Лекция 7. Неопределенный интеграл. Основные свойства. Основные методы интегрирования.

Первообразная функция

Пусть *f(x)* определена на некотором множестве *M*, которое является конечным или бесконечным интервалом.

Определение 1

F(x) называется первообразной для *f(x)* на множестве *M*, если она дифференцируема в каждой точке $x \in M$ и $F'(x) = f(x), \forall x \in M$

Примеры:

$f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$ $f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$ $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$

Если *F(x)* первообразная для *f(x),* то *F(x)*+*C* также первообразная для *f(x) (F(x)+C)'=F'(x)=f(x)*

Теорема Если $F_1(x), F_2(x)$ – первообразные для *f(x),* то $F_1(x) - F_2(x) = C, \forall x \in M, C = const$

Доказательство

Пусть $F_1(x) - F_2(x) = G(x) \Rightarrow G'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in M,$ тогда G(x)=const, $\forall x \in M$, то есть $F_1(x) - F_2(x) = const$

Замечание: Если *F(x)* одна из первообразных для *f(x)* на множестве *M*, то любая первообразная *Φ(x)* для *f(x)* на множестве *M* представима в виде *Φ(x)=F(x)+C*, *C=const*

Определение 2

Совокупность всех первообразных функций для *f(x)* на множестве *M* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается

$$\int f(x)dx$$

$\int$ - знак интеграла;

f(x)dx – подынтегральное выражение;

f(x) – подынтегральная функция.

Если F(x) – одна из первообразных для f(x) на множестве *M,* то

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (1)$$

Пример $\int \cos dx = \sin + c, -\infty < x < +\infty$

Замечание Если *F(x)* – первообразная для *f(x)* на *M*, то в формуле(1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции *F(x).* Действительно

$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$ Будем считать по определению, что

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx \quad (2)$$

Основные свойства неопределенного интеграла

Свойства вытекают из определения неопределенного интеграла

1. **Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.**

Имеем $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (1) и $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$

2. **Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.**

В самом деле пусть $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$ (2), где $\varphi'(x)$ непрерывна. Функция $\varphi'(x)$ очевидно является первообразной для $\varphi(x)$. Поэтому из (2) имеем

$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$

__*Замечание.*__ В формулах (1) и (2) знаки *d* и $\int$, следующие друг за другом в том или ином порядке, взаимно уничтожают друг друга. В этом смысле дифференцирование и интегрирование являются взаимообратными математическими операциями.

3. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. То есть, если $A \neq 0$, то $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ (3)

Пусть *F(x)* – первообразная для *f(x),* тогда в силу определения неопределенного интеграла имеем $A\int f(x)dx = A[F(x)+c] = AF(x)+c_1 (4)$, где $c_1 = Ac, при\ A \neq 0$. Но *AF(x)* –первообразная для *Af(x),* так как $[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x)$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, то есть, если *f(x),g(x),h(x)* – непрерывны в интервале *(a,b),* то

$\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx$ при $x \in (a,b)$

Пусть *F(x),G(x),H(x)* – первообразные соответственно функций *f(x),g(x),h(x),* то есть *F'(x)=f(x), G'(x)=g(x), H'(x)=h(x)* $x \in (a,b)$

На основании определения неопределенного интеграла имеем

$\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx = [F(x)+c_1]+[G(x)+c_2]-[H(x)+c_3] = [F(x)+G(x)-H(x)]+c$ (6),

где $c = c_1 + c_2 - c_3$ Но *F(x)+G(x)-H(x)* – первообразная для *f(x)+g(x)-h(x),* так как *[F(x)+G(x)-H(x)]'=F'(x)+G'(x)-H'(x)=f(x)+g(x)-h(x),* следовательно

$\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx = F(x)+G(x)-H(x)+c$ (7). Тогда из (6) и (7) вытекает равенство (5).

Таблица простейших неопределенных интегралов

Имеем соотношения $dF(x) = f(x)dx$ $\int f(x)dx = F(x) + c$

Обобщая формулы дифференцирования, получим

№ п/п	Дифференциал	Неопределенный интеграл
1	$d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = x^m dx$	$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$
2	$d(\ln\lvert x\rvert) = \frac{dx}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
3	$d(e^x) = e^x dx$	$\int e^x dx = e^x + c$
4	$d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right) = a^x dx$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5	$d(\sin x) = \cos x dx$	$\int \cos x dx = \sin x + c$
6	$d(-\cos x) = \sin x dx$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
7	$d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

8	$d(-ctgx)=\frac{dx}{\sin^2 x}$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+c$
9	$d(\arcsin x)=d(-\arccos x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c=-\arccos x+c$
10	$d(arctgx)=d(-arcctgx)=\frac{dx}{1+x^2}$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=arctgx+c=-arcctgx+c$
11		$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert+c$
12		$\int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x-1}{x+1}\right\rvert+c$
13		$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+c$
14		$\int shxdx=chx+c$
15		$\int chxdx=shx+c$

Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента

Приведенная таблица полностью сохраняет свое значение, если под x (независимая переменная) понимать любую непрерывно дифференцируемую функцию от независимой переменной.

Пусть f(x) непрерывная функция на данном промежутке, F(x)-ее первообразная. Имеем $\int f(x)dx = F(x)+c$ (1). Полагаем $u=\varphi(x), \varphi(x)$ - некоторая непрерывно дифференцируемая функция. Рассмотрим интеграл $\int f(u)du = \int f(u)u' dx$ (2). В таком случае сложная функция $F(u) = F(\varphi(x))$ (3) является первообразной для подынтегральной функции интеграла. Действительно в силу независимости дифференциала первого порядка от выбора независимой переменной получим

$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$ (4) и следовательно

$\frac{d}{dx}\left[F(u)\right] = \frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx} = f(u)u'$ (4') поэтому $\int f(u)du = F(u)+c$ (5), где $F'(u)=f(u)$

Таким образом, из справедливости формулы (1) получаем справедливость формулы (5). На основании этого свойства получаем <u>обобщенную таблицу неопределенных интегралов</u>, то есть

$$\int u^m du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + c(m\neq 1) \quad \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$ и так далее.

u – любая непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной.
Выбирая различным образом функцию *u* можно существенно расширить таблицу простейших интегралов.

Пример

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ Заменяя *x* на *sinx*, получаем

$\int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + c$ или $\int \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$

Или $x \to \ln x$

$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + c$ или $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$

Отсюда становится понятной важность умения приводить данное дифференциальное выражение *f(x)dx* к виду *f(x)dx=g(u)du*,
где *u* – функция от *x*, и *g(u)* более простая для интегрирования функция, чем *f(x).*
Отметим ряд преобразований дифференциала, полезных для вычисления неопределенных интегралов:

1) $dx = d(x+b), b = const$

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax), a \neq 0$

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b), a \neq 0, b = const$

4) $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$

5) *sinxdx=-d(cosx)*

6) *cosxdx=d(sinx)*

В общем случае *f'(x)dx=d(f(x))*

Примеры

1. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c (a \neq 0)$

2. $\int \sqrt{x-2}dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2} + c$

3. $\int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + c$

4. $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

5. $\int tgxdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + c$

6. $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+c$

8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \pm\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \pm\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = \pm\arcsin\frac{1}{x}+c$

9. $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2}+c$

Основные методы интегрирования

Для вычисления данного интеграла необходимо тем или иным способом свести его к табличному интегралу и таким образом найти искомый интеграл

Наиболее важными методами интегрирования являются:

1. Метод разложения.
2. Метод подстановки.
3. Метод интегрирования по частям.

Метод разложения

Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, тогда на основании свойства (4) имеем $\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$. По возможности $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стараются подобрать так, чтобы интегралы от них находились непосредственно.

Примеры:

1 $\int (1-\sqrt{x})^2 dx = \int (1 - 2\sqrt{x} + x)dx = \int dx - 2\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x dx = x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + c = x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + c$

2 $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 9x - 5}{x^2} dx = \int (x^2 - 6x + 8 + \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2})dx = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 9\ln|x| + \frac{5}{x} + c$

3 $\int \sin x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x - \sin 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin 4x d(4x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

(так как $\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$)

Метод подстановки (метод введения новой переменной)

Пусть *f(x)* непрерывна на интервале *(a,b)* и $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале (α, β); причем функция φ отображает интервал (α, β) в интервал *(a,b)*.

На основании свойства независимости неопределенного интеграла от выбора аргумента и учитывая, что $dx = \varphi'(t)dt$, получим формулу замены в неопределенном интеграле.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (1)$$

Примеры

1 $\int x\sqrt{x-5}dx$ Полагаем $\sqrt{x-5} = t, x-5 = t^2, x = t^2+5, dx = 2tdt$

Производя подстановку получаем

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int (t^2+5)2tdt = \int (2t^4+10t^2)dt = 2\int t^4 dt + 10\int t^2 dt = 2\cdot\frac{t^5}{5} + 10\cdot\frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

2 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx (a > 0)$

Выполним тригонометрическую подстановку *x=asint, dx=acostdt*

Следовательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 = \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{4} \int \cos 2t d(2t) =$$

$$\frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + c$$

Делая обратную замену

$$\sin t = \frac{x}{a}, t = \arcsin \frac{x}{a}, \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}$$

Окончательно

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + c$$

Иногда формулу (1) полезно применять справа налево, то есть:

$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$ (2) или $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, t = \varphi(x)$

Примеры:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + ctgx}}{\sin^2 x} dx$ Полагая $t = 1 + ctgx, dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ получаем

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + ctgx}}{\sin^2 x} dx = -\int (1 + ctgx)^{\frac{1}{3}} d(1 + ctgx) = -\int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + c = -\frac{3}{4} (1 + ctgx)^{\frac{4}{3}} + c$$

2. $\int(\ln x+\frac{1}{\ln x})\frac{dx}{x}$ так как $\frac{dx}{x}=d(\ln x)$ получаем

$$\int(\ln x+\frac{1}{\ln x})\frac{dx}{x}=\int\ln x d(\ln x)+\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\frac{1}{2}\ln^2 x+\ln|\ln x|+c$$

Метод интегрирования по частям

Пусть *u* и *v* – непрерывно дифференцируемые функции от *x*.

На основании формулы дифференциала произведения имеем *d(uv)=udv+vdu.* Отсюда *udv=d(uv)-vdu*. Интегрируя, получаем $\int udv=\int d(uv)-\int vdu$ или окончательно $\int udv=uv-\int vdu$ Это и есть формула интегрирования по частям. Выведенная формула показывает, что интеграл более простым или даже табличным.

Примеры:

1. $\int\ln x dx$ = $\left\{u=\ln x, dv=dx, du=d(\ln x)=\frac{dx}{x}, v=x\right\}$=*xlnx*- $\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\ln x-x+c$

2. $\int x\cos x dx=\{u=x, dv=\cos x dx, du=dx, v=\sin x\}=x\cdot\sin x-\int\sin x dx=x\cdot\sin x+\cos x+c$

3. $\int x\cdot arctgx dx=\frac{1}{2}\int arctgx\cdot d(x^2+1)=\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx-\frac{1}{2}\int(x^2+1)d(arctgx)=$

$$\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx-\frac{1}{2}\int(x^2+1)\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}(x^2+1)arctgx-\frac{1}{2}x+c$$

Интегрирование рациональных дробей с квадратичным знаменателем

Рассмотрим интеграл вида $\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$, где *P(x)* – целочисленный многочлен; *a,b,c* – постоянные величины $a\neq 0$

Разделив *P(x)* на знаменатель, получаем в частном некоторый многочлен *Q(x)* и в остатке – линейный многочлен *mx+n*. Отсюда

$$\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}=Q(x)+\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$$

Интеграл от многочлена Q(x) находится непосредственно. Рассмотрим способы вычисления интеграла вида $\int\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx$ (1)

Рассмотрим интегралы:

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+c(a\neq 0)$$

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}(a\neq 0)$ Имеем $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\frac{(x+a)-(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$

Тогда $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$

К интегралам I и II присоединим еще один интеграл

III. $$\int\frac{xdx}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2\pm a^2)}{x^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2|+c$$

Примеры

1. $\int\frac{dx}{2x^2+3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x\sqrt{2})}{(x\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}arctg(x\sqrt{\frac{2}{3}})+c$

2. $\int\frac{dx}{x^2-5}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c$

Замечание Основной прием вычисления интеграла (1) состоит в следующем: квадратный трехчлен ax^2+bx+c дополняется до полного квадрата. После этого, если коэффициент m=0, то интеграл (1) сводится к интегралу I или II. Если же $m\neq 0$ то интеграл (1) сводится к интегралам I и II, или к интегралам II и III.

3. $\int\frac{dx}{x^2-10x+16}=\int\frac{d(x-5)}{(x-5)^2-3^2}=\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{(x-5)-3}{(x-5)+3}\right|+c=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-8}{x-2}\right|+c$

4. $\int \frac{dx}{x^2+3x+4} = \int \frac{dx}{(x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+\frac{9}{4})+(4-\frac{9}{4})} = \int \frac{d(x+\frac{3}{2})}{(x+\frac{3}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}} + c$

5. $\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$

6. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}dx = \int (x^2-1+\frac{1}{x^2+1})dx = \frac{x^3}{x} - x + arctgx + c$

Замечание Если выражение ax^2+bx+c

имеет действительные и различные корни, то для вычисления интеграла (1) можно воспользоваться разложением подынтегральной функции на простейшие дроби $\frac{mx+n}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x=x_2}$ (2) *A,B* – неопределенные коэффициенты, которые находятся путем приведения тождества (2) целому виду и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях *x* в правой и левой частях полученного равенства.

Примеры:

1. $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx \quad \frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} \Rightarrow x+2 = A(x+6)+B(x-1) \Rightarrow x+2 = (A+B)x+(6A-B)$

Приравнивая коэффициенты, получаем систему уравнений

$\begin{cases} 1 = A+B \\ 2 = 6A-B \end{cases} \Rightarrow A = \frac{3}{7}, B = \frac{4}{7}$ На основании полученного разложения исходный

интеграл $\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}dx = \frac{3}{7}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{4}{7}\int \frac{d(x+6)}{x+6} = \frac{3}{7}\ln|x-1| + \frac{4}{7}\ln|x+6| + c = \frac{1}{7}\ln\left\{(x-1)^3(x+6)^4\right\} + c$

Интегрирование иррациональностей

Рассмотрим способы вычисления интегралов, содержащих простейшие иррациональности.

1. Если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}, (a \neq 0)$, то применяется подстановка $t = \sqrt[n]{ax+b}$

Пример

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left\{t = \sqrt[3]{x+1}, x = t^3 - 1, dx = 3t^2dt\right\} = \int \frac{(t^3-1)3t^2dt}{t} = 3\int (t^4 - t)dt = 3(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}) + c = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + c$$

2. Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ этот интеграл с помощью дополнения выражения

ax^2+bx+c до полного квадрата сводится к одному из двух интегралов

$\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm x^2}}$. Рассмотрим эти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ Применим подстановку Эйлера $\sqrt{x^2+a} = t - x$,

где t –новая переменная.

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow a = t^2 - 2tx \Rightarrow d(a) = d(t^2 - 2tx) = 2tdt - 2xdt - 2tdx \Rightarrow tdx = (t-x)dt$$

отсюда $\frac{dx}{t-x} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c$

Пример

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}} = \ln|x - 3 + \sqrt{x^2-6x+13}| + c$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{5}{4} - (x+\frac{1}{2})^2}} = \arcsin\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + c = \arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + c$

3. Интеграл от иррациональности

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ Заменой $x-\alpha=\frac{1}{t}$ он сводится к интегралу вида **2)**.

Действительно $x=\frac{1}{t}+\alpha, dx=-\frac{dt}{t^2}, ax^2+bx+c=(\frac{1}{t}+\alpha)^2+(\frac{1}{t}+\alpha)+c=\frac{(c+\alpha^2+\alpha)t^2+(2\alpha+1)t+1}{t2}$

После всех замен получаем $\int \frac{dt}{-\sqrt{(c+\alpha^2+\alpha)t^2+(2\alpha+1)t+1}}$

4. Интеграл от иррациональности

$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ Этот интеграл можно разбить на два интеграла, выделив в

числителе производную подкоренного выражения; тогда один интеграл вычисляется как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида **2)**

5. Иррациональность вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\cdot dx$

Выделяем полный квадрат, а затем полученный интеграл

$\int \sqrt{x^2+A}\cdot dx$ вычисляем по методу – интегрирование по частям.

$u=\sqrt{x^2+A}, dv=dx, du=\frac{x}{\sqrt{x^2+A}}, v=x$, тогда

$\int \sqrt{x^2+A}\cdot dx = x\sqrt{x^2+A}-\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}} = x\sqrt{x^2+A}-\int \frac{x^2+A-A}{\sqrt{x^2+A}}dx = x\sqrt{x^2+A}-\int \sqrt{x^2+A}\cdot dx-\int \frac{Adx}{\sqrt{x^2+A}}$ =

$x\sqrt{x^2+A} - A\ln|x+\sqrt{x^2+A}| - \int\sqrt{x^2+A}\cdot dx$

Окончательно

$\int\sqrt{x^2+A}\cdot dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+A} + A\ln|x+\sqrt{x^2+A}|] + c$

Замечание

a) $\int\sqrt{1-x^2}dx = \{x=\sin t, dx=\cos t dt\} = \int\cos^2 t\cdot td = \frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t) + c = \{\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}\} =$
$\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + c$

b) $\int\sqrt{x^2+1}\cdot dx$

При вычислении можно использовать гиперболические функции *x=sht, dx=cht* (можно *x=tgt,* но более громоздко).

6. Иррациональность вида

$\int R(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[m]{x},...)dx$ (1) где *R* – рациональная функция относительно переменной интегрирования *x* и различных радикалов из *x*.

Обозначим через *n* – наименьшее кратное всех показателей k,m,… Тогда

$\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{m} = r_2, ...$

Замена переменной $x = t^n, dx = nt^{n-1}dt$ позволяет получить интеграл от рациональной функции.

Интеграл (1) примет вид

$$\int R(t^n, t^{r_1}, t^{r_2}, ...) n t^{n-1} dt$$

Пример $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ замена $x = t^6, \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt$

Тогда $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} =$ $\int \frac{6t^5 dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt = 6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t) - 6\ln|t+1| + c$

$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + c$

Замечание

Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, ...)dx$ вычисляется с помощью замены

$$\frac{ax+b}{px+q} = t^n, x = \frac{qt^n - b}{a - pt^n}, dx = \frac{aq - pb}{(a-pt^n)^2} n t^{n-1} dt$$