ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 5:

СИЛОВОЕ ПОЛЕ, ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ, ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

1. СИЛОВЫЕ ПОЛЯ

Будем называть **силовым полем** область (часть пространства), в каждой точке которой на помещенную в ней материальную точку действует сила, однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$$

Силовое поле называется **нестационарным**, если сила $\boldsymbol{F}$ зависит явно от времени t, и **стационарным**, если сила не зависит от времени t явно. Далее рассматриваем только стационарные силовые поля

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

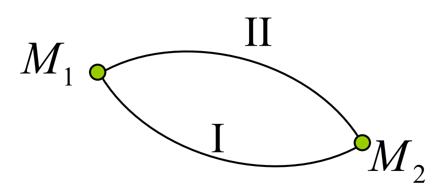
2. СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЕЙ

1. **Работа сил** стационарного поля зависит в общем случае от начального M_1 и конечного M_2 положений и траектории, но **не зависит от закона движения материальной точки по траектории**.

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(q) \\ y &= y(q) \\ z &= z(q) \end{aligned}\right\} \text{уравнение траектории}$$

$$A_{1,2} = \int_{q_1}^{q_2} \left(F_x \frac{dx}{dq} + F_y \frac{dy}{dq} + F \frac{dz}{dq} \right) dq$$



2. При изменении направления движения по траектории работа меняет знак

$$A_{2,1} = -A_{1,2}$$

3. В общем случае работа зависит от траектории Поэтому чтобы воспользоваться теоремой об изменении кинетической энергии нужно знать траекторию.

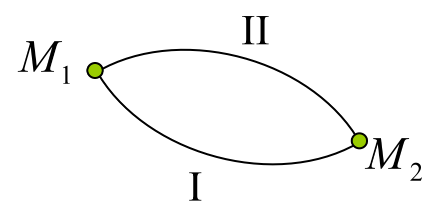
$$A_{1,2}^{I} \neq A_{1,2}^{II}$$

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}}$$

3. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Поля, работа сил которых **не зависит от траектории** движения материальной точки и определяется только положением начальной и конечной точек пути называются **потенциальными** (**консервативными**).

$$A^{I}_{1,2} = A^{II}_{1,2} = A_{1,2}$$



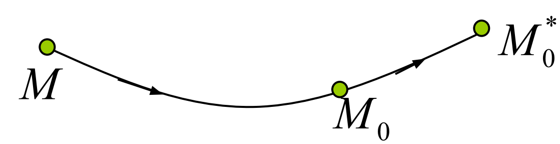
Для потенциальных сил можно ввести понятие **потенциальной энергии** $\Pi(x,y,z)$ как работы сил при движении точки из положения $M(x,y,z)$ в фиксированное положение $M_о$:

$$\Pi(x,y,z) = A_{MM_0}$$

ПЭ определена с точностью до константы. При изменении начальной точки $M_0 \to M_0^*$ потенциальная энергия изменяется как

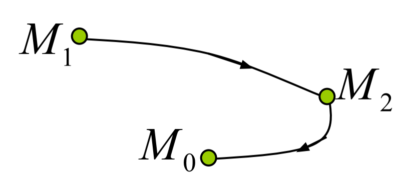
$$\Pi^* \to \Pi + A_{M_0 M_0^*}$$

const



Чтобы пользоваться ТИКЭ не нужно знать траекторию!

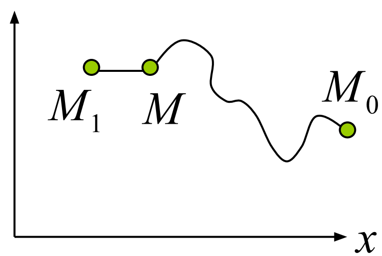
$$A_{1,2} = A_{1,0} + A_{0,1} = A_{1,0} - A_{2,0} = \Pi_1 - \Pi_2$$



4. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ

Для того чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая непрерывная однозначная функция координат Π (x, y, z), что

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}$$



<u>Необходимость:</u>

Пусть поле потенциально. Определим Π как $\Pi(x, y, z) = A_{MM_0}$

$$M(x, y, z) \qquad M_0(x_0, y_0, z_0) \qquad M_1(x+\Delta x, y, z)$$

$$\Pi(x, y, z) - \Pi(x+\Delta x, y, z) = A_{MM_0} - A_{M_1M_0} = A_{MM_1} = \int_x^{x+\Delta x} F_x dx = F_x(x, y, z)\cdot \Delta x + o(\Delta x) \;\Big|\; \div \Delta x$$

$$F_x(x, y, z) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}$$

<u>Достаточность:</u>

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right) = -d\Pi$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} d'A = -\int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = \Pi_1 - \Pi_2$$

5. ГРАДИЕНТ И РОТОР

Если задана скалярная функция $U(x,y,z)$, то вектор, образуемый по формуле

$$\mathrm{grad}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$$

называется **градиентом** функции U

Иная форма записи $\mathrm{grad}\,U = \nabla U$

Здесь ∇ (набла) – дифференциальный оператор Гамильтона $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$

В потенциальном силовом поле сила с точностью до знака равна градиенту потенциала

$$\boxed{\mathbf{F} = -\,\mathrm{grad}\,\Pi}$$

Ротор вектора ***F*** по определению есть

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

6. Как проверить является ли данное поле потенциальным

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

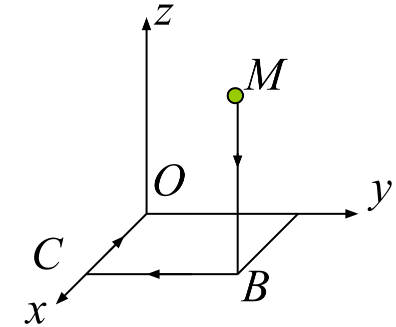
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0}$$

Пример 1: Является ли силовое поле $F_x = -py,\ F_y = px,\ F_z = 0,$ потенциальным?

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -p,\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = p \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} \neq \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

не является

Пример 2: Является ли силовое поле $F_x = xy^2,\ F_y = x^2 y,\ F_z = z^2,$ потенциальным? Если да, то найти потенциал.



$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 2xy,\quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

поле потенциально

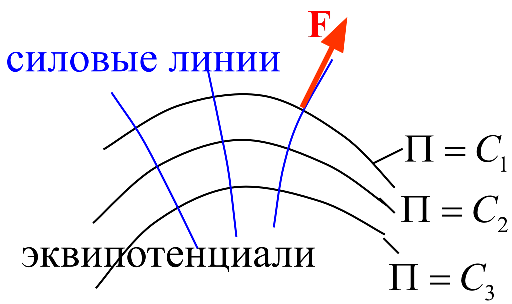
$$\Pi = A_{MO} = A_{MB} + A_{BC} + A_{CO} = \int\limits_{MB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CO}$$

$$\Pi = \int_z^0 F_z(x,y,z)dz + \int_y^0 F_y(x,y,0)dy + \int_x^0 F_x(x,0,0)dx = \int_z^0 z^2 dz + \int_y^0 x^2 y dy = -\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{z^3}{3}$$

7. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОС-ТИ И СИЛОВЫЕ ЛИНИИ

Поверхность $\Pi(x, y, z) = C$, на которой потенциальная функция П имеет постоянное значение, называется **эквипотенциальной поверхностью** или **поверхностью уровня**. Для данного поля эти поверхности образуют семейство с параметром C; давая постоянному C разные значения, мы будем получать разные поверхности уровня, которые в случае, когда функция П однозначна, не могут пересекаться и будут разделять силовое поле на слои

Работа сил поля при перемещении точки из начального положения в конечное, когда оба эти положения находятся на одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю



Силовые линии – линии у которых касательная в каждой точке совпадает с направлением силы, действующей в этой точке

$$d\mathbf{r} \parallel \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

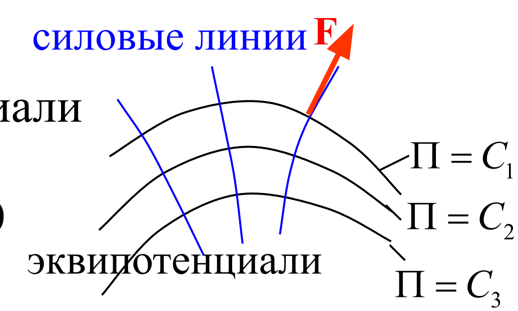
Уравнение силовых линий

Силовые линии ортогональны к эквипотенциальным поверхностям

8. Свойства эквипотенциальных поверхностей

Силовые линии ортогональны к эквипотенциальным поверхностям =
Сила нормальна к эквипотенциальной поверхности =
Градиент функции ортогонален ее линиям уровня

Рассмотрим мат. точку, движущуюся по эквипотенциали



$x = x(t)\quad z = z(t)\quad y = y(t)$ - закон движения точки по эквипотенциали

$$\Pi\big(x(t), y(t), z(t)\big) = C \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 0$$

$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$

$\mathbf{v} \in$ касательной плоскости к эквипотенциали

Сила нормальна к эквипотенциальной поверхности

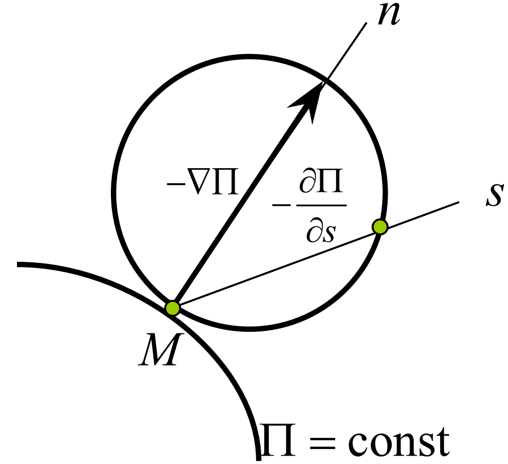
Рассмотрим мат. точку, движущуюся по нормали ***n*** к эквипотенциальной поверхности в сторону действия силы

$$0 < d'A = -d\Pi$$

Вектор силы F (или grad П) направлен в любой точке поля по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону убывания потенциала П.

9. Свойства эквипотенциальных поверхностей

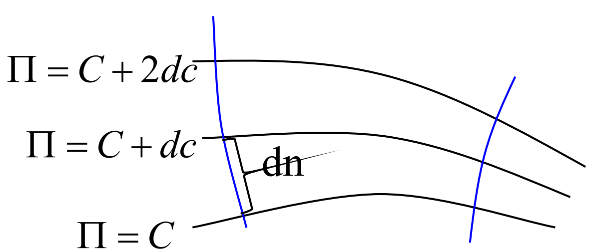
1) Найдем проекцию силы, действующей в точке M поля, на какое-нибудь направление s, проходящее через эту точку и характеризуемое единичным вектором $\mathbf{s}^0$



$$F_s = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}^0 = -\nabla\Pi\cdot\mathbf{s}^0 = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\Pi}{\partial y}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial\Pi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = -\frac{\partial\Pi}{\partial s}$$

$$F = |\nabla\Pi| = -\frac{\partial\Pi}{\partial n}$$

2) Сила (градиент) будет больше в тех точках поля, где расстояние между соседними эквипотенциалями меньше, т. е. где поверхности уровня проходят гуще (теорема Кельвина).



$$F = \left|\frac{dc}{dn}\right|$$

$$F_b > F_a$$

10. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A \xrightarrow{\text{потенциальность}} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi \xrightarrow{\text{интегрирование}} \boxed{\frac{mv^2}{2} + \Pi = \text{const}}$$

ТИКЭ

интеграл энергии

При движении точки под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергии точки, т. е. ее **полная механическая энергия**, остается величиной **постоянной**.

11. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Какое влияние оказывают силы сопротивления на полную механическую энергию?

Относительно силы сопротивления будем предполагать лишь что она всегда направлена противоположно скорости движения точки

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -d\Pi + \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \Pi\right) = \overset{-2D}{\mathbf{F}_c \cdot \mathbf{v}} < 0$$

Полная механическая энергия под действием сил сопротивления убывает (рассеивается, диссипирует)

dissipate
1) рассеивать,
2) транжирить,
проматывать

Силы сопротивления называют еще **диссипативными**.

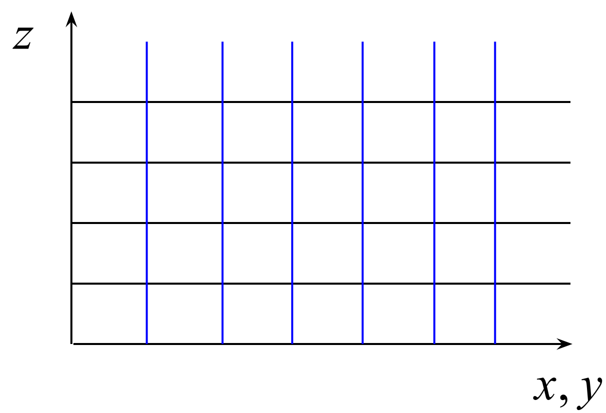
Величину D, численно равную половине механической энергии, убывающей в единицу времени, называют диссипативной функцией.

$$\mathbf{F}_c = -b\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad D = D(v) = \frac{bv^2}{2}$$

12. Примеры потенциаль-ных силовых полей

1) Поле силы тяжести: $F_x = F_y = 0,\ F_z = -mg$

$$-d\Pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mgdz = -d\left(mgz\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Pi = mgz}$$



эквипотенциали

силовые линии

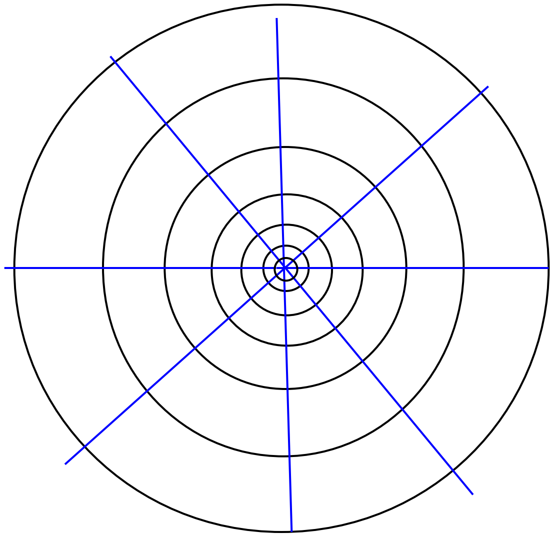
2) Поле центральных сил: $\mathbf{F} = F_r(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$ $\qquad \boxed{\Pi(r) = \int\limits_r^{r_0} F_r(r)dr}$

$$-\nabla\Pi = -\frac{d\Pi}{dr}\nabla r = F_r \nabla r = F_r \frac{\mathbf{r}}{r} \qquad \frac{\partial r}{dx} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

13. Примеры потенциаль-ных силовых полей

2а) Гравитационная сила:

$$F_r(r) = -f\frac{mM}{r^2} \xrightarrow[r_0=\infty]{} \boxed{\Pi(r) = -f\frac{mM}{r}}$$



2б) Квазиупругая сила:

$$F_r(r) = -c(r-a) \xrightarrow[r_0=a]{} \boxed{\Pi(r) = c\frac{(r-a)^2}{2}}$$