Тема: Основные понятия теории множеств

Множество – совокупность объектов (элементов), объединенных по некоторому признаку. В зависимости от числа элементов множества различают как конечные или бесконечные. Множество, не содержащее элементов, называют пустым ($\varnothing$).

Говоря о множестве X, полагают, что для объекта имеются 2 возможности: или он является его элементом ($x \in X$); или нет ($x \notin X$).

Способы задания множества:

1) перечисление всех элементов множества

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$;

2) указание общего свойства, которым обладают все элементы множества

$A = \{a \mid B(a)\}$.

Например, множество четных натуральных чисел

1) $X = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ или

2) $X = \{ x \mid x = 2 \cdot n$ для каждого $n \in N\}$.

N - множество натуральных чисел

$\{1, 2, 3, ...\}$

Z - множество целых чисел $\{..., -1, 0, 1, ...\}$

Q - множество рациональных чисел;

$\{..., -\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, ...\}$

R - множество действительных чисел

$(-\infty, \infty)$

Операции над множествами

Множество A называют **подмножеством** множества B ($A \subset B$), если каждый элемент A является также элементом множества B.

Множество всех студентов факультета, подмножество – студенты ОЗО.

Множества A и B называют **равными** ($A = B$), если каждый элемент множества A является одновременно элементом B и наоборот, т.е. если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Множество $\boldsymbol{I}$ называется **универсальным** для некоторой системы множеств, если каждое множество системы является подмножеством $\boldsymbol{I}$,

т.е. $A \subset \boldsymbol{I}$, $B \subset \boldsymbol{I}$, $C \subset \boldsymbol{I}$ ...

Дополнением множества А (обозначают $\bar{A}$) называют множество, состоящее из тех элементов универсального множества, которые не входят в множество А.

<u>Суммой</u> <u>(объединением)</u> двух множеств А и В (**А** + **В** или **А** U **В**) называется множество С, состоящее из тех элементов, которые принадлежат или множеству А, или В, или А и В одновременно.

<u>Произведением</u> <u>(пересечением)</u> двух множеств А и В (**А** · **В** или **А** ∩ **В**) наз. множество С, состоящее только из тех элементов, которые принадлежат множествам А и В одновременно.

Разностью двух множеств А и В (**А - В** или **А \ В**) наз. множество тех элементов множества А, которые не принадлежат множеству В.

Непересекающиеся множества $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$.

Мощностью (длиной, размерностью) множества называют число его элементов.

Прямым (декартовым) произведением $A \times B$ множеств А и В называют множество, содержащее все пары элементов, в которых на первом месте стоит элемент из А, на втором - элемент из В.

(Рене Декарт,трактат *Рассуждение о методе,* 1637г.).

Пример. Заданы множества: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 2, 4, 5\}$. Найти $A \cap B$; $A \cup B$; $A \times B$; $B \times A$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ и их мощность.

Решение: Множества A и B состоят из пяти и четырёх элементов, соответственно их мощность: $|A| = 5$, $|B| = 4$.

Объединение (U) множеств состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4, 5\}$ и $|A \cup B| = 7$.

Пересечение ($\cap$) множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов:

$A \cap B = \{0, 2\}, |A \cap B| = 2.$

Разность множеств A и B состоит из элементов A, которые не принадлежат множеству B:

$A \setminus B = A - B = \{-2, -1, 1\}; |A \setminus B| = 3.$

Аналогично $B \setminus A = B - A = \{4, 5\}; |B \setminus A| = 2.$

Прямое (декартово) произведение:

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(-2, 0); (-2, 2); (-2, 4); (-2, 5); (-1, 0);$
$(-1, 2); (-1, 4); (-1, 5); (0, 0); (0, 2); (0, 4); (0, 5);$
$(1, 0); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 5)\}.$

$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = \{(0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, -2);$
$(2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (4, -2); (4, -1); (4, 0);$
$(4, 1); (4, 2); (5, -2); (5, -1); (5, 0); (5, 1); (5, 2)\}.$

Из примера видно, что $A \times B \neq B \times A$, но при этом

$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 5 \times 4 = 20.$

Пример.

Заданы множества A={2; 6; -6}; B ={4; -4} ,

тогда декартовым произведением множеств A×B является…

Варианты ответов:

1. {(4, 6), (6, 4), (6, -4), (-6, -4), (4, -6), (-4, 2)}	**2**. {-6, -4, 2, 4, 6}
3. {Ø}	**4**.{(2, 4), (2, -4), (6, 4), (6, -4), (-6, 4), (-6, -4)}

Ответ: пункт № **4**.

<u>Пример</u>:

Если бинарное отношение задано неравенством: $\mathbf{x + 3y \le 0}$, то данному отношению принадлежит следующая пара действительных чисел …

<u>ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:</u>

1) (-1, 1) **2)** (0, 0) **3)** (1, 3) **4)** (2, 2)

<u>Ответ:</u> пункт № **2**.

Пример:

Заданы множества $C = \{1; 2; 3; 4\}$ и $D = \{1; 2; 3\}$.

Верными для них являются утверждения…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) «Множество D есть подмножество множества C»

2) «Множества C и D не равны»

3) «Множество C есть подмножество множества D»

4) «Множество C конечно»

5) «Множество D конечно»

Ответ: верны все утверждения, кроме пункта № **3**.

Пример:

Если А есть множество **нечетных** натуральных чисел, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, то количество элементов множества $A \cap B$ равно …

Ответ: $A \cap B = \{1, 3, 5, 7\}$ – четыре элемента.

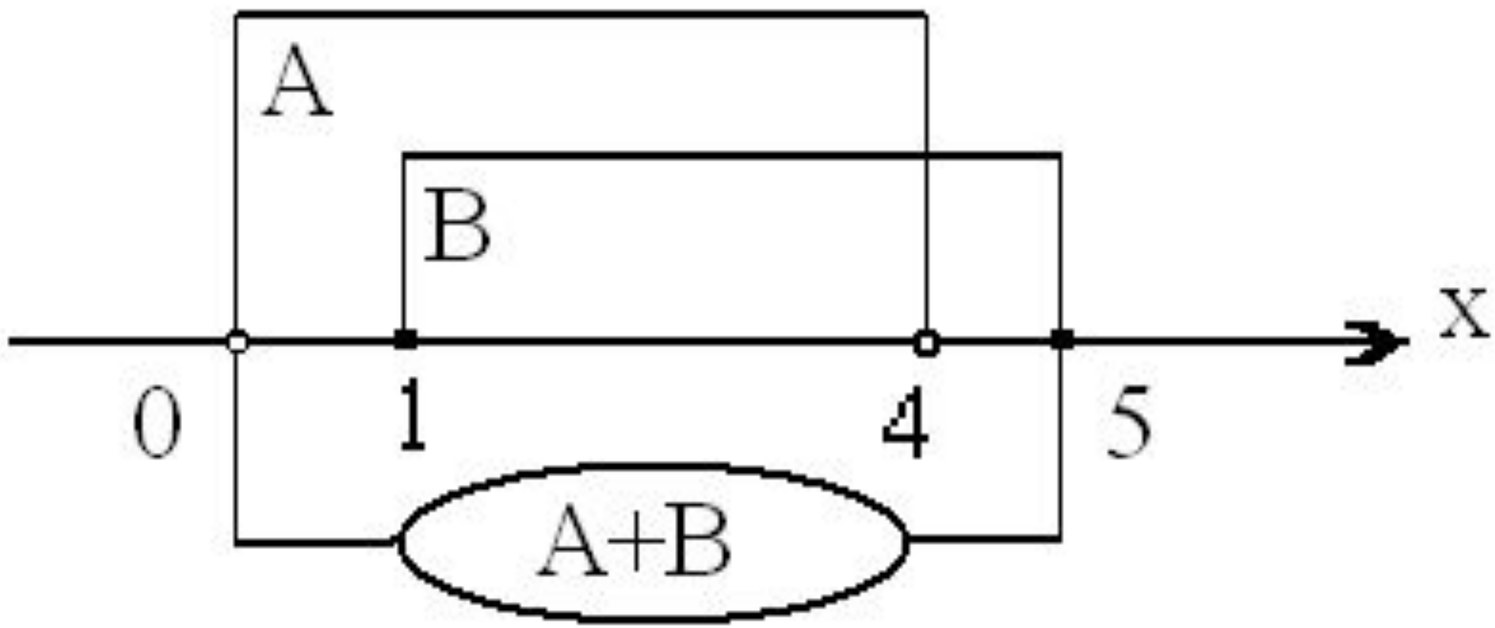
<u>Пример.</u>

Даны числовые множества **A = (0; 4)** и **B = [1; 5]**.

Найти **A +B, A·B, A - B** и дополнения данных множеств.

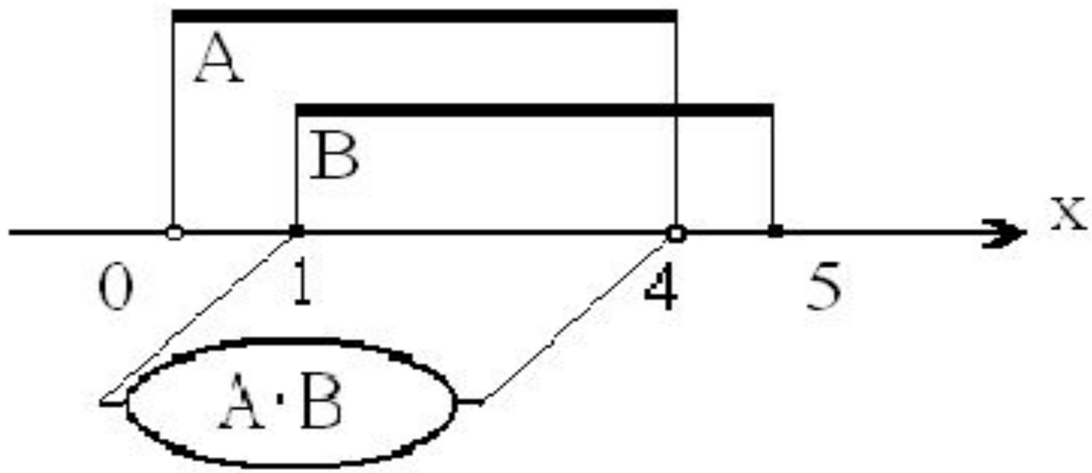
<u>Решение.</u>

На числовой оси рассмотрим сумму **A + B**:

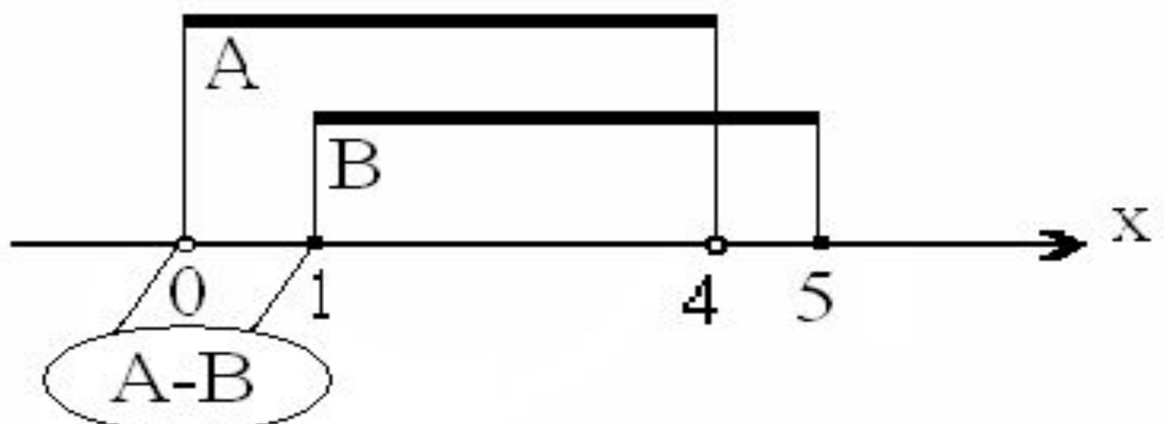


<u>Ответ</u>. Сумма **A + B = (0; 5].**

Аналогично рассмотрим произведение **А·В** и разность **А - В**:



<u>Ответ</u>. Произведение **А · В = [1; 4).**

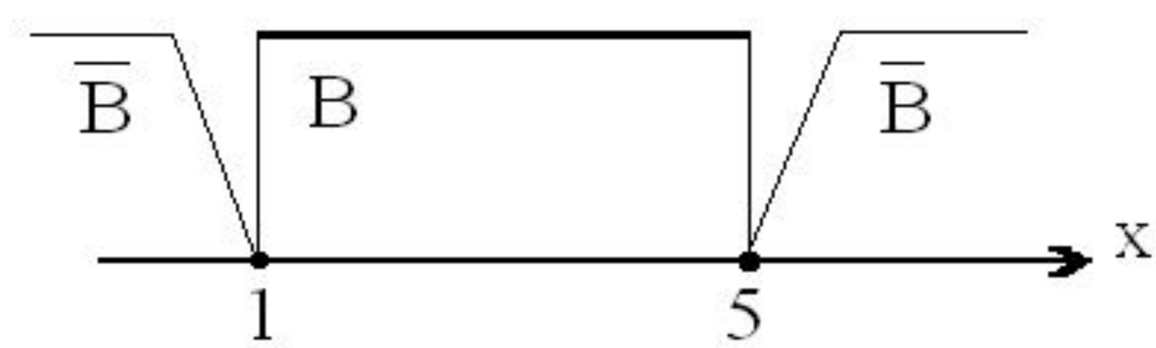


<u>Ответ.</u> Разность **А - В = (0; 1).**

Найдем дополнение множества А:

<u>Ответ</u>. Дополнение множества А: $\overline{A}$ **= (-∞; 0] U [4; ∞).**

Найдем дополнение множества В:



<u>Ответ</u>. Дополнение множества В: $\overline{B}$ **= (-∞; 1) U (5; ∞).**

<u>Пример:</u>

Пусть $M_1 = \{a; b; c; d\}$; $M_2 = \{e; f; g\}$;

$M_3 = \{a; b; c; d; e; f; g\}$.

Тогда множество M_1 равно…

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $M_1 \cap M_2$
2) $M_3 \setminus M_2$
3) $M_2 \cap M_3$
4) $M_2 \setminus M_3$

<u>Ответ</u>: пункт **№ 2**.

Пример:(выбрать варианты согласно указанной последовательности)

Заданы произвольные множества **A, B, C**.

Расположите указанные данные множества так,

чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

1) A U B

2) A U B U C

3) A ∩ B

4) A

Ответ: 3), 4), 1), 2).

Задание №1 (выбрать один вариант ответов)

Заданы множества A={1, 2, 3} и B={1, 2, 3, 4, 5}. Верным для них будет утверждение …

1) «Множества A и B равны »
2) «Множество A есть подмножество множества B»
3) «Множества A и B не имеют общих элементов»
4) «Множество A включает в себя множество B »

Ответ: пункт № **2**

Задание №2 (выбрать варианты согласно указанной последовательности)

Даны множества A = {a, b, c, d, e, f } и

B = {d, e, f, k, m, n}. Установить соответствие

между обозначениями множеств и самими множествами.

1. A ∩ B 2. A U B 3. A \ B 4. B \ A

Варианты ответов

A) {a, b, c, d, e, f, k, m, n } B) { k, m, n }

C) { d, e, f } D) {a, b, c }

Числовая последовательность

Если каждому натуральному числу **n** поставлено в соответствие число $\mathbf{x_n}$, то говорят, что задана *последовательность* $\{\mathbf{x_1, x_2, \ldots, x_n}\} = \{\mathbf{x_n}\}$.

x_1 – 1-ый элемент, x_2 — 2-ой, ..., x_n — n-ый член последовательности.

Чаще последовательность задается формулой общего элемента, которая позволяет вычислить любой член последовательности по номеру.

$$\mathbf{x_n = f(n)}$$

Так, равенства

$$v_n = n^2 + 1,\ \ z_n = (-1)^n \cdot n,\ \ y_n = \frac{1}{n},\ \ a_n = \frac{n-1}{n},\ \ n \in N$$

задают соответственно последовательности

$$\mathbf{v_n = \{\, 2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots\}}$$

$$\mathbf{z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots \quad , (-1)^n \cdot n, \dots\}}$$

$$\mathbf{y_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}}$$

$$\mathbf{a_n = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\}}$$

- **Арифметические операции над числовыми последовательностями.**

Пусть даны последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *и* $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1, x_2 + +y_2, \ldots, x_n + y_n$,; разностью $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n$; произведением $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \ldots, x_n \times y_n$; частным $\frac{x_n}{y_n}$.

Число a называется пределом данной последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, записывают $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или или $a_n \to a$ при $n \to \infty$. Последовательность, у которой существует предел, называется сходящейся. Последовательность, не являющаяся сходящейся - расходящаяся. Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a_n \le a$ для всех n=1, 2,…, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a слева, или

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a - 0$$

соответственно если $a_n \ge a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a + 0$ - предел справа.

Последовательность $\{x_n\}$ называют бесконечно большой, если для любого числа ε существует такой номер n_ε, что для всех $n \ge n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n| > \varepsilon$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

(последовательность имеет бесконечный предел)

Числовая последовательность может иметь только один предел, конечный или бесконечный определённого знака.

Последовательность b_k, $k = 1, 2, \ldots$, называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если для любого k существует такое натуральное число n_k, что $b_k = a_{nk}$, причем, $n_{k1} < n_{k2}$, только тогда, когда $k_1 < k_2$ (то есть, порядок следования элементов в подпоследовательности такой же, как

Следует различать последовательность $\{a_n\}$, то есть множество элементов a_n и множество значений ее элементов. Первое множество всегда бесконечно, а второе состоит из всех чисел, являющихся значениями элементов и может быть конечно. Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если множество значений ее элементов ограничено. Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется просто ограниченной. Если

Точная верхняя (нижняя) граница множества значений элементов последовательности $\{a_n\}$ называется верхней (нижней) границей данной последовательности и обозначается sup $\{a_n\}$, или $\sup\limits_{n=1,2..} a_n$ (или inf $\{a_n\}$).

Последовательность $\{x_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для каждого n=1, 2,… выполняется неравенство $x_n \le x_n+1$ (соответственно, неравенство $x_n \ge x_n+1$).

Возрастающие и убывающие последовательности

Всякая возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, конечный, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный, равный + ∞ (- ∞), если она не ограничена сверху (снизу), причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}$)

Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность, имеющую своим пределом бесконечность определенного знака.

- **Арифметические операции над числовыми последовательностями.**

Пусть даны последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$; разностью $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n$;

произведением $x_1 \times y_1, x_2 \times y_2, \ldots, x_n \times y_n$;

частным $\frac{x_n}{y_n}$.

1. Если $x_n \in R$, $y_n \in R$, $z_n \in R$, $n = 1,2,\ldots$

$x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in R$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$,

2. Если $x_n \leq y_n$ $x_n \in R$, $y_n \in R$, $n = 1,2,\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

(или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$)

- **Арифметические операции над числовыми последовательностями.**

Пусть даны последовательности $x_1, x_2, ..., x_n,$ и $y_1,$

$y_2, ..., y_n.$

Их суммой будет последовательность $x_1 + y_1,\ x_2 +$

$+y_2, ..., x_n + y_n,;$ разностью $x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, ..., x_n - y_n;$

произведением $x_1 \times y_1,\ x_2 \times y_2, ..., x_n \times y_n;$

частным $\frac{x_n}{y_n}$.

Матрицы. Операции над матрицами.

Матрицей **m x n** называется прямоугольная таблица, состоящая из **m** строк и **n** столбцов. Числа таблицы называют элементами матрицы и обозначают $\mathbf{a_{ij}}$, первый индекс - номер строки, а второй номер столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A_{(m\times n)},$$

$$i = 1, \ldots m,\ j = 1, \ldots n.$$

Элементы квадратной матрицы {1, 2, 0, 7},
образуют **главную диагональ (** —— **)**,
а элементы {5, -1, 2, -5} − **побочную (** —— **)**.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 10 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов (**m = n), - квадратная.** Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (столбцов).

Если m≠n, то матрица **прямоугольная.**

Матрица, состоящая из одной строки, называется <ins>матрицей-строкой:</ins> A=(-1; 0; 3; 6; 8).

Матрица, состоящая из одного столбца, называется ***<ins>матрицей-столбцом.</ins>***

<ins>Нулевой</ins> называется квадратная матрица, все элементы которой равны нулю.

Нулевая матрица 2-го порядка: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

<ins>Единичная</ins> - квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, остальные – 0,

Единичная матрица 3-го порядка: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Если в матрице А все строки заменить столбцами, то полученная матрица называется транспонированной (**A$^{\mathrm{т}}$**).

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{T} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 7 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица — квадратная матрица, все элементы которой, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Симметричной (симметрической) называют квадратную матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали.

<u>Примеры</u>

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, (2)$$

ОПЕРАЦИИ
НАД МАТРИЦАМИ

Равенство матриц

Две матрицы A и B <u>*равны*</u> между собой, если они одинакового размера и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$\boldsymbol{A = B}, \textbf{ если } \boldsymbol{a_{ij} = b_{ij}} \; \boldsymbol{(i=1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n).}$$

Сложение матриц

Складывать можно только матрицы одинакового размера поэлементно

$$\mathrm{C} = \left\{ \mathrm{c}_{\mathrm{ij}} \right\}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}} \qquad \mathrm{A} = \left\{ \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} \right\}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}} \qquad \mathrm{B} = \left\{ \mathrm{b}_{\mathrm{ij}} \right\}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B} = \left\{ \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} + \mathrm{b}_{\mathrm{ij}} \right\}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$$

Пример:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 11\\ 10 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1+1 & 2+3 & 3+0\\ 0+0 & 2-2 & 1+11\\ 1+10 & 2+0 & 4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 0 & 12\\ 11 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

Чтобы умножить матрицу А на число α надо умножить на это число каждый элемент матрицы.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ **. Найти B = 3·A**

$$\mathrm{B} = 3 \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot3 \\ 3\cdot0 & 3\cdot2 & 3\cdot1 \\ 3\cdot1 & 3\cdot2 & 3\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

ЗАДАНИЕ *(выберите вариант ответа)*

Если $A = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$ иатрица 5А имеет вид...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ -8 & -6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 35 & 55 \\ 40 & 30 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -40 & -30 \end{pmatrix}$

Вычитание матриц

$A - B = A + (-1) \cdot B$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 11 \\ 10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-3 & 3-0 \\ 0-0 & 2+2 & 1-11 \\ 1-10 & 2-0 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -10 \\ -9 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение двух матриц

Умножать можно только те матрицы, для которых число столбцов в первой матрице равно числу строк во второй матрице (!!!).

Произведением двух матриц А и В называется матрица С, у которой элемент Cij находится по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

i=1 , 2,…, m; j=1 , 2,…,p, т.е. элемент матрицы Cij, стоящий на пересечении *i* – строки и *j* - столбца равен сумме произведений элементов *i* – строки матрицы А на соответствующие элементы *j* - столбца матрицы В.

В результате умножения матрицы A на матрицу B получится матрица C число строк , которой равно числу строк матрицы A, а число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 4 & 2\cdot 2 + 3\cdot 5 & 2\cdot 3 + 3\cdot 6 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 4 & 1\cdot 2 + 4\cdot 5 & 1\cdot 3 + 4\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 \\ 17 & 22 & 27 \end{pmatrix}$$

Если $\boldsymbol{A \cdot B = B \cdot A}$, то матрицы называются **перестановочными**.

Определители и их свойства

Определителем квадратной матрицы (детерминантом) называется число, которое ставится в соответствие матрице и может быть вычислено по её элементам. **Детерминант** (от лат. determinans, родительный падеж determinantis — определяющий) обозначается *det*.

$$\Delta = det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Квадратная матрица первого порядка состоит из одного элемента, поэтому её определитель равен самому элементу $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$

Определитель второго порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Определитель третьего порядка вычисляется по правилу треугольника:

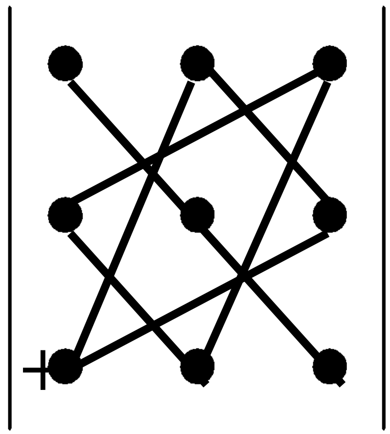
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

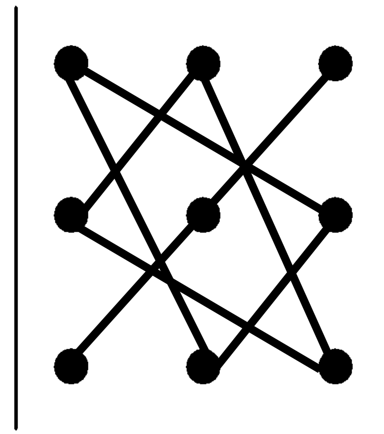
$$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Схема вычисления определителя 3-го порядка (правило треугольника французского математика Саррюса).

рис. 1 (+). **рис. 2. (-)**



−



По схеме на рис. 1, произведение элементов берется со знаком плюс, а по схеме рис. 2 – со знаком минус (!!!).

Пример 1. Найдём определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тогда по правилу треугольника получаем:

$\det A = 1\cdot0\cdot5 + 3\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot2\cdot4 - 4\cdot0\cdot(-1) - 3\cdot2\cdot5 - 1\cdot2\cdot(-2) = -4.$

Пример 2. Даны две матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ Найти: $C = 2\cdot A + A\cdot B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2\cdot3 \\ 2\cdot0 & 2\cdot8 & 2\cdot0 \\ 2\cdot4 & 2\cdot0 & 2\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим решение примера подробнее:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 6+3\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 0+3\cdot 8 & 1\cdot 0+0\cdot 7+3\cdot 0 \\ 0\cdot 0+8\cdot 6+0\cdot 0 & 0\cdot 4+8\cdot 0+0\cdot 8 & 0\cdot 0+8\cdot 7+0\cdot 0 \\ 4\cdot 0+0\cdot 6+5\cdot 0 & 4\cdot 4+0\cdot 0+5\cdot 8 & 4\cdot 0+0\cdot 7+5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 0 \\ 48 & 0 & 56 \\ 0 & 56 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = 2A+AB = \begin{pmatrix} 2+0 & 0+28 & 6+0 \\ 0+48 & 16+0 & 0+56 \\ 8+0 & 0+56 & 0+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 28 & 6 \\ 48 & 16 & 56 \\ 8 & 56 & 10 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

1. При транспонировании величина определителя не меняется. Строки и столбцы эквиваленты.
2. Если в определители поменять местами какие-либо две строки (столбца) местами - он меняет знак.
3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен 0.
4. При умножении элементов какого-либо столбца (строки) на число α, определитель увеличивается в это же число раз.

5. Если все элементы какого-либо столбца (строки) равны 0, то определитель равен 0.

6. Если элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен 0.

ЗАДАНИЕ (*выберите вариант ответа*)

Определитель $\begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$ равен 0 при $\alpha = \ldots$

ВАРИАНТЫ:

1) – 4 **2)** 3

3) 0 **4)** 4

Произведение определителей.

det (AB) = detA $\cdot$ detB

Пример: Даны матрицы A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2;

det B = 15 – 2 =13; det (AB) = det A $\cdot$ det B = -26.

2- й способ: AB = $\begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 3 \\ 3\cdot 5+4\cdot 1 & 3\cdot 2+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$,

det (AB) = 7 $\cdot$ 18 - 8 $\cdot$ 19 = 126 – 152 = -26.

Ранг матрицы - натуральное число равное наибольшему из порядков определителей отличных от нуля среди порожденных матрицей. Обозначение: Rang A или **r (A)**.

Если r (A) = k, значит:

1. Существует определитель порядка $k \neq 0$;

2. Все определители порядка больше чем k ***равны 0*.**

ЗАДАНИЕ. Ранг квадратной матрицы A четвертого порядка равен r (A) = 1. Тогда определитель матрицы …

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1) $det\ (A) = 5$ **2)** $det\ (A) = 0$

3) $det\ (A) = 1$ **4)** $det\ (A) = 4$

Исследование систем линейных уравнений

Рассмотрим систему **m** уравнений с **n** неизвестным (1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ - коэффициенты системы

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные переменные

$b_1, \ldots, b_m$ - свободные члены (правая часть системы)

Решениями системы являются **n** чисел, которые при подстановке в (1) превращают уравнение в тождество.

Система лин. уравнений наз. *однородной*, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), иначе — ***неоднородной***; ***квадратной***, если число **m** уравнений равно числу **n** неизвестных (m = n).

Система, имеющая решения называется ***совместной*, **не имеющая - ***несовместной*.**

Система называется ***определенной***, если она имеет только **одно (!) решение** и ***неопределенной***, если более одного.

Для системы (1) матрица коэффициентов системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Обозначим: $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ - матрица системы,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}_{m \times 1}$$ - матрица свободных членов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}$$ - матрица неизвестных.

Тогда, по правилу умножения матриц, система (1) записывается в матричном виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \qquad (2)$$

ЗАДАНИЕ *(выберите вариант ответа)*

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

Тогда матричная форма записи имеет вид ...

ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:

1)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

К элементарным преобразованиям относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2) Перестановка уравнений местами.

3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.