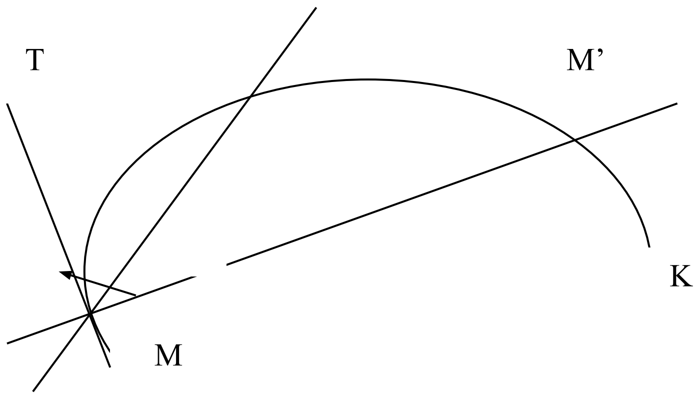
## Лекция 5. Производная. Основные теоремы о производных. Основные формулы дифференцирования функций

### Задача о касательной




Пусть *M* – фиксированная точка кривой *K*. *MM’* – секущая, проходящая через точки *M* и *M’*. Может случиться, что *M’* стремится к *M*, секущая $M' \to M$ ,где $MM' \to MT$

*MT* – предельное положение, то есть $\angle\gamma = \angle M'MT \to 0$ при $M' \to M$ , тогда предельная прямая *MT* называется <u>касательной</u>.

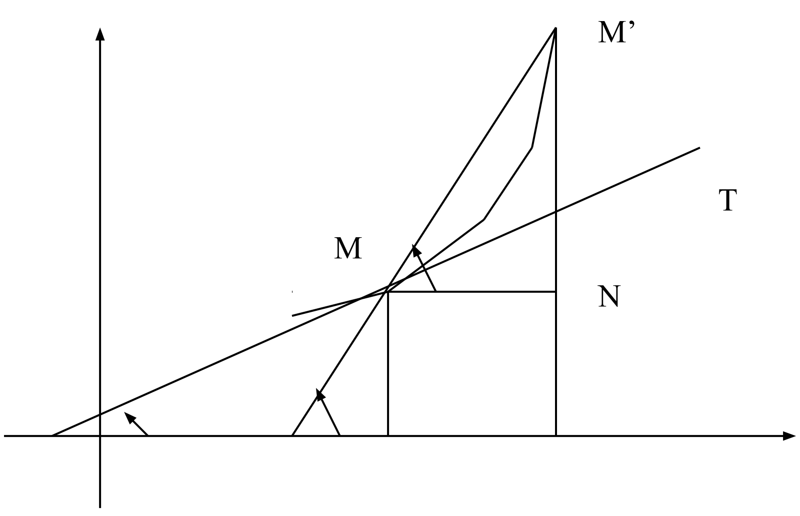
**Определение**

Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке *M* (точка касания) называется предельное положение секущей *MM’*, проходящей через точку *M*, когда вторая точка пересечения *M’* неограниченно приближается по кривой к первой.

Если секущая *MM’* при $M' \to M$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной линии в точке *M* не существует.

**Задача**

Зная уравнение непрерывной линии *y=f(x)* найти уравнение касательной в данной точке ее *M(x,y),* предполагая, что касательная существует.



Наряду с точкой *M(x,y)* возьмем на линии другую точку $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Проведем секущую *MM'* и прямые *MN*||*OX*,*M'N*||*OY* получим прямоугольный треугольник *MNM'* с катетами $MN = \Delta x$ и $NM' = \Delta y$.

Пусть секущая *MM'* составляет с *OX* угол $\varphi = \angle NMM'$. Из $\Delta MNM'$ определяем угловой коэффициент секущей $k' = tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (1).

Пусть $M' \to M$ ,тогда $\Delta x \to 0$ и секущая $MM' \to MT$ (предельное положение секущей). Обозначим через $\alpha$ угол образованный касательной *MT* с положительным направлением оси *OX*. При $\Delta x \to 0$ , $\varphi \to \alpha$ . Если касательная *MT* не перпендикулярна *OX*, то в силу непрерывности тангенса получим $tg\varphi \to tg\alpha$ .

Отсюда переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в равенстве (1) найдем угловой коэффициент

$k = tg\alpha$ касательной *MT*.

$k = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (2).

Предел, стоящий в правой части равенства (2), называется производной функции *y=f(x)*

в точке *x* и сокращенно обозначается следующим образом

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x) \quad (3).$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению ее производной в точке касания.

Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение.

Обозначим через $x_1, y_1$ коэффициенты точки касания, а *x,y* – текущие координаты, то

уравнение касательной к линии *y=f(x)* в точке $M(x_1, y_1)$ имеет вид ,где
$y - y_1 = y'(x - x_1)$,где $y_1 = f(x_1), y' = f'(x_1)$ .

**Общее определение производной**

Рассмотрим вопрос о производной в общем виде

Предполагаем, что функция *y=f(x)* определена на некотором конечном или бесконечном

интервале $X = (a,b)$ и непрерывна на этом интервале. Пусть $x \in (a,b)$
$x + \Delta x \in (a,b)$ .Тогда функция *y=f(x)* получает соответствующее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$
(1).

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (2).

Это отношение показывает во сколько раз на данном промежутке $[x, x + \Delta x]$ приращение функции *y* больше приращения аргумента *x*.

Пусть $\Delta x \to 0$ .Тогда $\Delta y \to 0$ в силу непрерывности функции *y.*

Обозначим $X_1 \subset (a,b)$ - множество точек интервала *(a,b)* для которых имеет смысл предельный переход $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3).

Тогда формула $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, (x \in X_1)$ (4).

Определяет некоторую функцию *y'=f'(x),* носящую название производной функции *f(x)*.

**<u>Определение</u>**

Производной функции *y=f(x)* называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Если этот предел существует.

Функция, имеющая производную на множестве называется дифференцируемой на этом множестве.

Если $x \in X_1$ фиксировано, то в силу (4) производная *y'* представляет собой скорость изменения функции *y* относительно аргумента *x* в точке *x*.

Приняты обозначения:

*y'=f'(x)* – Лагранж;

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$ -Лейбниц;

$\dot{y} = \dot{f}(x)$ -Ньютон.

$y'_x, y'_t$ -дифференцирование функций по определенному аргументу.

Для значения производной функции *y=f(x)* в фиксированной точке используются обозначения

$(y')_{x=x_1} = | f'(x) |_{x=x_1} = f'(x_1)$ - это число

Используя формулу (1) можно записать

$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (5).

С помощью формулы (5), опираясь на теоремы о пределах можно находить производные функции.

**<u>Пример</u>**

Найти производную функции $y = x^2$

Решение

$X$ – произвольное фиксированное значение аргумента. Давая $\Delta x \neq 0$ имеем

$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ и следовательно $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

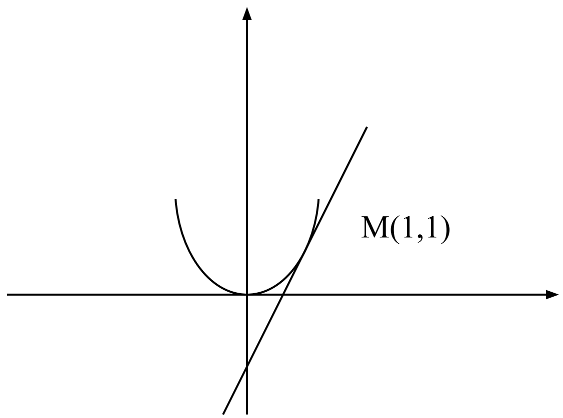
то есть $y' = (x^2)' = 2x$

**Геометрический смысл производной**

Для данной функции y=f(x) ее производная y’=f’(x) для каждого значения *x* равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.

**<u>Пример</u>**

Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2$ в точке *M(1,1)*.




Решение

Находим *y'* при *x=1*. Получаем *y'=2x*, отсюда $k = (y')_{x=1} = 2$ Следовательно, уравнение касательной имеет вид *y-1=2(x-1),* то есть *y=2x-1*

**Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции**

Функция *y=f(x)* называется непрерывной в точке *x*. если в этой точке

$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ (1).

Функция *y=f(x)* называется дифференцируемой в точке, если она в этой точке имеет производную, то есть существует конечный предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ (2).

Между этими основными понятиями математического анализа имеется простая связь

**<u>Теорема</u>**

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

<u>Доказательство</u>

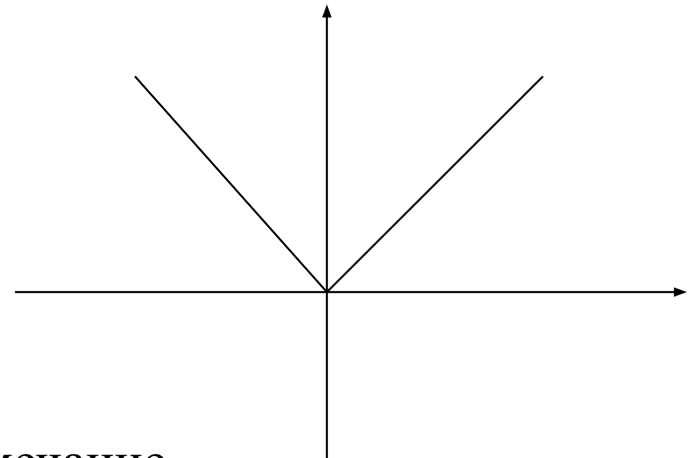
Пусть *y=f(x)* – дифференцируема, то есть $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=f'(x)$. Напишем тождество $\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x(\Delta x\neq 0)$ .Отсюда $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=y'\cdot 0=0$ .

Следовательно, *y=f(x)* непрерывна в точке *x*.

<u>Следствие</u>

Если функция разрывна в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

Примером непрерывной функции, не имеющей производной в одной точке является функция $y=|x|$. функция непрерывна при *x=0*, но не является дифференцируемой для данного значения, так как в точке *x=0* графика функции не существует касательной.



<u>Замечание</u>

Производная *y'=f'(x)* непрерывной функции *y=f(x)* сама не обязательно является непрерывной. Если *f(x)* имеет непрерывную производную *f'(x)* на интервале *(a,b)*, то *f(x)* называется гладкой на этом интервале.

Если для *f(x)* производная *f'(x)* допускает лишь конечное число точек разрыва первого рода, то *f(x)* называется кусочно-гладкой на этом интервале.

**Понятие о бесконечной производной**

Если функция *y=f(x)* непрерывна в точке $x_0$ и $f'(x_0)=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}=\infty$ (1)

то функция *f(x)* имеет бесконечную производную в точке $x = x_0$.

Согласно геометрическому смыслу производной $y_0' = f'(x_0) = tg\alpha = k$ в точке $x_0$ (угловому коэффициенту). Поэтому $tg\alpha = \infty$ и следовательно $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Таким образом (1) геометрически обозначает, что в точке $x_0$ график функции *y=f(x)* имеет вертикальную касательную.

**Основные теоремы о производных**

Операция нахождения производной называется дифференцированием; функция, имеющая конечную производную на данном множестве – дифференцируема на данном множестве. Учение о производной и ее приложениях составляет предмет - дифференциальное исчисление.

Рассмотрим основные правила дифференцирования

Производная функции *y=f(x)* может быть найдена по следующей схеме:

1)аргументу *x* даем приращение и находим для функции *y* соответствующее приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

2) составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

3) находим предел этого отношения при условии, что $\Delta x \to 0$. Результат предельного перехода $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$ и является производной *y'* от функции *y* по аргументу *x*, если конечно он существует.

Пользуясь этой схемой, найдем производные от некоторых простейших функций

**1)Производная от степенной функции** $y = x^m, m \in Z$

$(x^m)' = mx^{m-1}$

Пусть $y = x^m, m \in Z$ .Имеем $\Delta y = (x + \Delta x)^m - x^m$ . Применяя формулу бинома Ньютона, получаем

$$\Delta y = x^m + mx^{m-1}\Delta x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^m - x^m$$

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} \Delta x + ... + (\Delta x)^{m-1}$ и $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}$ . Следовательно $y' = (x^m)' = mx^{m-1}$

**<u>Имеем теорему</u>**

Производная от целой положительной степени независимой переменной равна показателю степени умноженному на основание в степени га единицу меньшую.

**2.Производная от функции *y=sinx***

Пусть *y=sinx (x* - в радианной мере).

Тогда

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x \_ - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x + \frac{\Delta x}{2})$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x \to 0}\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = 1 \cdot \cos[\lim_{\Delta x \to 0}(x + \frac{\Delta x}{2})] = \cos x$$

Следовательно *y'=(sinx)'=cosx*

## Основные формулы дифференцирования

Предположим, что все рассматриваемые функции определены и дифференцируемы на некотором общем интервале, причем все используемые значения $x, x+\Delta x$ принадлежат данному интервалу.

**1. Производная постоянной величины равна 0.**

Пусть f(x)=c, то есть функция одно и тоже значение. При

$\Delta x \neq 0, f(x+\Delta x) = c \Rightarrow \Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$ .Тогда $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0 \Rightarrow c' = 0$ (1).

**2.Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.**

Пусть *y=u+v-w*, где *u,v,w* – дифференцируемые функции от *x*.

Тогда для $\Delta x \Rightarrow \Delta u, \Delta v, \Delta w \Rightarrow \Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что каждое слагаемое имеет предел, находим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Пользуясь определением производной, окончательно получим *y'=u'+v'-w'*

Окончательно *(u+v-w)'=u'+v'-w'* (2)

Пример

$$y = 2 - x + x^2 \Rightarrow y' = (2 - x + x^2)' = (2)' - (x)' + (x^2)' = -1 + 2x$$

*Следствие*

Если две дифференцируемые функции отличаются на постоянное слагаемое, то их производные равны между собой.

Действительно $[f(x)+c]'=f'(x)+c'=f'(x)=0=f'(x)$

**3.Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй сомножитель плюс произведение первого сомножителя на производную второго сомножителя.**

(3).

$$y = uv \Rightarrow y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Пример

$$y = x^3 \sin x \Rightarrow y' = (x^3 \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

*Следствие 1*

Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$(cu)'=c'u+cu'=0u+cu'$. $(cu)'=cu'$

*Следствие 2*

Если $y=uvw$, где $u,v,w$ – дифференцируемые функции, то

$y'=(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w=u'vw+uv'w+uvw'$

**4.Производная частного двух дифференцируемых функций, при условии, что знаменатель не обращается в ноль, вычисляется по следующей формуле**

(4).

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

*<u>Следствие 1</u>*

Если знаменатель дроби постоянная величина, то $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{cu' - uc'}{c^2} = \frac{u'}{c}$ (5).

Или $\left(\frac{u}{c}\right)' = \left(\frac{1}{c}u\right)' = \frac{1}{c}u'$

*<u>Следствие 2</u>*

Если числитель дроби постоянная величина, то $\left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{c'v - v'c}{v^2} = \frac{-cv'}{v^2}$ (6).

При с=1 $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ (7).

Пример

$y = \frac{1}{x^2 - 1}$ тогда в силу (7) $y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$

**Производная от функции *y=tgx***

$$y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

## Производная сложной функции

Рассмотрим сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$ (1).

Если в цепочке функциональных зависимостей $y = f(z), z = \varphi(x)$ аргумент *x* является последним, то он называется независимой переменной.

Предполагаем, что функция *y=f(z)* определена и дифференцируема в интервале *(A,B),* а функция $z = \varphi(x)$ определена и дифференцируема в интервале *(a,b).*

Дифференцируема ли функция *y=f(x)?*

**Теорема**

Если $y = f(z), z = \varphi(x)$ дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ существует и равна производной данной функции *y* по промежуточному аргументу *z*, умноженной на производную самого промежуточного аргумента *z* по независимой переменной *x*.

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x$$

Доказательство

Пусть x – допустимое значение независимой переменной. Даем для x приращение $\Delta x \neq 0$ Тогда $y = f(z), z = \varphi(x)$ получат приращения $\Delta z, \Delta y$. Так как по условию $y'_z$ существует, то, предполагая $\Delta z \neq 0$ можно записать. $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} = y'_z \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_z + \alpha$

По определению бесконечно малой величины $\alpha \to 0$ при $\Delta z \to 0$ .Следовательно $\Delta y = (y'_z + \alpha)\Delta z$ . Доопределим $\alpha$ при $\Delta z = 0$,пологая $\alpha = 0$ при $\Delta z = 0$ Разделив обе части равенства на $\Delta x \neq 0$ получим $\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z + \alpha) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$.Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и, учитывая, что при этом $\Delta z \to 0$ и $\alpha \to 0$ получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (y'_z + \alpha) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \Rightarrow y'_x = y'_z \cdot z'_x$$

В обозначении Лейбница $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

Примеры

1. $y=\sin(x^2)$

$z=x^2 \Rightarrow y=\sin z \Rightarrow y_z'=(\sin z)'=\cos z=\cos(x^2), z_x'=2z \Rightarrow y_x'=\cos(x^2)\cdot 2x=2x\cdot\cos(x^2)$ 2

$y=\sin^3 x \quad z=\sin x, y=z^3 \Rightarrow y_x'=3z^2\cos x=2\sin^2 x\cdot\cos x$

3.

$y=\sqrt{x^2+4x+3} \Rightarrow z=x^2+4x+3, y=\sqrt{z} \Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z'=\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+3}}(x^2+4x+3)'=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}$

4.

$y=tg^3\frac{x}{2} \Rightarrow y'=3tg^2\frac{x}{2}(tg\frac{x}{2})'=3tg^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot(\frac{x}{2})'=\frac{3}{2}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}$

## Производная обратной функции

Пусть *y=f(x)* - дифференцируемая функция от аргумента *x* в некотором интервале *(a,b)*. Рассмотрим $x=\varphi(y)$ где $f[\varphi(y)]\equiv y$ - обратная функция.

<u>Задача</u>

Зная производную $y_x'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ функции *y=f(x)* найти производную $x_y'=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ обратной функции $x=\varphi(y)$ предполагая, что обратная функция существует и непрерывна в соответствующем интервале.

**Теорема**

Для дифференцируемой функции с производной не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, то есть

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Доказательство

Пусть *y=f(x)* - дифференцируемая функция, то есть $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0$ .Для функции *y=f(x)* приращение $\Delta y \neq 0$ Для обратной функции $x = \varphi(y)$ приращения $\Delta x$

Запишем тождество

$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (1). Переходя к пределу в равенстве (1) при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что

$\Delta x \to 0$ в силу непрерывности обратной функции получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow x'_y = \frac{1}{y^1_x} \qquad (2).$$

Пример $y = x + x^3 \Rightarrow y'_x = 1 + 3x^2 \Rightarrow x'_y = \frac{1}{1+3x^2}$

## Производная функции заданной неявно

Рассмотрим способы нахождения производных функций заданных неявно.

Пример. Найти производную функции *y(y>0),* определенную уравнением (уравнение эллипса)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Разрешая это уравнение относительно $y$ и, выбирая знак плюс в силу начального условия получаем функцию в явном виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Однако в некоторых случаях уравнение элементарными средствами нельзя разрешить относительно $y$ и приходится рассматривать $y$ как неявную функцию от $x$.

Существует другой способ нахождения производной.

Предполагая, что в уравнение подставлено вместо $y$ явное выражение получим тождество: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \equiv 1$, причем $y$ функция от $x$.

Очевидно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$