Определители.
Свойства определителей.

Определителем (детерминантом) матрицы n-го порядка называется число:

$$\Delta_n = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

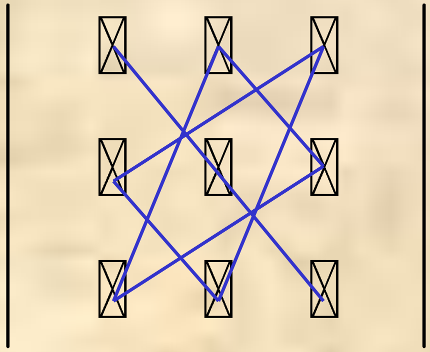
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

- Правило Сарруса:

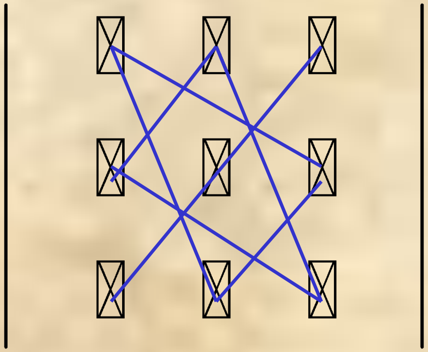
$$\left|\begin{array}{ccc} + & + & + \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & - & - \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

- Правило треугольника:



« + »



« - »

Примеры:

1) $$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 1 = 15 - (-2) = 17$$

2) $$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

3) $$\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Примеры:

$$4)\quad \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 7 \\ 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{matrix} =$$

$$= 4\cdot(-1)\cdot 7 + 7\cdot 5\cdot 5 + (-2)\cdot 3\cdot 0 -$$

$$- 5\cdot(-1)\cdot(-2) - 0\cdot 5\cdot 4 - 7\cdot 3\cdot 7 =$$

$$= -28 + 175 + 0 - 10 - 0 - 147 = -10$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если его транспонировать: $$\det A = \det A^T$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель изменит свой знак на противоположный.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - (-10) = 22$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22$$

3. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 24 \cdot (2 - 9 + 2 - 1 - 12 + 3) = 24 \cdot (-15) = -360$$

4. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 3 + 6 - 6 + 3 - 4 = 0$$

5. Если все элементы двух строк (или столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

6. Если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором- из вторых слагаемых.

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj}+b_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2-1 & 4 \\ 7 & 3-1 & 3 \\ 7 & 2+3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

60   -38 98

7. Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца) , умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 0 = 10$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ \quad + \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-10) = 10$$

8. Треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

Привести определитель к треугольному виду и вычислить его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \;\; \times(-5) \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} + = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -20 \end{vmatrix} = 60$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца.

- Минором M_{ij} элемента a_{ij} det D называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием *i*-ой строки и *j*-го столбца содержащих данный элемент.

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Для данного определителя найти миноры: M_{22}, M_{31}, M_{43}

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -28$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

- Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} det D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

т.е. $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$i - \textit{номер} \quad \textit{строки}$$

$$j - \textit{номер} \quad \textit{столбца}$$

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на их алгебраические дополнения равна этому определителю.

разложение по i-ой строке:

$$\det D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\ , \quad i = 1,\ldots,n$$

разложение по j-му столбцу:

$$\det D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\ , \quad j = 1,\ldots,n$$

Разложить данный определитель по элементам: 1) 3-ей строки; 2) 1-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

1) Разложим данный определитель по элементам 3-ей строки:

$$\det D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{32} \cdot (-1)^5 \cdot M_{32} +$$

$$+ a_{33} \cdot (-1)^6 \cdot M_{33} + a_{34} \cdot (-1)^7 M_{34} =$$

$$=3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 5\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot 36-2\cdot 2-4-4\cdot 11=56$$

2) Разложим данный определитель по элементам 1-го столбца:

$$\det D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^2 \cdot M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^3 \cdot M_{21} +$$

$$+ a_{31} \cdot (-1)^4 \cdot M_{31} + a_{41} \cdot (-1)^5 M_{41} =$$

$$=1\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=-20+0+3\cdot 36-32=56$$

Основные методы вычисления определителя.

- 1. разложение определителя по элементам строки или столбца;
- 2. метод эффективного понижения порядка;
- 3. приведение определителя к треугольному виду.

Метод эффективного понижения порядка:

Вычисление определителя n-го порядка сводится к вычислению одного определителя $(n\text{-}1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду все элементы, кроме одного, равными нулю.

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-3) \quad \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =
$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 14 = 56$$

Вычислить определитель приведением его к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(\text{-}3) & \times(\text{-}1) \\ & \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 2 \\ \\ + \end{matrix} \qquad = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$
=-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{vmatrix} \times(-2)
$$

$$
= 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 4\cdot 14 = 56
$$