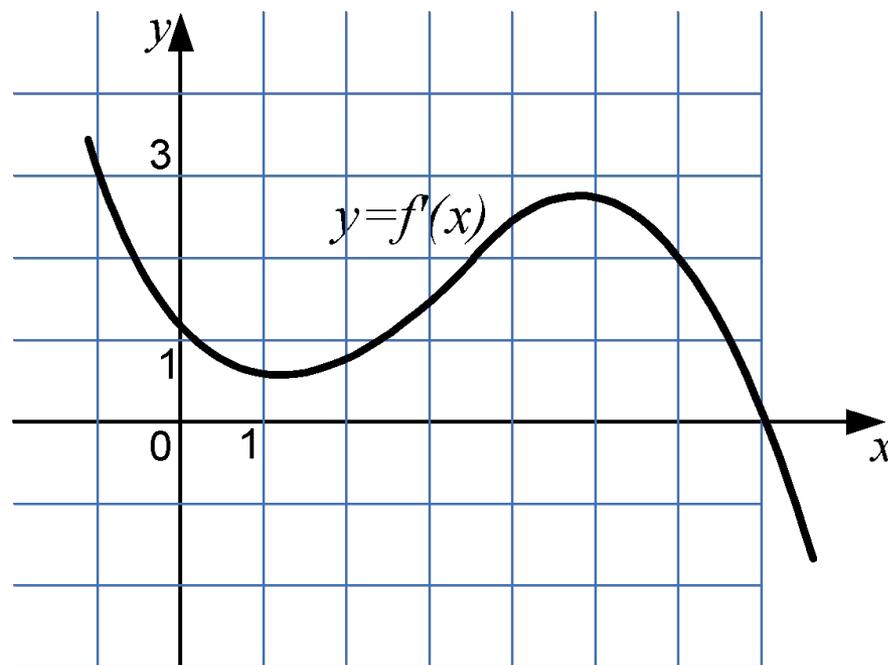
# 4. Точка касания

- На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . Прямая  $y = 2x + 1$  является касательной к графику этой функции. Найдите ординату точки касания.



# 5. Точка касания

- На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ . Прямая  $y = 3x - 4$  является касательной к графику этой функции. Найдите ординату точки касания.



# Задачи 6-8

- Касательная к графику функции  $y = 3 - 2x - x^2$  параллельна прямой  $y = 4x$ . Найдите абсциссу точки касания.
- Касательная к графику функции  $y = 3 - 2x - x^2$  проходит через точки  $A(1, 1)$  и  $B(-1, 5)$ . Найдите абсциссу точки касания
- Найдите положительное значение параметра  $b$ , при котором прямая  $y = -3$  является касательной к графику функции  $y = 2x^2 + bx - 1$ .

# Задачи 9 - 12

- Прямая  $y = x + 2$  является касательной к графику функции  $y = ax^2 - x + 6$ . Найдите  $a$ .
- Прямая  $y = 2x$  является касательной к графику функции  $y = -x^2 + 7x + c$ . Найдите  $c$ .
- Прямая  $y = kx + b$  является касательной к графику функции  $y = -x^2 + 4x - 1$  в точке  $A(1, 2)$ . Найдите  $b$ .
- Касательная к графику функции  $y = x(x - 2)$  проходит через точки  $A(1, -2)$  и  $B(-3, 6)$ . Найдите ординату точки касания

# Механический смысл производной

- Если  $s(t)$  – функция, задающая закон движения материальной точки (пройденный путь в зависимости от времени), то  $v(t)=s'(t)$  – мгновенная скорость точки

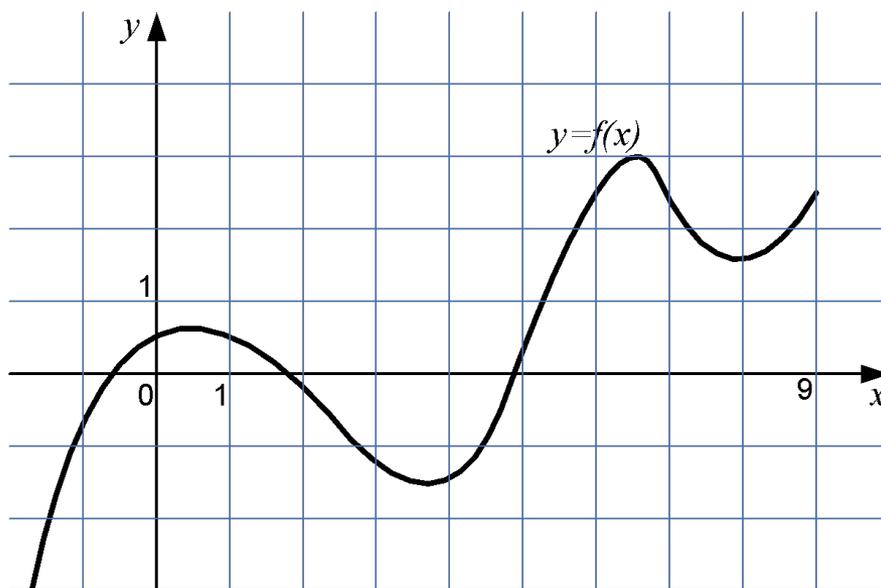
# Движение материальной точки

- Материальная точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 9t + 1$ , где  $s$  – расстояние от точки отсчета в метрах, а  $t$  – время в секундах с начала движения. Через сколько секунд после начала движения скорость точки будет равна  $3 \text{ м/с}$ ?
- Материальная точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = 6 + 2t - 0,25t^2$ , где  $s$  – расстояние от точки отсчета в метрах, а  $t$  – время в секундах с начала движения. Через сколько секунд после начала движения точка остановится?
- Материальная точка движется прямолинейно по закону  $s(t) = 4 + 2t - t^2$ , где  $s$  – расстояние от точки отсчета в метрах, а  $t$  – время в секундах с начала движения. Какова была начальная скорость точки (в м/с)?

# Промежутки возрастания-убывания

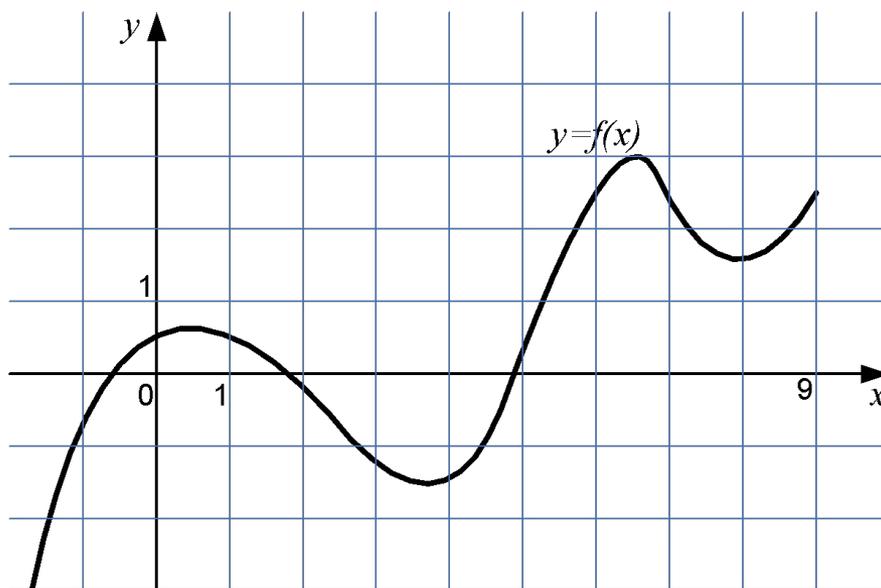
- Определение возрастающей (убывающей) функции на промежутке
- Функция является возрастающей на промежутке  $\leftrightarrow$  когда ее производная положительна в любой точке промежутка
- Функция является убывающей на промежутке  $\leftrightarrow$  когда ее производная отрицательна в любой точке промежутка

# Возрастание/убывание



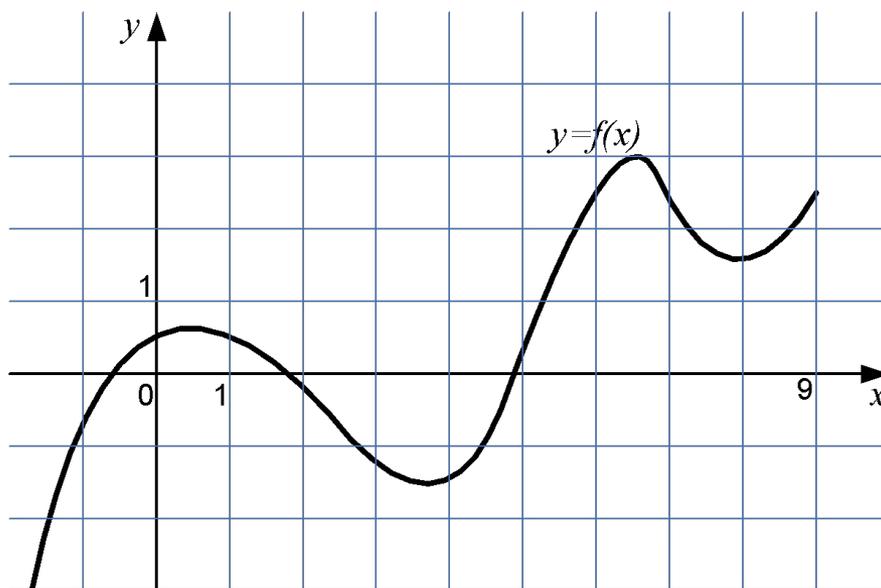
- На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ .  
Определите количество целых точек на интервале  $[-1; 9]$ , в которых производная функции отрицательна.

# Возрастание/убывание



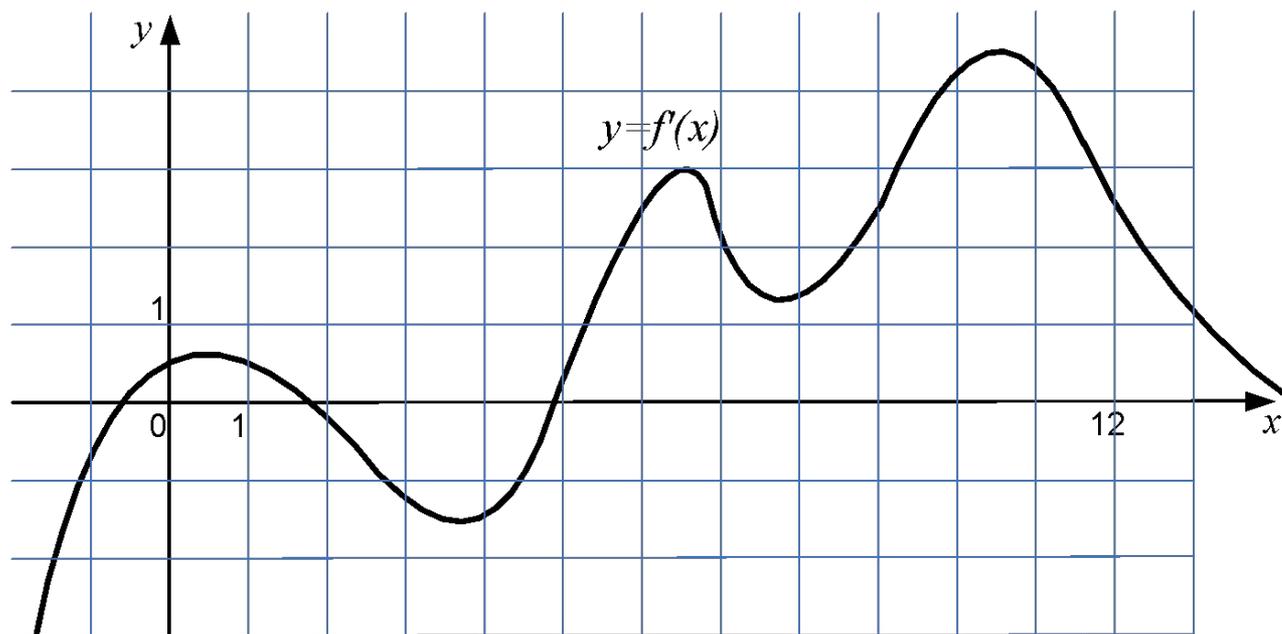
- На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ .  
Определите количество целых точек на интервале  $[0; 9]$ , в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 4$ .

# Возрастание/убывание



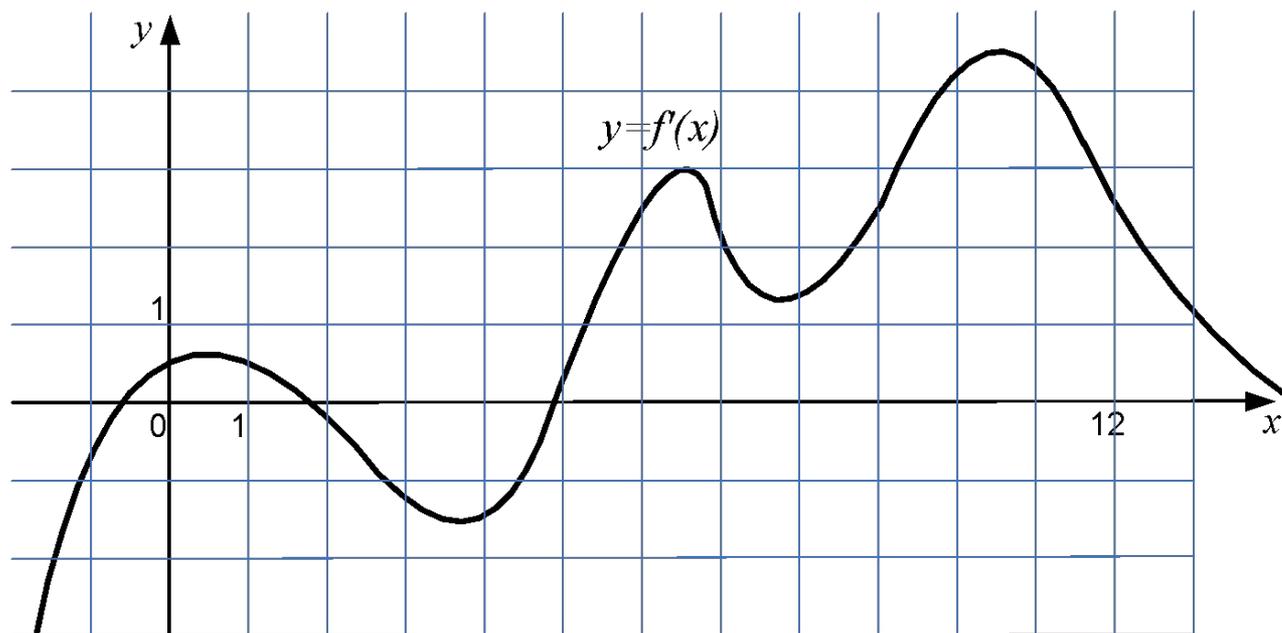
- На рисунке изображен график функции  $y=f(x)$ . Определите, в какой точке промежутка  $[5; 9]$  функция принимает наибольшее значение?

# Возрастание/убывание



- На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$ . Найдите промежутки возрастания данной функции, принадлежащие отрезку  $[-1,5; 12,5]$ . (В ответе укажите общее число целых точек на этих промежутках).

# Возрастание/убывание



- На рисунке изображен график производной функции  $y=f'(x)$ . Найдите сумму целочисленных абсцисс точек, лежащих на отрезке  $[0; 12]$ , в которых данная функция убывает.

# Возрастание/убывание

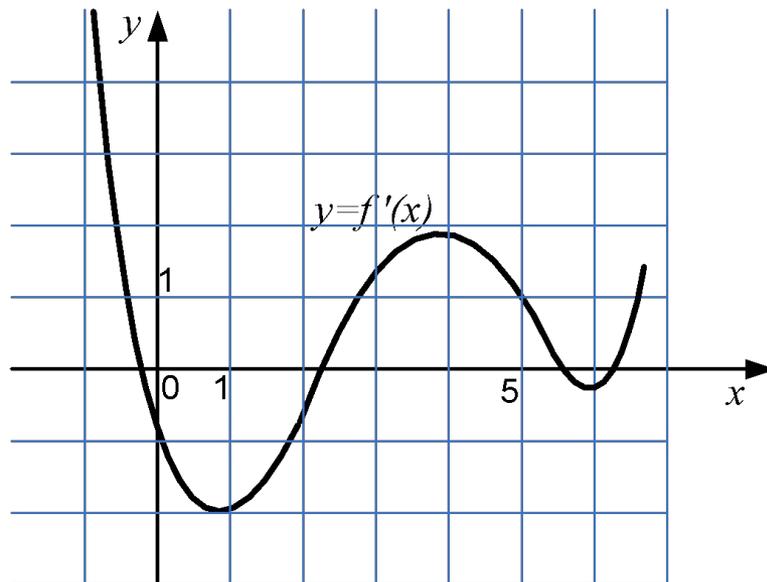
- Найдите количество промежутков убывания функции  $y=f(x)$ , если ее производная имеет вид

$$f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x - 4)^2$$

# Локальные экстремумы

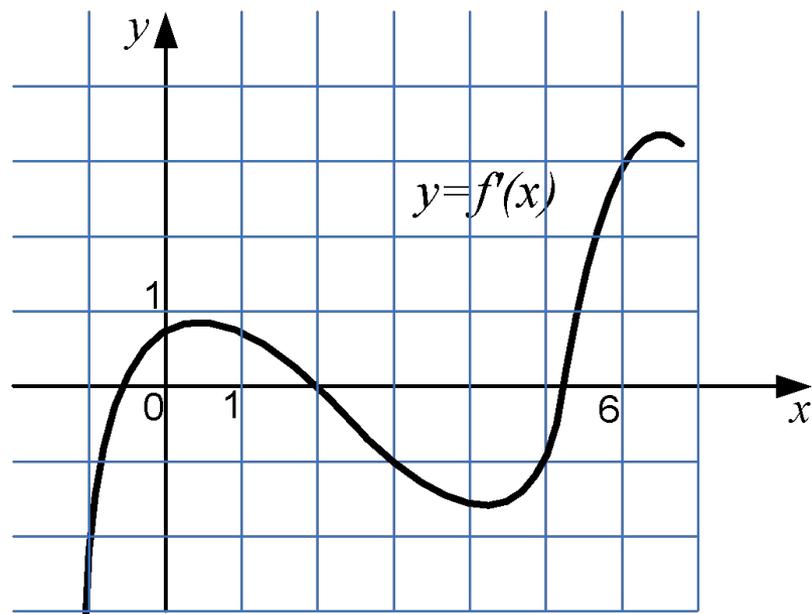
- Определение максимума (минимума) функции
- Точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $y=f(x)$ , если  $f'(x_0)=0$  и при переходе через эту точку производная меняет знак с плюса на минус.
- Точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $y=f(x)$ , если  $f'(x_0)=0$  и при переходе через эту точку производная меняет знак с минуса на плюс.

# Локальный экстремум



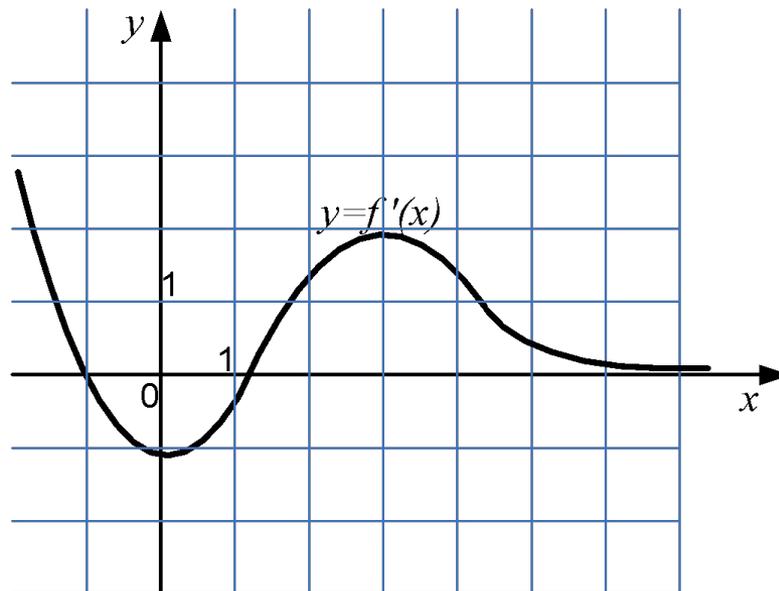
- На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$ . Найдите целое положительное число  $n$  такое, что максимум функции  $f(x)$  лежит на отрезке  $[n, n+1]$ .

# Локальный экстремум



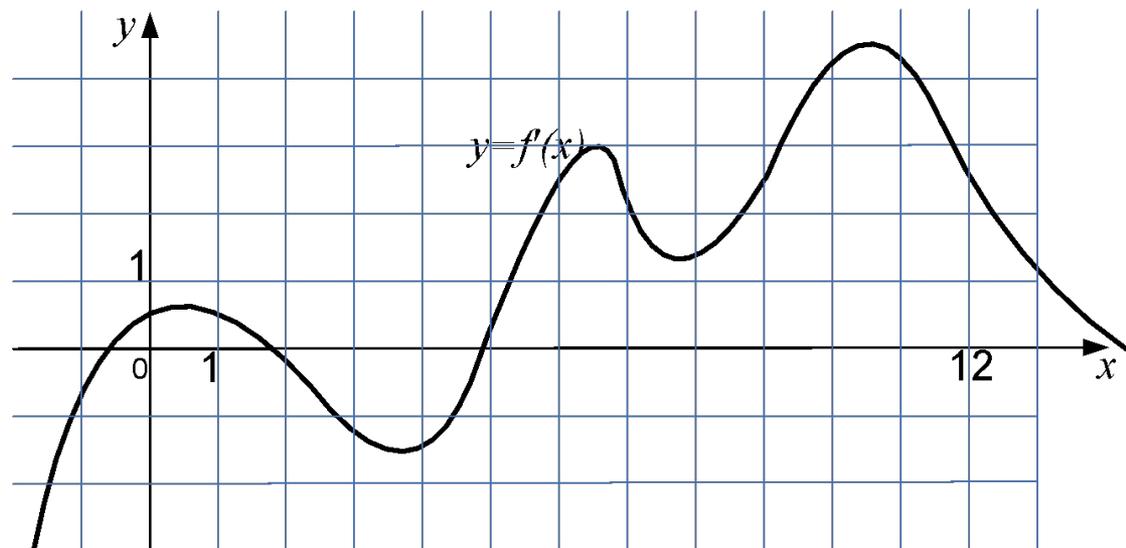
- На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$ . В точке максимума к графику функции проведена касательная, пересекающая ось  $y$  в точке с ординатой  $-1$ . Найдите сумму абсциссы и ординаты точки касания.

# Локальный экстремум



- На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$ . В точке максимума к графику функции  $f(x)$  проведена касательная, пересекающая ось  $y$  в точке с ординатой  $2,5$ . Найдите сумму абсциссы и ординаты точки касания.

# Локальный экстремум



- На рисунке изображен график производной функции  $y=f(x)$ . Сколько минимумов имеет данная функция на отрезке  $[-1; 6]$ ?

# Локальный экстремум

- Найдите количество точек максимума функции  $y=f(x)$ , если  $f'(x) = (x^2 + 3x - 4)(x^2 - 16)(x^2 - 1)$

# Экстремумы на отрезке

- Наибольшее значение функции на отрезке находится как наибольшее из локальных максимумов и значений на границах
- Наименьшее значение функции на отрезке находится как наименьшее из локальных минимумов и значений на границах

# Экстремумы на отрезке

- Найдите точку, в которой функция  $y=2x^3 + 9x^2 - 60x + 1$  принимает наибольшее значение на промежутке  $[-6; 6]$ .
- Найдите значение функции  $y=1/4x^4 - 2x^2 + 5$  в точке максимума
- Найдите наименьшее значение функции  $y=\pi/\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 2\cos x + 11$  на отрезке  $[0; \pi/2]$

# Экстремумы на отрезке

- Найдите количество целых значений  $a$ , при которых функция  $y = -x^3/3 + (a+2)x^2 - 4x + 10$  не имеет точек экстремума.
- Найдите количество целых значений функции  $y = x + 16/(x-1)$  на отрезке  $[-4; 0]$
- Найдите наименьшее значение функции  $y = 2^{2x} + 2^{x+1} - x \ln 16 + 3$  на отрезке  $[-1; 2]$
- Найдите наименьшее значение функции  $y = x|x^2 + 2x - 3| + (x-1)^2$  на отрезке  $[-2; 0]$