Лекция 6

ПЛАН ЛЕКЦИИ

1. *Энергия магнитного поля (самостоятельно).*
2. *Вихревое электрическое поле.*
3. *Ток смещения.*
4. *Уравнения Максвелла.*

ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Проводник с индуктивностью L, по которому течет ток I, обладает энергией

$$\boxed{W = LI^2/2}$$

Энергия локализована в возбуждаемом током магнитном поле. Это *магнитная энергия тока* или *собственная энергия тока*.

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Изменяющееся во времени магнитное поле вызывает появление в контуре сторонних сил, действующих на носители тока. Максвелл: ***переменное магнитное поле порождает электрическое поле.*** В итоге в неподвижном контуре возникает индукционный ток. Это *вихревое поле*.

Свойства вихревого электрического поля.

Воспользуемся определением ЭДС. Для электростатического поля ЭДС это *циркуляция вектора напряженности поля по замкнутому контуру:*

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = \mathcal{E}$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

По Максвеллу изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле $\boldsymbol{E}_B$, которое является источником ЭДС:

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = \oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = \oint_L E_{Bl}\, dl$$

где E_{Bl} - проекция вектора $\boldsymbol{E}$ на направление $\boldsymbol{dl}$.

Потоком вектора магнитной индукции (магнитным потоком) через ограниченную контуром поверхность $\boldsymbol{S}$ называется величина

$$\Phi_B = \int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \int_S B_n dS$$

Итог:

$$-\frac{d}{dt}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = \oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right)$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\frac{d}{dt}\int_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right)$$

(поменяли местами операции дифференцирования и интегрирования).

Символ частных производных означает, что в общем случае вектор $\vec{B}$ является функцией не только времени, но и координат.

<u>Сведения из теории электростатического поля</u>.

В случае электростатического поля ЭДС замкнутого контура равна нулю. Это означает, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля E_q по замкнутому контуру равна нулю:

$$\oint_L \left(\vec{E}_q, d\vec{l}\right) = 0$$

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

$$\oint_L \left(\vec{E}_q, d\vec{l}\right) = 0$$

Следовательно, линии напряженности электростатического поля E_q <u>не могут быть замкнутыми</u>, они начинаются и заканчиваются на зарядах, либо уходят в бесконечность.

$$\oint_L \left(\vec{E}_q, d\vec{l}\right) = 0$$

$$\oint_L \left(\vec{E}_B, d\vec{l}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S}\right)$$

Различие между электростатическим и вихревым полями: циркуляция вектора E_B в отличие от циркуляции вектора E_q не равна нулю.

Следовательно, электрическое поле E_B, возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле, является *вихревым*. Линии напряженности электрического поля E_B замкнуты.

ВИХРЕВОЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

В общем случае электрическое поле может быть как *потенциальным*, так и *вихревым*. Электрическое поле может слагаться из поля $\boldsymbol{E}_q$, создаваемого зарядами, и поля $\boldsymbol{E}_в$, обусловленного переменным во времени магнитным полем.

ТОК СМЕЩЕНИЯ

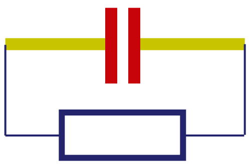
Единая теория электрических и магнитных явлений создана Максвеллом. Основа теории - идея Максвелла о симметрии во взаимозависимости электрического и магнитного полей.

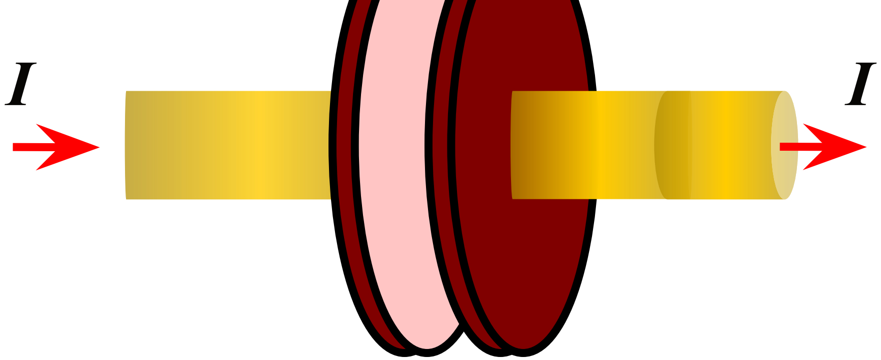
Предположение Максвелла: если меняющееся во времени магнитное поле $\partial\vec{B}/\partial t$ создает электрическое поле, то переменное электрическое поле $\partial\vec{E}/\partial t$ тоже должно создавать магнитное поле.

Для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем Максвелл ввел в рассмотрение *ток смещения*.

ТОК СМЕЩЕНИЯ

Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую плоский конденсатор





Пусть предварительно заряженный конденсатор разряжается через внешнее сопротивление.

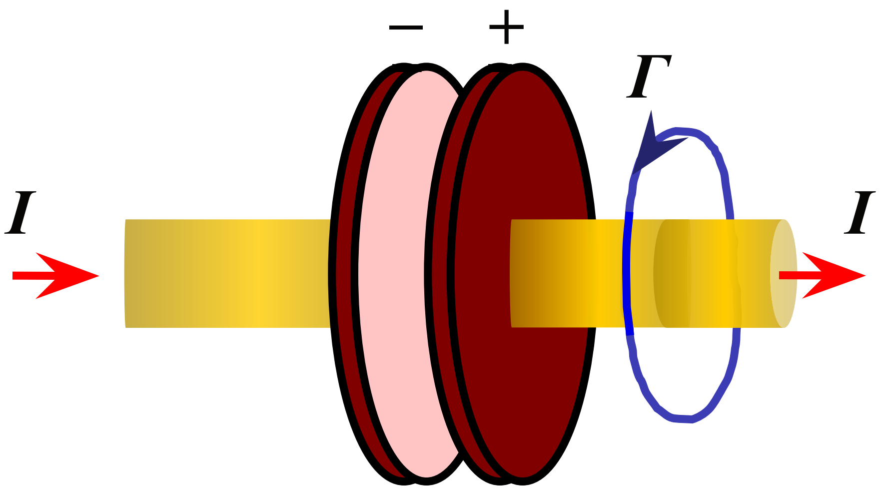
В подводящих проводах потечет ток I.

Применим теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$:

$$\oint\limits_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int\limits_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = I$$

(Циркуляция вектора $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром)

ТОК СМЕЩЕНИЯ

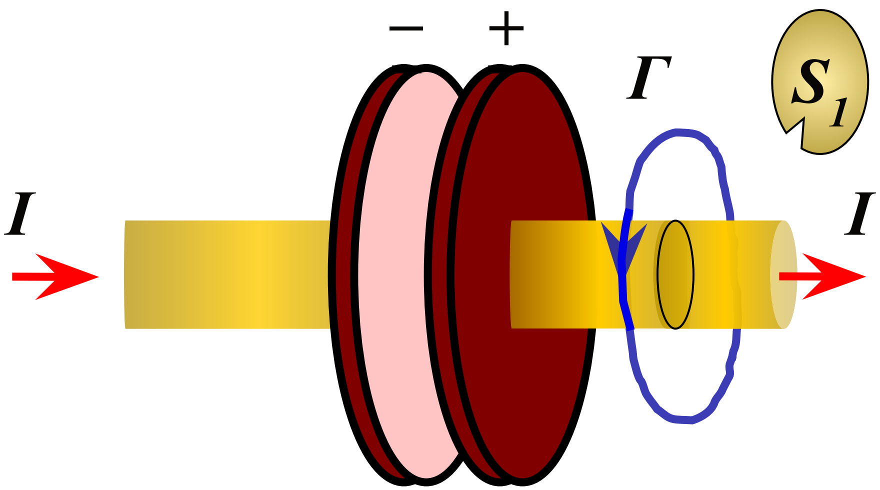


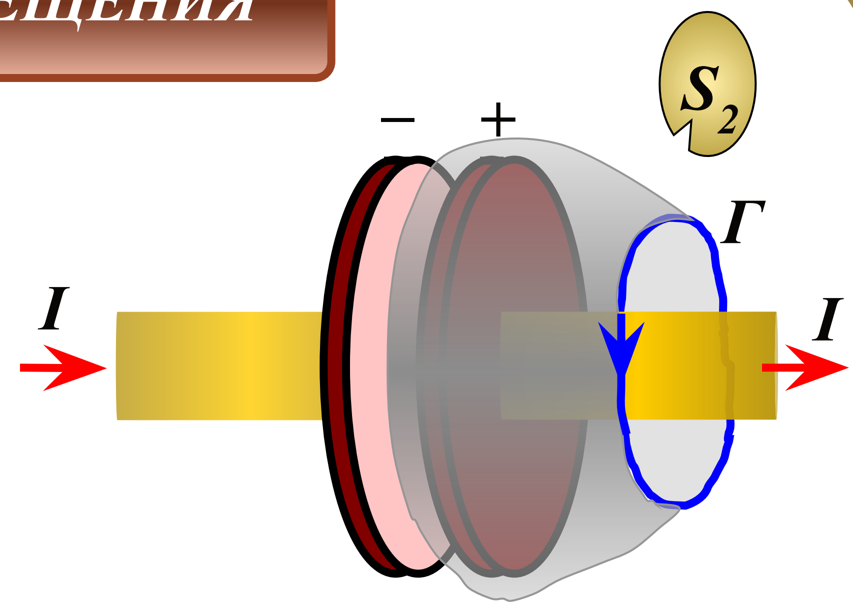
Выберем контур *Г*, охватывающий подводящий провод, зададим направление обхода контура.

Для того чтобы применить теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, нужно выбрать поверхность, натянутую на контур *Г*.

Циркуляция вектора $\vec{H}$ от формы этой поверхности не должна зависеть, поэтому рассмотрим две поверхности, натянутые на контур.

ТОК СМЕЩЕНИЯ



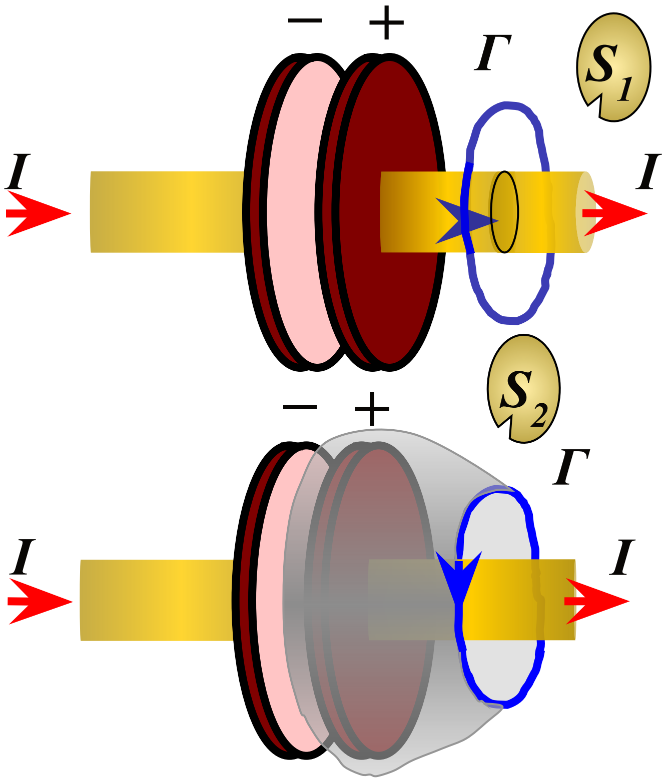


Поверхность S_1 пересекает провод с током.

Поверхность S_2 не пересекает провод с током.

Видим, что через поверхность S_1 течет ток проводимости I, а через поверхность S_2 тока нет, поскольку линии тока проводимости терпят разрыв в промежутке между обкладками конденсатора.

ТОК СМЕЩЕНИЯ



Получается, что циркуляция вектора $\vec{H}$ зависит от формы поверхности, которую мы натягиваем на контур *Г*, чего не может быть.

Вывод: в случае изменяющихся во времени полей примененное уравнение перестает быть справедливым.

$$\cancel{\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\vec{j}, d\vec{S}\right) = I}$$

Для разрешения возникшего противоречия Максвелл ввел в правую часть этого уравнения дополнительное слагаемое, которое назвал *плотностью тока смещения.*

ТОК СМЕЩЕНИЯ

Получим выражение для тока смещения.

Обратим внимание на то, что поверхность S_2 пронизывает только электрическое поле.

Для постоянного электрического поля по теореме Гаусса поток вектора $\vec{D}$ сквозь замкнутую поверхность S равен:

$$\oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q$$

Для переменного поля из теоремы Гаусса следует:

$$\oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right) = \frac{\partial q}{\partial t}$$

Уравнение непрерывности:

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Уравнение непрерывности выражает закон сохранения заряда.

ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S}\right) = \frac{\partial q}{\partial t}$$

$$+$$

$$\oint_S (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}$$

Сложим отдельно левые и правые части уравнений, получим

$$\oint_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right) = 0$$

Это уравнение схоже с уравнением непрерывности для постоянного тока. Кроме плотности тока проводимости $\vec{j}$ в нем имеется еще одно слагаемое $\partial \vec{D}/\partial t$ с размерностью плотности тока. Это слагаемое и называется *плотностью тока смещения:*

$$\boxed{\vec{j}_{см} = \partial \vec{D}/\partial t}$$

Сумму токов проводимости и смещения называют *полным током*:

$$I_{полн} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

ТОК СМЕЩЕНИЯ

$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - плотность полного тока.

В соответствии с выражением $\oint\limits_S \left(\left(\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), d\vec{S} \right) = 0$ линии полного тока являются непрерывными в отличие от линий тока проводимости. Токи проводимости, если они не замкнуты, замыкаются токами смещения.

Введение полного тока позволяет разрешить противоречие, возникшее при попытке применить теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, записанную для постоянных токов.

Для произвольного случая эта теорема будет иметь вид:

$$\boxed{\oint\limits_L \left(\vec{H}, d\vec{l} \right) = \int\limits_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}}$$

ТОК СМЕЩЕНИЯ

$$\vec{j}_{см} = \partial\vec{D} / \partial t$$

Термин «ток смещения» - условный. По существу, это изменяющееся со временем электрическое поле.

Этот ток имеет только одно свойство тока проводимости – способность создавать магнитное поле. Токи смещения существуют лишь там, где имеется переменное во времени электрическое поле.

Открытие Максвеллом тока смещения – это чисто теоретическое открытие, имевшее чрезвычайно важное значение для построения теории электромагнитного поля.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений – ***макроскопическую теорию электромагнитного поля.***

Теория Максвелла не только объясняла с единой точки зрения все разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

В основе теории - четыре фундаментальных уравнения. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Решение уравнений Максвелла дает возможность в любой момент времени найти параметры электрических и магнитных полей.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла.

1. $$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right)$$ $$\boxed{rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.

Поскольку электрическое поле может быть как потенциальным $\vec{E}_q$, так и вихревым $\vec{E}_B$, в первом уравнении Максвелла $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$.

Первое уравнение показывает, что источником электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

Первое уравнение – это по сути, закон Фарадея.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла.

2. $\oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0$ (лекция 2) $div\,\vec{B} = 0$

Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

Это теорема Гаусса для магнитного поля.

Магнитное поле не имеет стоков и истоков, линии поля не имеют ни начала ни конца. Магнитное поле называют *соленоидальным* или *вихревым*.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла.

3. $$\oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = \int_S \left(\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right), d\vec{S}\right)$$

(раздел «Ток смещения» настоящей лекции)

$$rot\,\vec{H} = \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$$

Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную этим контуром.

Под полным током понимается сумма токов проводимости и смещения. Уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Уравнения Максвелла.

4. $$\oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = \int_V \rho dV$$

(лекция 16 «Диэлектрики» 1 семестра).

$$div\,\vec{D} = \rho$$

Поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность в произвольной среде равен стороннему заряду, заключенному внутри поверхности.

Это постулат Максвелла, выражающий закон создания электрических полей действием зарядов в произвольных средах. Постулат записан в общем виде, для стороннего заряда, распределенного внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Из уравнений Максвелла следует:

- источниками электрического поля являются электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля.

- источниками магнитного поля являются движущиеся заряды (электрические токи), либо переменные электрические токи.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно магнитных и электрических полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для *стационарных полей* ($E = const$ и $B = const$) уравнения Максвелла примут вид:

$$\oint_L \left(\vec{E}, d\vec{l}\right) = 0\,; \qquad \oint_S \left(\vec{B}, d\vec{S}\right) = 0\,; \qquad \oint_L \left(\vec{H}, d\vec{l}\right) = I\,; \qquad \oint_S \left(\vec{D}, d\vec{S}\right) = q\,.$$