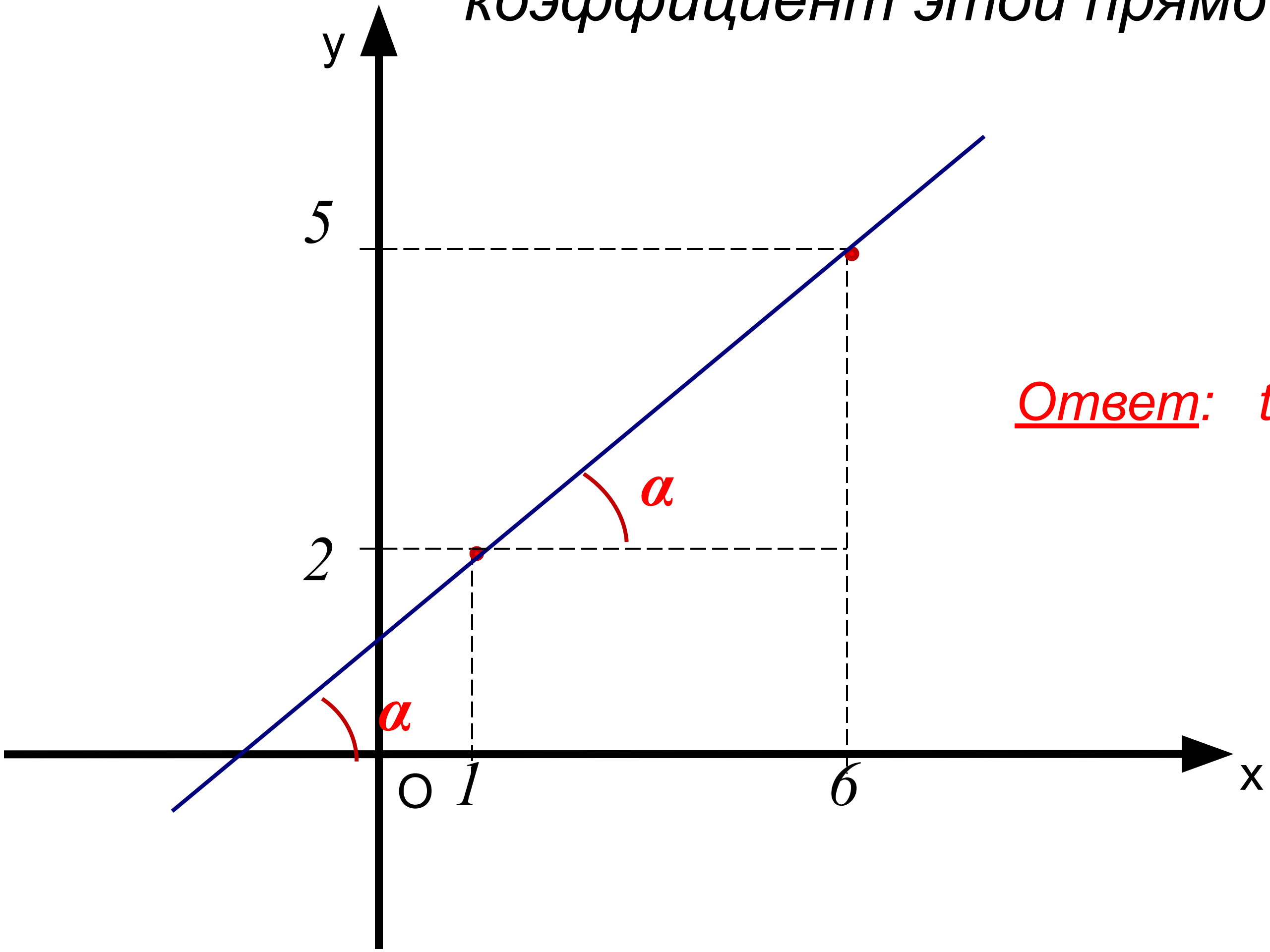
Устные упражнения

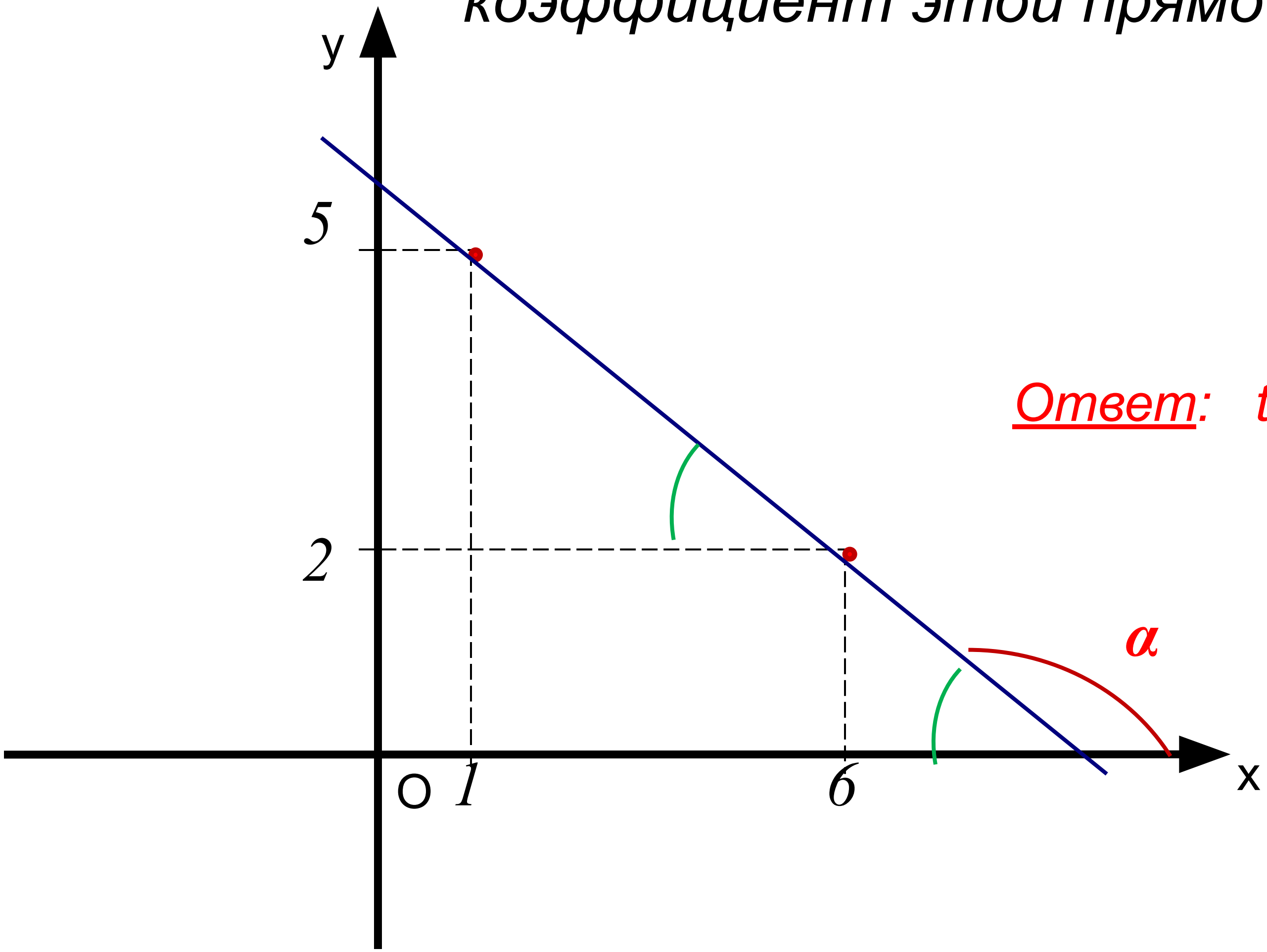
Найдите тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс и угловой коэффициент этой прямой



Ответ: $tg\alpha = 0{,}6$; $k = 0{,}6$.

Устные упражнения

Найдите тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс и угловой коэффициент этой прямой

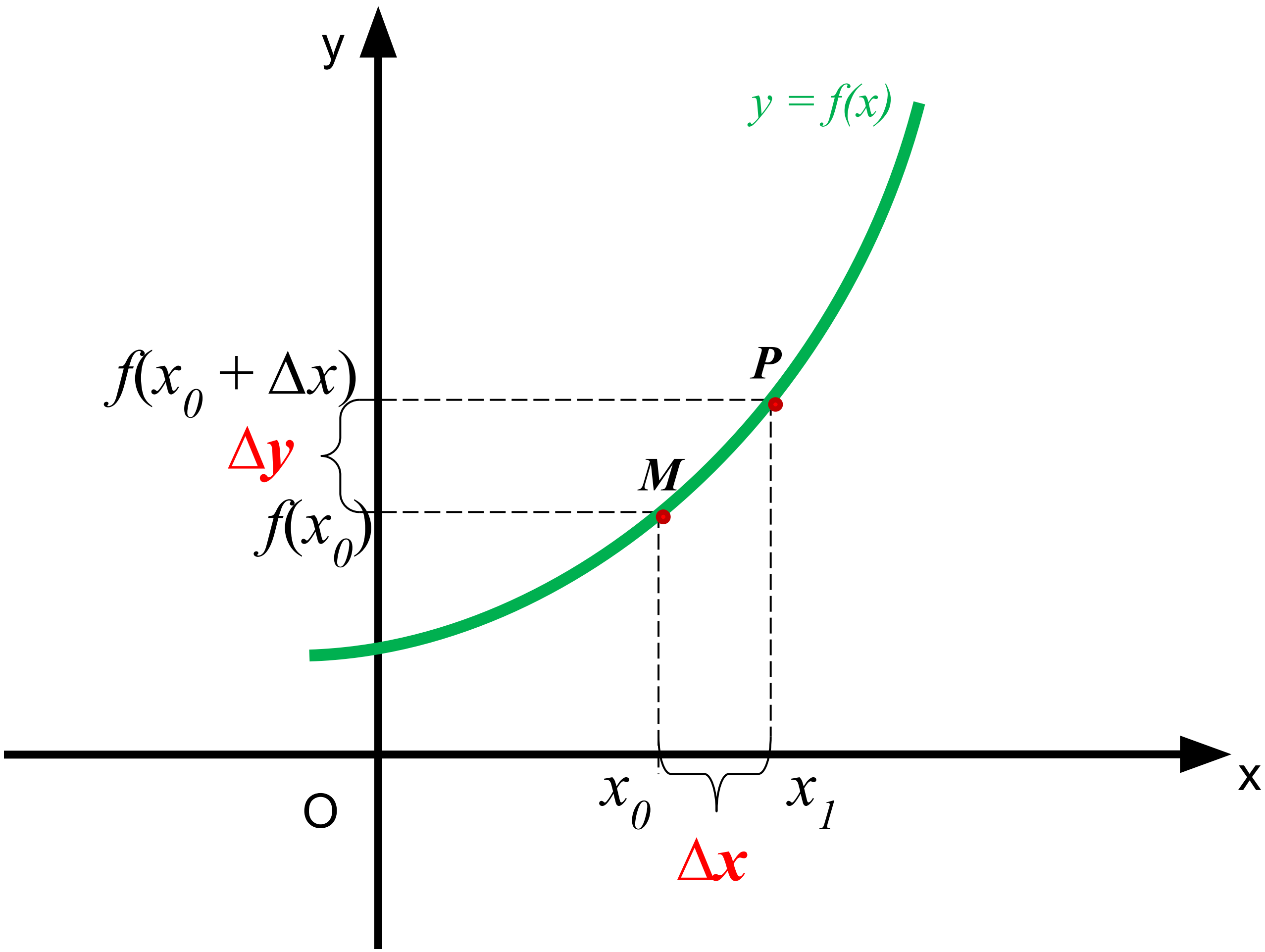


Ответ: tgα = -0,6; k = -0,6.

Определение 2

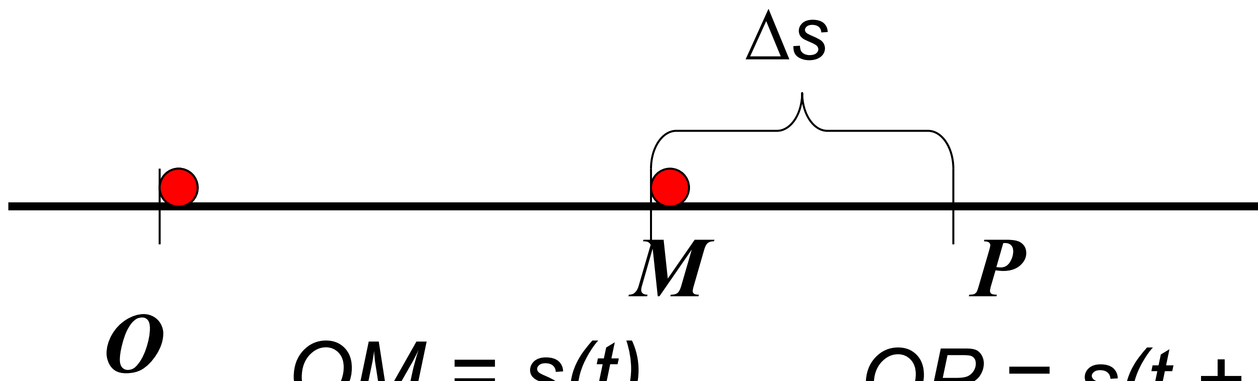
$\Delta x = x_1 - x_0$ – приращение аргумента

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ - приращение функции



Задача 1

$$s = s(t)$$



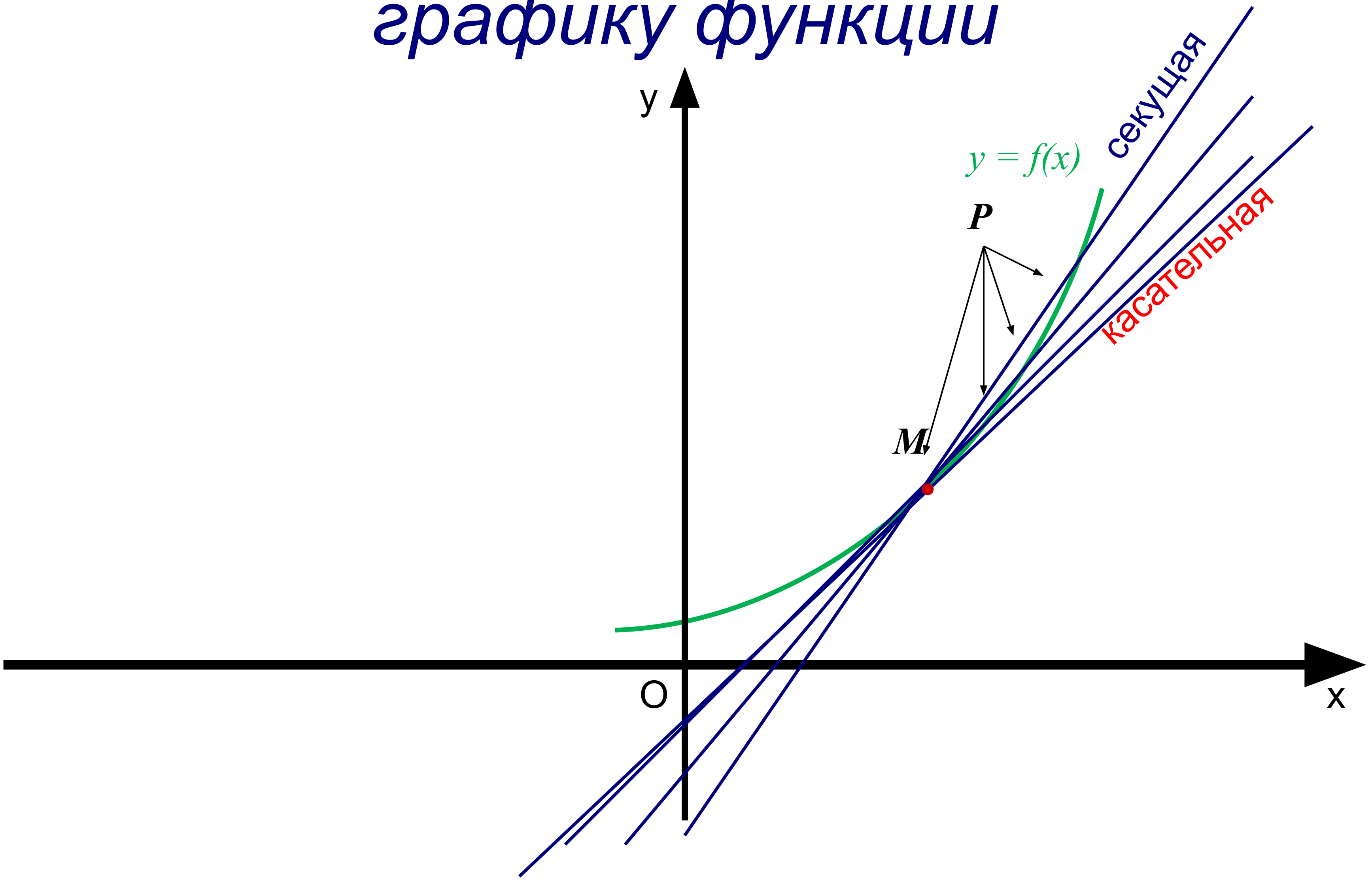
$$OM = s(t) \qquad OP = s(t + \Delta t)$$

$$MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t) = \Delta s$$

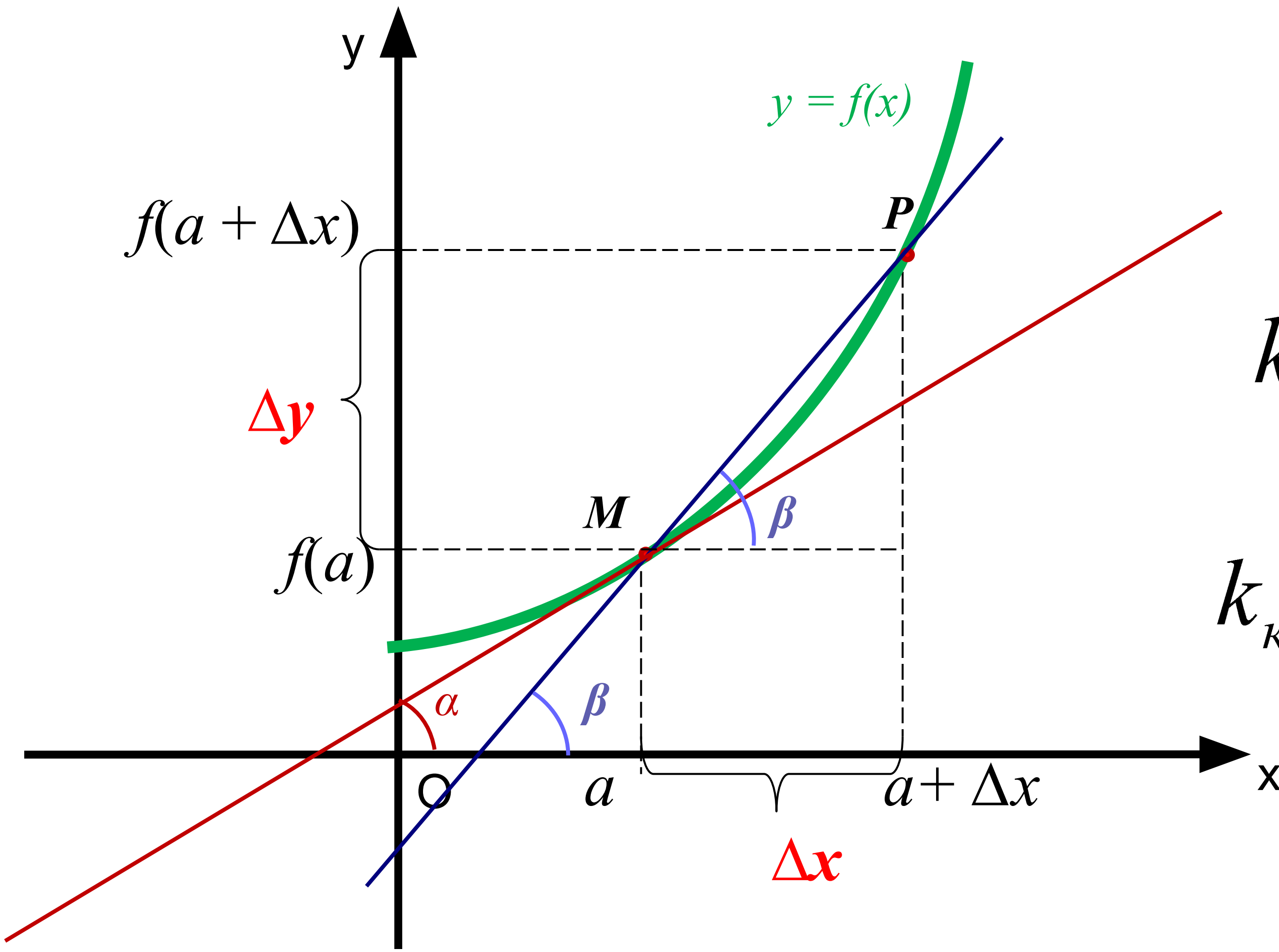
$$v_{ср.} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(м / с\right)$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(м / с\right)$$

Определения секущей и касательной к графику функции



Задача 2
(о касательной к графику функции).



$$k_{сек.} = tg\,\beta$$

$$k_{сек.} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

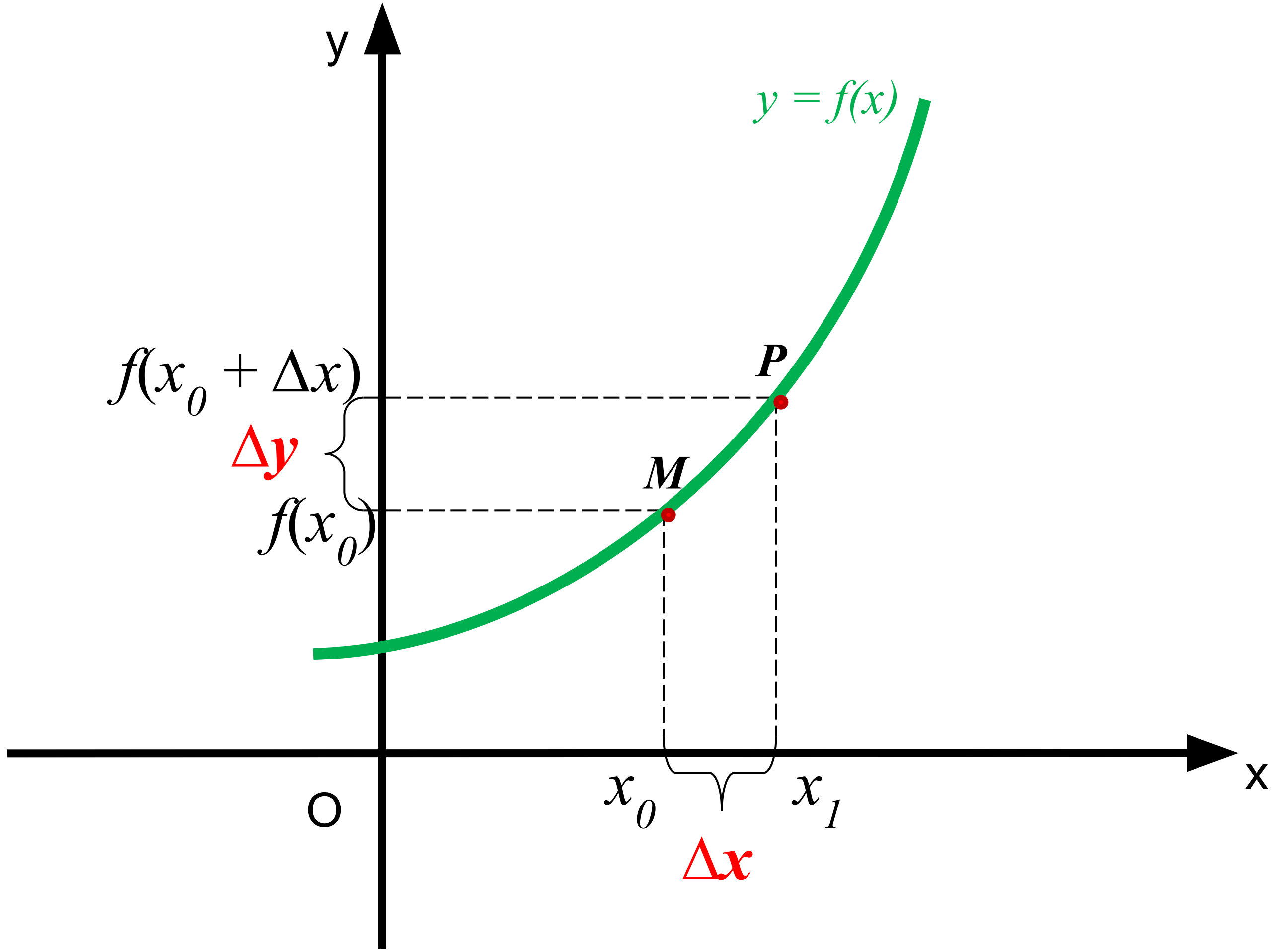
$$k_{кас.} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек.}$$

$$k_{кас.} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$k_{кас.} = tg\,\alpha$$

Определение.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



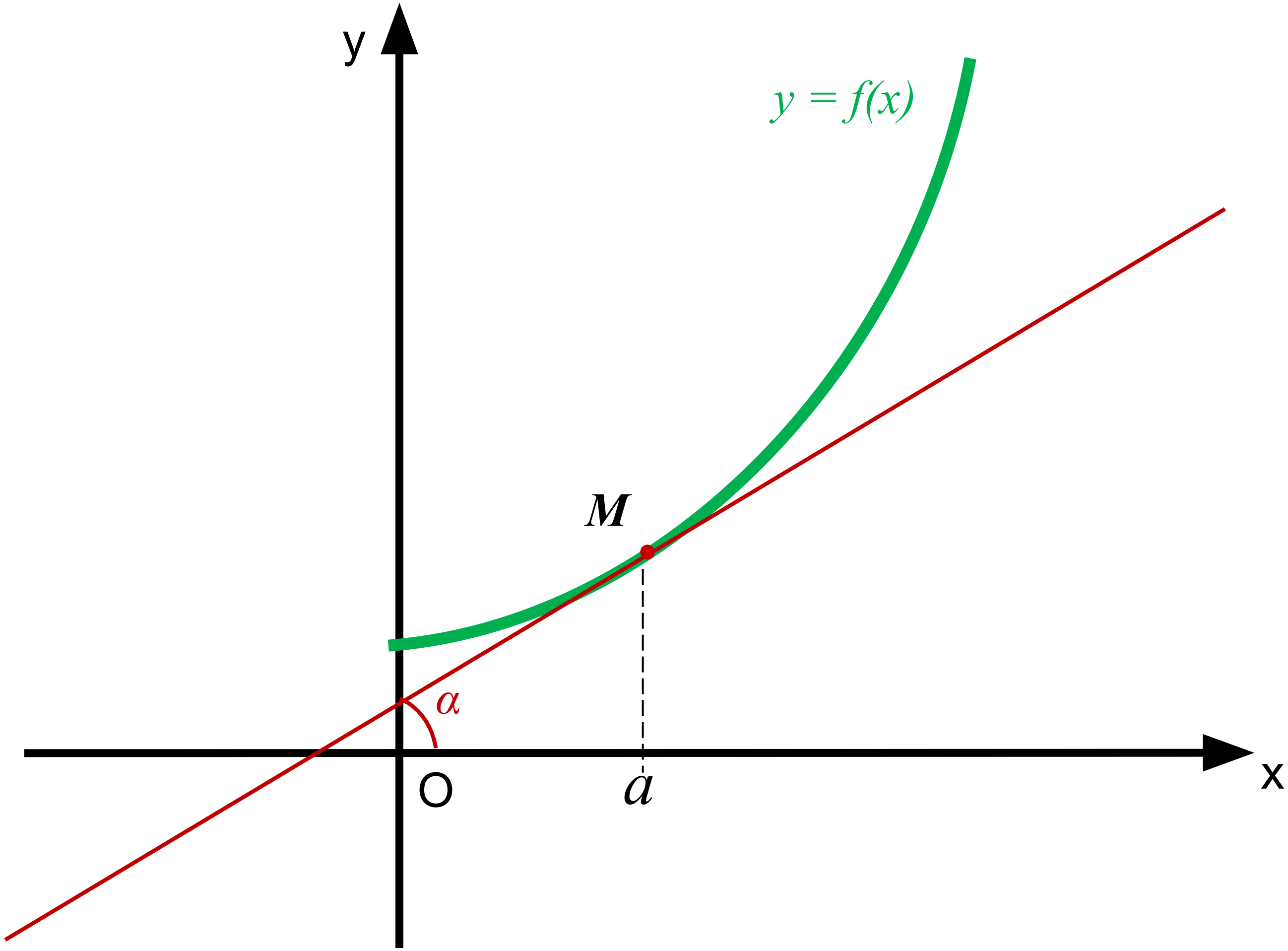
Физический смысл производной

$s = s(t)$

$$v(t) = s'(t)$$

Геометрический смысл производной

$$f'(a) = k_{кас.} = tg\alpha$$



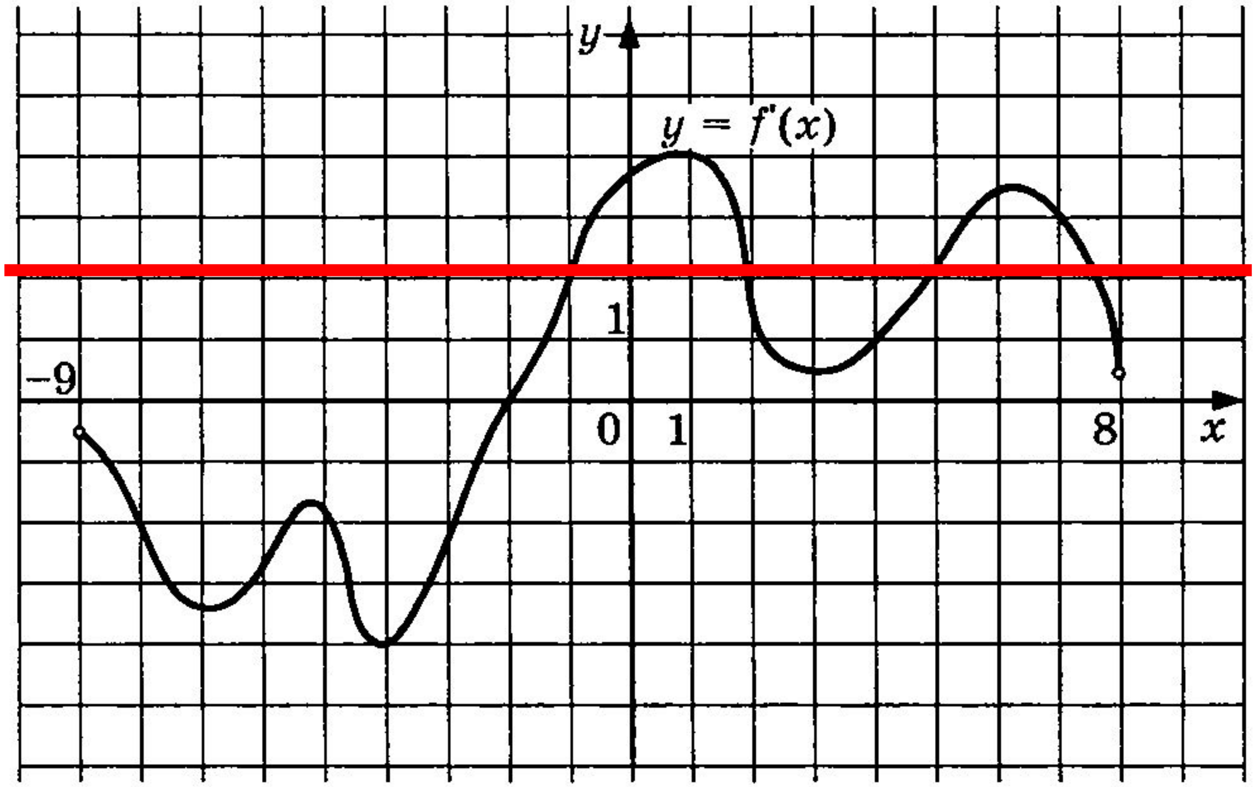
Алгоритм нахождения производной функции y = f(x)

1. *Зафиксировать значение x, найти f(x).*
2. *Дать аргументу приращение Δx, перейти в новую точку x + Δx, найти f(x + Δx).*
3. *Найти приращение функции Δy = f(x + Δx) - f(x).*
4. *Составить отношение* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. *Вычислить* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть f’(x).

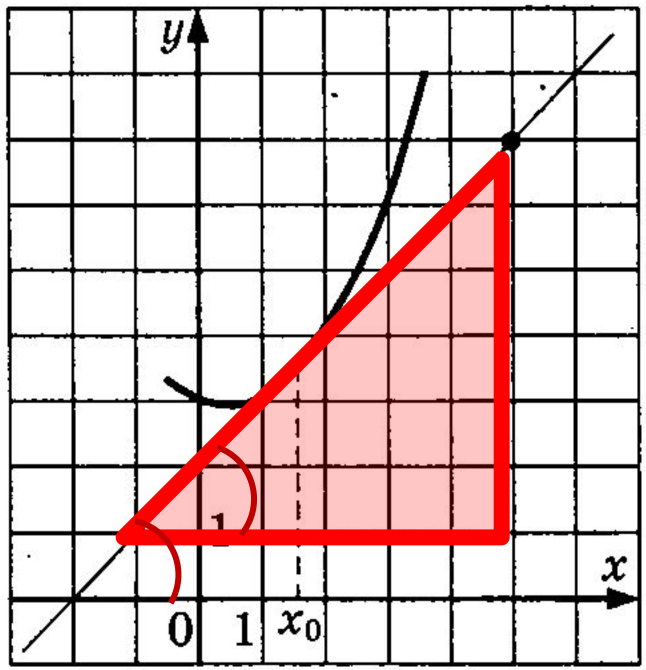
Примеры применения геометрического смысла производной.

1679. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;\ 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



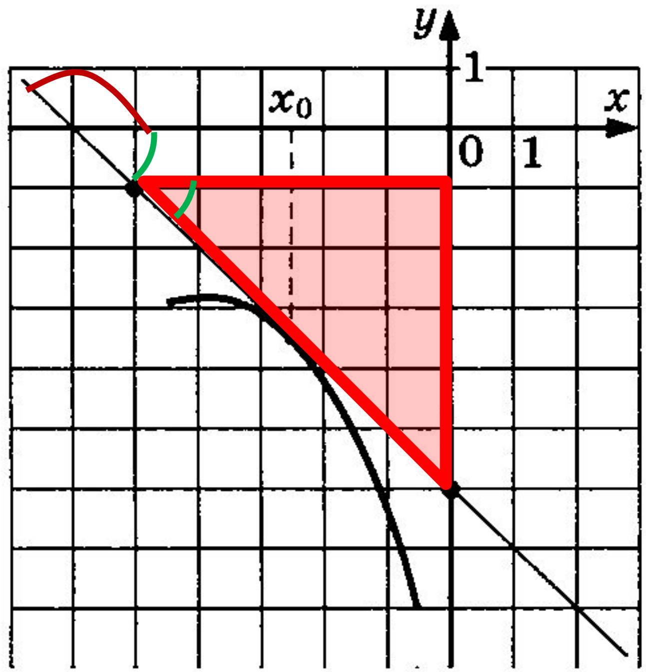
Ответ: 4.

1872. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: 1

1896. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: -1

Формулы дифференцирования

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$\left(kx + m\right)' = k$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Таблица производных функций

1. $(C)' = 0.$

2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$

3. $(a^{x})' = a^{x} \cdot \ln a,$

$(e^{x})' = e^{x}.$

4. $(\log_{a} x)' = \dfrac{1}{x \ln a},$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}.$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}.$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}.$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^{2}}}.$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^{2}}.$

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^{2}}.$

Правила вычисления производных

Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то

$$1.\ (U + V)' = U' + V'$$

$$2.\ (UV)' = U'V + UV'$$

$$3.\ \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Если функция U дифференцируема в точке x_0, а С- постоянная, то $(CU)' = CU'$

Решение задач

Найти производную функции

Пример №1

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x.$$

Решение: Применяя правила вычисления производной алгебраической суммы функций, вынесения постоянного множителя за знак производной и формулу производной степени получим

$$y' = (x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x^2)' - (7x)' =$$
$$= (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x^2)' - 7(x') = 5x^4 - 12x^2 + 4x - 7.$$

Общая формула производной степенной функции:

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}.$$

Производная от x равна 1, следовательно 7*1 и получаем просто 7

Пример №2

Найти производную функции

$y=(1-x^3)(x^4+4x).$

Решение: Применим правило дифференцирования произведения, а затем найдём производные сомножителей, так же, как в предыдущей задаче, пользуясь формулой 3 из таблицы производных. Тогда получим

$$y'=\left[(1-x^3)(x^4+4x)\right]'=(1-x^3)'(x^4+4x)+(x^4+4x)'(1-x^3)=$$

$$=-3x^2(x^4+4x)+(4x^3+4)(1-x^3)=-7x^6-12x^3+4.$$

Общая формула производной степенной функции:

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Общая формула дифференцирования произведения:

$$(U+V)'=U'+V'$$

Пример №3

Найти производную функции

$$\frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

Решение: Применим правило дифференцирования частного:

$$y' = \frac{(1-x^2)(1+x^2)' - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}.$$

Затем, так же как и выше, вычислим производные в числителе. Имеем

$$y' = \frac{(1-x^2)2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}.$$

Общая формула производной степенной функции:

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Общая формула дифференцирования частного:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

Пример № 4

Найти производную функции

Cos (5x – 3)

Находим для начала производную от функции ***cos x***, она будет равна ***– sin x.***

Так как у нас под знаком ***cos*** стоит функция следовательно мы должны найти производную от функции **f (*5x – 3)***. Она будет равна 5 по формуле дифференцирования линейной функции. F’(5x – 3) = 5 (***формула f’(kx – b) = k***) Следовательно ***f’(cos (5x – 3) = - 5 sin (5x – 3)***

Пример № 5

Найти производную функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 7}$$

Для начала перепишем корень в виде степени с рациональным показателем:

$$f(x) = (x^2 + 8x - 7)^{0,5}$$

Теперь делаем замену: пусть $x^2 + 8x - 7 = t$. Находим производную по формуле:

$$f'(x) = f'(t) \cdot t' = (t^{0,5})' \cdot t' = 0,5 \cdot t^{-0,5} \cdot t'$$

Делаем обратную замену: $t = x^2 + 8x - 7$. Имеем:

$$f'(x) = 0,5 \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5} \cdot (x^2 + 8x - 7)' = 0,5 \cdot (2x + 8) \cdot (x^2 + 8x - 7)^{-0,5}$$

Наконец, возвращаемся к корням:

$$f'(x) = \frac{0,5 \cdot (2x+8)}{\sqrt{x^2+8x-7}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x-7}}$$