

# АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ



# Устная работа



1) Последовательность  $(x_n)$  задана формулой  $x_n = n^2$ .  
Какой номер имеет член этой последовательности,  
если он равен 144? 225? 100?

$$144 = 12^2 = x_{12} \quad 225 = x_{15}, \quad 100 = x_{10}$$

Являются ли членами этой последовательности числа  
48? 49? 168?

**48 и 168 не являются членами последовательности,  
49 – является.**

# Устная работа



2) О последовательности  $(x_n)$  известно, что  $x_1=2$ ,  
 $x_{n+1}=3x_n+1$ .

Как называется такой способ задания последовательности? **Рекуррентный способ.**

Найдите первые четыре члена этой последовательности.

$$x_1=2$$

$$x_2=3x_1+1=7$$

$$x_3=3x_2+1=22$$

$$x_4=3x_3+1=67$$

# Устная работа



3) О последовательности  $(a_n)$  известно, что

$$a_n = (n-1)(n+4)$$

Как называется такой способ задания последовательности?

**Формулой  $n$ -ого члена.**

Найдите  $n$ , если  $a_n = 150$ .

**Заметим, что в формуле  $n$ -ого члена множители отличаются друг от друга на 5.**

$$150 = (n-1)(n+4)$$

$$150 = 10 \cdot 15$$

$$n = 11$$

# Установите закономерности в последовательностях



**2, 6, 10, 14, 18, ....**      22, 26

**11, 8, 5, 2, -1, ....**      -4, -7

**5, 5, 5, 5, 5, ....**      5, 5

Найдите для каждой последовательности следующие два члена.

# Этимологический словарь



Термин «прогрессия» имеет латинское происхождение (progressio), что означает «движение вперед» и был введен римским автором Боэцием (VI в.).



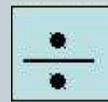
Боэций (слева) на фреске Рафаэля «Афинская школа»

# Арифметическая прогрессия



Опр. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом.

Обозначение арифметической прогрессии



$(a_n)$  - арифметическая прогрессия,

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

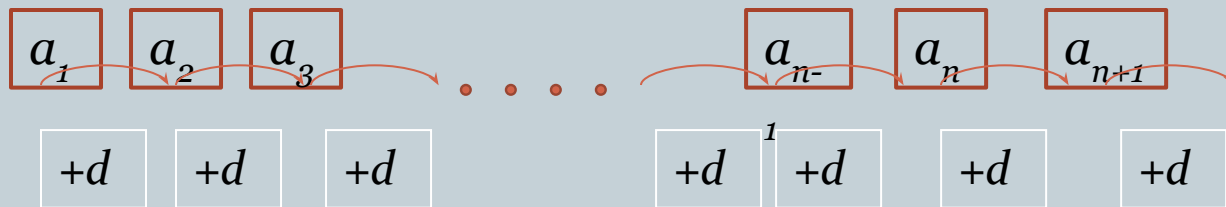
где  $d$ -некоторое число.

# Разность арифметической прогрессии



- Опр. Разность арифметической прогрессии – это число, которое показывает, на сколько следующий член прогрессии отличается от предыдущего. Обозначается  $d$ .

$$d = a_{n+1} - a_n$$





# Свойства прогрессии



2, 6, 10, 14, 18, ...  $d = 4$ ,  $a_{n+1} > a_n$

11, 8, 5, 2, -1, ....  $d = -3$ ,  $a_{n+1} < a_n$

5, 5, 5, 5, 5, ....  $d = 0$ ,  $a_{n+1} = a_n$

- ❑ Если в арифметической прогрессии разность положительна ( $d > 0$ ), то прогрессия является возрастающей.
- ❑ Если в арифметической прогрессии разность отрицательна ( $d < 0$ ), то прогрессия является убывающей.
- ❑ В случае , если разность равна нулю ( $d = 0$ ) и все члены прогрессии равны одному и тому же числу, последовательность называется стационарной.

# Задача

На складе 1 числа было 50 тонн угля. Каждый день в течение месяца на склад приходит машина с 3 тоннами угля. Сколько угля будет на складе 30 числа, если в течение этого времени уголь со склада не расходовался.

Решение:  $a_1 = 50, d = 3$

1 числа: 50 т

2 числа: +1 машина (+3 т)

3 числа: +2 машины (+3·2 т)

.....

30 числа: +29 машин (+3·29 т)

$$a_{30} = a_1 + 29d$$

$$a_{30} = 137$$



# Формула n-ого члена

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

.....

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

# Пример 1



Последовательность  $(a_n)$  - арифметическая прогрессия.  
Найдите  $a_{81}$ , если  $a_1 = 20$  и  $d = 3$ .

Решение:

Воспользуемся формулой  $n$ -ого члена

$$a_{81} = a_1 + d(81 - 1),$$

$$a_{81} = 20 + 3 \cdot 80,$$

$$a_{81} = 260.$$

Ответ: 260.

# Задача



В арифметической прогрессии четные члены оказались стёрты: 3, ..., 7, ..., 11...

Можно ли восстановить утраченные числа?

- Заметим, что  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_5 = a_3 + 2d$ ,  $a_7 = a_5 + 2d$  и т.д.  
Тогда  $d = (a_{n+2} - a_n) : 2$ , то есть  $d = 2$ .
- Искомая последовательность  
3, 5, 7, 9, 11, 13, ...
- Можно ли найти пропущенные члены последовательности, не вычисляя разности?

# Характеристическое свойство арифметической прогрессии



-4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...

5, 10, 15, 20, 25, ...

15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6, -9, ...

# Характеристическое свойство арифметической прогрессии



Пусть  $a_n$  – искомый член последовательности.

Воспользуемся тем, что разность между соседними членами последовательности постоянна:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n,$$

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n+1}) : 2$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

*Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой член этой последовательности, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов.*

# Задача



Последовательность  $(c_n)$ - арифметическая прогрессия. Найдите  $c_{21}$ , если  $c_1=5,8$  и  $d=-1,5$ .

Решение:

Воспользуемся формулой  $n$ -ого члена

$$c_{21}=c_1+d(21-1),$$

$$c_{21}=5,8+(-1,5)\cdot 20,$$

$$c_{21}=-24,2.$$

Ответ: -24,2.





# Задача



Числовая последовательность задана формулой  
 $a_n = 3 + 5n, n = 1, 2, 3, \dots$

Является ли эта последовательность арифметической прогрессией? Если да, то какова ее разность?

Решение:

Поскольку  $a_{n+1} = 3 + 5(n+1) = 3 + 5n + 5 = a_n + 5$ , при всех значениях  $n$ , то последовательность является арифметической прогрессией по определению. Из полученной формулы  $a_{n+1} = a_n + 5$  разность этой прогрессии равна 5.



# Это надо запомнить



Любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  – некоторые числа.

$$a_n = a_1 + d(n-1) = dn + (a_1 - d)$$

Последовательность  $(a_n)$ , заданная формулой вида  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  – некоторые числа, является арифметической прогрессией.

$$a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - (kn + b) = kn + k + b + kn - b = k$$

# Задача



Седьмой член арифметической прогрессии равен 1 и равен разности между четвертым и вторым членами. Найти первый член прогрессии.

Дано:  $a_7 = 1$ ,  $a_7 = a_4 - a_2$ .

Найти:  $a_1$ .

Решение: по условию  $a_7 = a_4 - a_2$ , то есть  $a_7 = 2d$ ,  
но  $a_7 = 1$ , поэтому  $d = 0,5$ .

$$a_7 = a_1 + 6d,$$

$$a_1 = a_7 - 6d,$$

$$a_1 = 1 - 6 \cdot 0,5,$$

$$a_1 = -2$$

