

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В общем виде СЛАУ можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Совокупность коэффициентов a_{ij} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, m$
системы

можно представить в виде матрицы:

$$\bar{A} = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Совокупность неизвестных $x_j, j = 1, 2, 3, \dots, m$ - в виде вектора $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$

Совокупность неизвестных $b_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ - в виде вектора $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$

Используя выше приведенные определения, запишем СЛАУ в матричном виде:

$$\vec{A} \vec{x} = \vec{b}$$

Решить СЛАУ значит найти такие значения вектора $\vec{x}^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_m^* \end{bmatrix}$

подстановка которого в систему, обращает каждое уравнение этой системы в тождество.

Классификация СЛАУ

СЛАУ называется:

1. Переобусловленной, если $n > m$
2. Недообусловленной, если $n < m$
3. Нормальной, если $n = m$
4. Однородной, если вектор $\vec{b} = \vec{0}$
5. Неоднородной, если вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$
6. Если система, имеет хотя бы одно решение, она называется совместной. Система, не имеющая решений, называется несовместной.
7. Совместная система, имеющая единственное решение, называется определенной, а имеющая бесчисленное множество решений, называется неопределенной.

Очевидно, что однородная система всегда совместна, так как имеет хотя бы одно

решение $\vec{x} = \vec{0}$, которое называется тривиальным.

Методы решения СЛАУ

Все методы решения СЛАУ можно разделить на две группы: точные и итерационные.

Точные методы позволяют получить решение путем выполнения определённого и точного количества арифметических операций. При этом погрешность решения определяется лишь точностью представления исходных данных и точностью вычислительных операций.

Итерационные методы дают некоторую последовательность приближений к решению. Пределом этой последовательности является решение системы уравнений. Решение, возможно, определить лишь с некоторой, как правило, заданной степенью точности ε . Количество итераций для достижения требуемой точности решения определяется величиной ε , выбором начального приближения и видом системы уравнений.

Точные методы

Метод обратной матрицы

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{=} \rightarrow \rightarrow & \xrightarrow{=}^{-1} \rightarrow & \xrightarrow{=}^{-1} \rightarrow & \xrightarrow{=} \rightarrow & \xrightarrow{=}^{-1} \rightarrow & \rightarrow & \xrightarrow{=}^{-1} \rightarrow & & \\ A \cdot x = b & & A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b & & E \cdot x = A^{-1} \cdot b & & x^* = A^{-1} \cdot b & & & x = \text{inv}(A) \cdot b \end{aligned}$$

Метод Гаусса

$$x = A \setminus b$$

Метод Гаусса включает два этапа.

Первый этап (прямой ход) заключается в последовательном исключении неизвестных из системы уравнений и состоит из $n-1$ шага. На первом шаге с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений начиная со второго, на втором шаге с помощью второго уравнения исключается x_2 из последующих уравнений начиная с третьего и т.д. Последним исключается x_{n-1} из последнего n -го уравнения так, что последнее уравнение будет содержать только одно неизвестное x_n . Такое последовательное исключение неизвестных равносильно приведению матрицы коэффициентов к треугольному виду. Строка, с помощью которой исключаются неизвестные, называется ведущей строкой, а диагональный элемент в этой строке – ведущим элементом.

Второй этап (обратный ход) заключается в последовательном вычислении искомым неизвестных и состоит из n шагов. Решая последнее уравнение, находим неизвестное x_n . Далее используя это значение из предыдущего уравнения вычисляем неизвестное x_{n-1} и т.д. Последним найдем неизвестное x_1 из первого уравнения.

Матрица, содержащая помимо коэффициентов при неизвестных $\overset{=}{A}$ столбец свободных членов \vec{b} , называется расширенной $\overset{=}{C} = \left[\overset{=}{A} \mid \vec{b} \right]$

= Алгоритм.

1. Строим расширенную матрицу \bar{C} размерностью n на $n+1$, приписав, справа к матрицы \bar{A}

вектор \vec{b} $\bar{C} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \vec{b} \end{array} \right]$ т.е. $c_{i,j} = a_{i,j}$, $c_{i,n+1} = b_i$, где $i=1,2,3,\dots,n$ $j=1,2,3,\dots,n$

$$\bar{C} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A} & \vec{b} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{1,2} & \dots & c_{1n} & c_{1,n+1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & c_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & c_{n,n+1} \end{array} \right] \quad \text{Задаем номер ведущей строки } k = 1$$

2. Преобразуем все строки, расположенные ниже k -ой так, чтобы элементы $c_{ik} = 0$, для этого вычисляем множитель $\beta = -c_{i,k} / c_{k,k}$ и каждую i -ую строку заменяем суммой i -ой и k -ой умноженной на β , т.е. $c_{i,j} = c_{i,j} + \beta * c_{k,j}$ где $i = k+1, k+2, k+3, \dots, n$ и $j = k, k+1, k+2, \dots, n+1$
3. Проверяем $k = n-1$ если нет, то выбираем новую ведущую строку $k=k+1$ и переходим на пункт 2, иначе выполняем пункт 4.
4. Обратный ход. Из последнего n -ого уравнения определяем последнее n -ое неизвестное. $x_n = c_{n,n+1} / c_{n,n}$ Последовательно, из предыдущих уравнений начиная с $i=n-1$, вычисляем соответствующие неизвестные x_i . Последним, определяется первое неизвестное из первого уравнение.

$$x_i = \frac{(c_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^n c_{i,j} * x_j)}{c_{i,i}}$$

Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса.

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 8.50 \\ 7.00 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 & 8.50 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 & 7.00 \end{array} \right]_{k=1}$$

$i=2$ – складываем 2^{ую} строку с 1^{ой}
умноженной на $\beta = -c_{21}/c_{11} = -2/4 = -0.5$

$i=3$ – складываем 3^{ую} строку с 1^{ой}
умноженной на $\beta = -c_{31}/c_{11} = -2/4 = -0.5$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 0.00 & 5.00 & 0.50 & 5.50 \\ 0.00 & 0.50 & 3.50 & 4.00 \end{array} \right]_{k=2}$$

$i=3$ – складываем 3^{ую} строку с 2^{ой}
умноженной на $\beta = -c_{32}/c_{22} = -0.5/5 = -0.1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4.00 & 1.00 & 1.00 & 6.00 \\ 0.00 & 5.00 & 0.50 & 5.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.45 & 3.45 \end{array} \right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные

$$x_3 = \frac{3.45}{3.45} = 1.00$$

$$x_2 = \frac{(5.50 - (0.50 \cdot 1.00))}{5.00} = 1.00$$

$$x_1 = \frac{(6.00 - (1.00 \cdot 1.00 + 1.00 \cdot 1.00))}{4.00} = 1.00$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

Для уменьшения погрешности вычислений используют **модификации метода Гаусса**, которые определяются выбором «ведущего» элемента. В модификации с частичным выбором на каждом k -м шаге прямого хода в качестве «ведущего» выбирается наибольший по модулю элемент из неприведённой части k -го столбца матрицы, т.е.

$$c_{kk} = \max_i |c_{ik}|, \quad i = k, k+1, k+2, \dots, n$$

Строка, содержащая этот элемент, переставляется с k -й строкой расширенной матрицы.

При полном выборе в качестве «ведущего» элемента выбирается максимальный по модулю элемент из всей неприведённой части матрицы коэффициентов системы:

$$c_{kk} = \max_{i,j} |c_{ij}|, \quad i, j = k, k+1, k+2, \dots, n$$

Для этого осуществляется необходимая перестановка как строк, так и столбцов в расширенной матрице коэффициентов. При этом следует помнить, что перестановка столбцов равносильна переименованию неизвестных.

•Пример. Решить СЛАУ методом Гаусса с частичным выбором.

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 6.000 & -1.000 \\ 2.000 & 1.000 & 5.000 \\ 5.000 & -1.000 & 2.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 10.000 \\ -10.000 \end{bmatrix}$$

Первый этап. Строим расширенную матрицу и преобразуем её к ступенчатому виду.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 5 & -1 & 2 & -10 \end{array} \right]$$

На первом шаге преобразования $k=1$ наибольший по абсолютной величине элемент в первом столбце (5) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем первую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \end{array} \right]$$

На втором шаге преобразования $k=2$ наибольший по абсолютной величине элемент во втором столбце (6.2) расположен в третьей строке матрицы, поэтому меняем вторую и третью строки и производим необходимые преобразования.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 1.4 & 4.2 & 14 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & 2 & -10 \\ 0 & 6.2 & -1.4 & 2 \\ 0 & 0 & 4.516 & 13.548 \end{array} \right]$$

Второй этап. Вычисляем неизвестные.

$$x_3 = \frac{13.548}{4.516} = 3 \quad x_2 = \frac{(2 + 1.4 \cdot 3)}{6.2} = \frac{6.2}{6.2} = 1$$

$$x_1 = \frac{-10 - ((-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3)}{5} = -3$$

ответ $\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений.

Если система плохо обусловлена, то это значит, что погрешности коэффициентов матрицы и свободных членов или погрешность округления при расчетах могут сильно исказить решение.

Исходную систему уравнений $\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ с учетом погрешности в векторе \vec{b}

Запишем как $\vec{A} \cdot (\vec{x} + \Delta \vec{x}) = \vec{b} + \Delta \vec{b}$ или $\vec{A} \cdot \vec{x} - \vec{b} + \vec{A} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ и тогда

$\vec{A} \cdot \Delta \vec{x} = \Delta \vec{b}$ отсюда можно выразить ошибку $\Delta \vec{x} = \vec{A}^{-1} \cdot \Delta \vec{b}$

Абсолютная погрешность определим, как норму ошибки $\|\Delta \vec{x}\| = \|\vec{A}^{-1} \cdot \Delta \vec{b}\|$ или $\|\Delta \vec{x}\| \leq \|\vec{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \vec{b}\|$

Определим относительную погрешность $\frac{\|\Delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{\|\vec{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta \vec{b}\|}{\|\vec{x}\|}$

Определим $\frac{1}{\|\vec{x}\|}$

из исходной системы $\vec{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ получим $\|\vec{A}\| \cdot \|\vec{x}\| \geq \|\vec{b}\|$

далее определим

$$\frac{1}{\|\vec{x}\|} \leq \frac{\|\vec{A}\|}{\|\vec{b}\|}$$

и подставим в определение относительной погрешности получим

$$\frac{\|\Delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|\vec{A}\|^{-1} \cdot \|\vec{A}\| \cdot \frac{\|\Delta \vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Вводим понятие числа обусловленности:

$$K_{об} = \text{Cond}(\vec{A}) = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{A}\|^{-1}$$

и тогда

$$\frac{\|\Delta \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq K_{об} \cdot \frac{\|\Delta \vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$$

Метод простых итераций

Алгоритм метода состоит из трёх этапов.

Первый этап. Приведение СЛАУ к итерационному виду, для этого разрешим каждое уравнение относительно соответствующего неизвестного:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \left(0x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \right)$$

$$x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \left(\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + 0x_2 + \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n \right)$$

$$\dots$$

$$x_n = \frac{d_n}{a_{nn}} - \left(\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 + \frac{a_{n3}}{a_{nn}}x_3 + \dots + 0x_n \right),$$

$$\text{где } d_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i = j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Тогда итерационную формулу запишем в виде:

$$\vec{x} \rightarrow^k = \vec{d} - \vec{C} \cdot \vec{x} \rightarrow^{k-1}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

где \vec{d} – приведенный столбец свободных членов,
 C = матрица приведенная матрица коэффициентов.

Второй этап. Проверяем условие сходимости $\| \bar{C} \| \leq 1$

если условие не выполняется, то преобразуем исходную систему и выполняем 1-й этап.

Третий этап. Осуществляем уточнение решения по полученной итерационной формуле.

$$\vec{x}^k = \vec{d} - C \cdot \vec{x}^{k-1} \quad ; \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{За начальное приближение принимается } \vec{x}^0 = \vec{d}$$

Условием окончания итерационного процесса является выполнение условия

$$\| \vec{x}^k - \vec{x}^{k-1} \| \leq \varepsilon$$

где величина ε определяет точность получаемого решения

а \vec{x}^k и \vec{x}^{k-1} – смежные приближения к решению.

Пример. Решить СЛАУ методом простых итераций $\varepsilon=0.4$

$$\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 1.00 \\ 2.00 & 5.50 & 1.00 \\ 2.00 & 1.00 & 4.00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.00 \\ 8.50 \\ 7.00 \end{bmatrix}$$

Преобразуем исходную систему к итерационному виду.

$$\vec{x}^k = \vec{d} - \bar{C} \cdot \vec{x}^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix} \quad \|\bar{C}\| = 0.78 \leq 1$$

$$\vec{d} = \begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix} \quad \vec{x}^0 = \vec{d}$$

$\vec{x}^{(k)}$	\vec{d}	\vec{C}	$\vec{x}^{(k-1)}$	$\vec{x}^{(k)}$	$\vec{\Delta x}$	$\ \vec{\Delta x}\ $					
$\vec{x}^{(1)}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix}$	$-$	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$	\cdot	$\begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0.68 \\ 0.68 \\ 0.61 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -0.82 \\ -0.86 \\ -1.14 \end{bmatrix}$	1.65
$\vec{x}^{(2)}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix}$	$-$	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$	\cdot	$\begin{bmatrix} 0.68 \\ 0.68 \\ 0.61 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.19 \\ 1.24 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.51 \\ 0.63 \end{bmatrix}$	0.95
$\vec{x}^{(3)}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix}$	$-$	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$	\cdot	$\begin{bmatrix} 1.18 \\ 1.19 \\ 1.24 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.89 \\ 0.86 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} -0.28 \\ -0.30 \\ -0.38 \end{bmatrix}$	0.56
$\vec{x}^{(4)}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.50 \\ 1.55 \\ 1.75 \end{bmatrix}$	$-$	$\begin{bmatrix} 0.00 & 0.25 & 0.25 \\ 0.36 & 0.00 & 0.18 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \end{bmatrix}$	\cdot	$\begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.89 \\ 0.86 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 1.06 \\ 1.06 \\ 1.08 \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} 0.17 \\ 0.17 \\ 0.22 \end{bmatrix}$	0.32

Ответ: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1.06 \\ 1.06 \\ 1.08 \end{bmatrix}$