Системи лінійних рівнянь, умови їх сумісності і визначенності

Метод Гаусса

Типи систем рівнянь

Система лінійних рівнянь називається с*умісною,* якщо вона має розв’язок, и *несумісною,* якщо вона не має розв’язку.

Сумісна система називається *визначенною,* якщо вона має єдинний розв’язок и *невизначенною,* якщо вона має безкінечну множину розвязків.

Две сумісні системи називаються *рівносильними,* якщо вони мають одну і ту ж множину розв’язків.

Метод Гауса

Метод Гауса — класичний метод розвязування системи лінійних алгебраічних рівнянь. Це метод послідовного виключення змінних, коли за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівносильної системи ступенчатого (або трикутного) вигляду, з якого послідовно, починаючи з останніх (по номеру) змінних, знаходять всі останні змінні.

Система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі.

a_{ij} - коефіцієнти при змінних.

b_i - вільні члени (або праві частини)

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

(30 апреля 1777, Брауншвейг — 23 февраля 1855, Гёттинген)

Биография

Дед Гаусса был бедным крестьянином, отец — садовником, каменщиком, смотрителем каналов в герцогстве Брауншвейг. Уже в **двухлетнем возрасте** мальчик показал себя **вундеркиндом**. В **три года** он умел **читать и писать**. Согласно легенде, школьный учитель математики, чтобы занять детей на долгое время, предложил им сосчитать сумму чисел от 1 до 100. Юный Гаусс заметил, что попарные суммы с противоположных концов одинаковы: 1+100=101, 2+99=101 и т. д., и мгновенно получил результат 50х101=5050 .

После 1801 года Гаусс включил в круг своих интересов естественные науки. Катализатором послужило открытие малой планеты Церера ,вскоре после наблюдений потерянной. 24-летний Гаусс проделал (за несколько часов) сложнейшие вычисления по новому, открытому им же методу, и указал место, где искать беглянку; там она, к общему восторгу, и была вскоре обнаружена.

Умер Гаусс 23 февраля 1855 года в Гёттингене.

Елементарні перетворення

До елементарних перетворень системи вінесемо наступне:

1. змінна місцями двох любих рівнянь;
2. множенння обох частин любого з рівнянь на довільне число, відмінне від нуля;
3. додавання до обох частин одного з рівнянь системи відповідних частин другого рівняння, множеня на любе дійсне число.

Загальний випадок

Розглянемо метод Гауса для системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими у випадку, коли існує єдинний розв'язок:

Дана система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

1-ий крок метода Гауса

На першому шаге исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы (1), кроме первого. Пусть коэффициент . Назовем его ведущим элементом. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Получим уравнение:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = b_1^{(1)} \qquad (2)$$

где $a_{1j}^{(1)} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$; $j = 1,2,3$; $b_1^{(1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}}$

Исключим x_1 из второго и третьего уравнений системы (1). Для этого вычтем из них уравнение (2), умноженное на коэффициент при x_1 (соответственно a_{21} и a_{31}).

Система примет вид:

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 &= b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 &= b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 &= b_3^{(1)} \end{aligned} \qquad (3)$$

Верхний индекс $^{(1)}$ указывает, что речь идет о коэффициентах первой преобразованной системы.

2-ой шаг метода Гаусса

На втором шаге исключим неизвестное x_2 из третьего уравнения системы (3)из третьего уравнения системы (3). Пусть коэффициент . Выберем его за ведущий элемент и разделим на него второе уравнение системы (3), получим уравнение:

$$x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 = b_2^{(2)} \qquad (4)$$

где

$$a_{23}^{(2)} = \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}; \qquad b_2^{(2)} = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

Из третьего уравнения системы (3) вычтем уравнение (4), умноженное на $a_{33}^{(1)}$.

Получим уравнение: $a_{33}^{(2)} \cdot x_3 = b_3^{(2)}$

Предполагая, что $a_{33}^{(2)} \neq 0$, находим $x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} = b_3^{3}$

В результате преобразований система приняла вид:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}^{(1)} x_2 + a_{13}{}^{(1)} x_3 = b_1{}^{(1)} \\ \qquad\quad x_2 + a_{23}{}^{(2)} x_3 = b_2{}^{(2)} \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_3 = b_3{}^{(3)} \end{cases} \qquad (5)$$

Система вида (5) называется ***треугольной*.**

Процесс приведения системы (1)Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1Процесс приведения системы (1) к треугольному виду (5) (шаги 1 и 2) называют ***прямым ходом метода Гаусса*.**

Нахождение неизвестных из треугольной системы называют ***обратным ходом метода Гаусса.***

Для этого найденное значение x_3 подставляют во второе уравнение системы (5) и находят x_2. Затем x_2 и x_3 подставляют в первое уравнение и находят x_1.

Если в ходе преобразований системы получается противоречивое уравнение вида *0 = b*, где *b* ≠ 0, то это означает, что система несовместна и решений не имеет.

В случае совместной системы после преобразований по методу Гаусса, составляющих прямой ход метода, система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными будет приведена или к *треугольному* или к *ступенчатому* виду.

<u>Треугольная система</u> имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n \end{cases}$$

Такая система имеет единственное решение, которое находится в результате проведения обратного хода метода Гаусса.

<u>Ступенчатая система</u> имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases}$$

Такая система имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотрим на примере

1. Покажем последовательность решения системы из трех уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ x_1 + 2{,}5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 18 \end{cases}$$

2. Поделим первое уравнение на 2, затем вычтем его из второго (a_{21}=1, поэтому домножение не требуется) и из третьего, умножив предварительно на a_{31}=3

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_2 + 4x_3 = 16 \\ 4{,}5x_2 - 5x_3 = -6 \end{cases}$$

3. Поделим второе уравнение полученной системы на 2, а затем вычтем его из третьего, умножив предварительно на 4,5 (коэффициент при x_2)

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\quad x_2 + 2x_3 = 8 \\ \qquad\qquad -14x_3 = -42 \end{cases}$$

Тогда

x_3=-42/(-14)=3;

x_2=8-2x3=2

x_1=8-0,5x2-2x3=1

Метод Крамера

Метод Крамера—способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причём для таких уравнений решение существует и единственно). Создан Габриэлем Крамером в 1751 году.

Габриэль Крамер

(31 июля 1704, Женева, Швейцария—4 января 1752, Баньоль-сюр-Сез, Франция)

Биография

Крамер родился в семье франкоязычного врача. В 18 лет защитил диссертацию. В 20-летнем возрасте Крамер выставил свою кандидатуру на вакантную должность преподавателя на кафедре философии Женевского университета.

1727: Крамер 2 года путешествовал по Европе, заодно перенимая опыт у ведущих математиков — Иоганна Бернулли и Эйлера, Галлея и де Муавра, Мопертюи и Клеро.

В свободное от преподавания время Крамер пишет многочисленные статьи на самые разные темы: геометрия, история математики, философия, приложения теории вероятностей.

1751: Крамер получает серьёзную травму после дорожного инцидента с каретой. Доктор рекомендует ему отдохнуть на французском курорте, но там его состояние ухудшается, и 4 января 1752 года Крамер умирает.