Уральский федеральный университет

$C_i(x),\ i=\overline{1,n}$:

ФСР для ОЛДУ: $\{y_1(x), y_2(x), \dots, y_n\}$

Математика

ОЛДУ

$$\begin{cases} C_1'\cdot y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0 \\ \dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2'\cdot y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Лекция 12

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $\boxed{y'''}-\boxed{y''}=e^x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

Решение: НЛДУ 3 порядка

1) ОЛДУ:

$y''' - y'' = 0 \Rightarrow$ Хар-е ур-е: $\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 1) = 0$

$\lambda_{1,2} = 0 \quad \lambda_3 = 1 \Rightarrow$ ФСР $= \{1, x, e^x\}$

$// e^{\lambda x}$

$y_{оо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$

2) НЛДУ. Метод вариации произв. пост. (Лагранжа)

$y_{он} = C_1(x) + C_2(x)\cdot x + C_3(x)\cdot e^x$ – реш. НЛДУ $\Rightarrow$ подст-м в НЛДУ

y': $y' = C_1' + C_2' x + C_2 + C_3' e^x + C_3 e^x$

$C_1' + C_2' \cdot x + C_3' \cdot e^x = 0 \quad (1)$

$(-1)\cdot y''$: $y'' = (C_2 + C_3 e^x)' = C_2' + C_3' e^x + C_3 e^x$

$+$

$C_2' + C_3' e^x = 0 \quad (2)$

$1 \cdot y'''$: $y''' = (C_3 e^x)' = C_3' e^x + C_3 e^x$

$C_3' \cdot e^x + C_3 e^x - C_3 e^x = e^x$

$C_3' e^x = e^x \quad (3)$

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y'''-y''=e^x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

$$\begin{cases} C_1' + C_2'\cdot x + C_3'\cdot e^x = 0 \\ C_2' + C_3' e^x = 0 \\ C_3'\cdot e^x = e^x \end{cases}$$

ФСР

y_i'

y_i''

$$C_1'\,1 + C_2' x + C_3' e^x = 0$$

$$C_2'\cdot 1 + C_3' e^x = 0$$

$$C_3' e^x = e^x$$

3) $C_3' = 1 \Rightarrow C_3 = x + \tilde{C}_3$

2) $C_2' + e^x = 0 \Rightarrow C_2' = -e^x \Rightarrow C_2 = -e^x + \tilde{C}_2$

1) $C_1' - e^x\cdot x + e^x = 0 \Rightarrow C_1' = e^x(x-1) \Rightarrow C_1' = \int e^x(x-1)\,dx =$

$$= \left[\begin{array}{l|l} u = x-1 & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{array}\right] = e^x(x-1) - \underbrace{\int e^x dx}_{e^x} = e^x(x-2) + \tilde{C}_1$$

$$y_{он} = e^x(x-2) + \tilde{C}_1 + (-e^x + \tilde{C}_2)\cdot x + (x + \tilde{C}_3)\cdot e^x =$$

$$= e^x\cdot x + e^x(\underbrace{-2 + \tilde{C}_3}_{\tilde{C}_3}) + \tilde{C}_2\cdot x + \tilde{C}_1$$

Отв: $y_{он} = e^x\cdot x + C_2\cdot x + C_3 e^x + C_1$

Метод подбора частного решения НЛДУ с п/к по виду правой части

Пусть $L[y] = f(x)$ – НЛДУ с п/к,

где $f(x) = \underbrace{e^{\alpha \cdot x}}[\underbrace{P_n(x)}\underbrace{\cos \beta x} + \underbrace{Q_m(x)}\underbrace{\sin \beta x}]$ – квазиполином, причём α, $\beta \in R$,

! параметры α, β, n, m

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i, \quad Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j$$ – многочлены.

Тогда частное решение НЛДУ ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = e^{\alpha \cdot x}[\tilde{P}_k(x) \cdot \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \cdot \sin \beta x] \cdot \boxed{x^r},$$

где α, β – известные числа, $\tilde{P}_k(x)$, $\tilde{Q}_k(x)$ многочлены степени $k = max(m, n)$ с неопределёнными коэффициентами, которые находятся из данного дифференциального уравнения;

r – кратность корня $\alpha+\beta\, i$ среди корней характеристического уравнения ОЛДУ с п/к соответствующего НЛДУ (показывает сколько раз число $\alpha+\beta\, i$ совпадает с корнем характеристического уравнения λ).

λ_i из ОЛДУ

($\alpha \pm \beta i$ совп-т с $\alpha \pm \beta i = \lambda$ 1 раз)

$\tilde{y}_{чн}$

Рекомендации к подбору частного решения НЛДУ сведены в таблицу

α, β, n, m

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}[\underbrace{P_n(x)} \underbrace{\cos\beta x}_{1} + Q_m(x) \underbrace{\sin\beta x}]$$

	$f(x)$	$\mu = \alpha \pm \beta \cdot j$	Свойство числа μ	Вид $\tilde{y}(x)$
	$P_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k}$ $\Downarrow$ / x^3+2x-3	$\alpha=0$ $\beta=0$ $\boxed{0}$	$0 \notin \{\lambda\}$	$\tilde{y}(x) = \tilde{P}_n(x)$ / $\tilde{y} = Ax^3+Bx^2+Cx+D$
			$0 \in \{\lambda\}$ и является k – кратным корнем	$\tilde{y}(x) = \tilde{P}_n(x) \cdot x^k$ / $\tilde{y} = (Ax^3+Bx^2+Cx+D) \cdot x^k$

Рекомендации к подбору частного решения НЛДУ сведены в таблицу

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$$

$P_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}$ / $e^{-x}(x^2+4)$	$\beta=0$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \notin \{\lambda\}$	$\tilde{y}(x) = \tilde{P}_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}$ / $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)\cdot e^{-x}$
		$\alpha \in \{\lambda\}$ α – k-кратный корень	$\tilde{y}(x) = \tilde{P}_n(x)\cdot e^{\alpha\cdot x}\cdot x^k$ $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{-x}\cdot x^k$

Рекомендации к подбору частного решения НЛДУ сведены в таблицу

$$f(x) = e^{\alpha\cdot x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$$

max

$P_n(x)\cdot\cos\beta x$ или $P_n(x)\cdot\sin\beta x$ $/\ f_1 = \underline{x\cdot\cos 2x} + 0\cdot\sin 2x$	$\alpha = 0$ $\boxed{\beta\cdot j}$	$\beta\cdot j \notin \{\lambda\}$	$\tilde{y}(x) = P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_n(x)\cdot\sin\beta x$ $f_1 \to \tilde{y}_1 = (Ax+B)\cdot\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$ $f_2 \to \tilde{y}_2 = (Ax+B)\cdot\cos 3x + (Cx+D)\sin 3x$
		$\beta\cdot j \in \{\lambda\}$ $\beta\cdot j$ – k-кратный корень	$\tilde{y}(x) = (P_n(x)\cdot\cos\beta x + Q_n(x)\cdot\sin\beta x)\cdot x^k$

$f_2 = 2\cos 3x - x\sin 3x$

Рекомендации к подбору частного решения НЛДУ сведены в таблицу

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$$

$e^{\alpha \cdot x}P_n(x)\cdot\cos\beta x$ или $e^{\alpha \cdot x}Q_n(x)\cdot\sin\beta x$	$\alpha \pm \beta\cdot j$	$\alpha \pm \beta\cdot j \notin \{\lambda\}$	$\tilde{y}(x) = e^{\alpha \cdot x}[\tilde{P}_n(x)\cdot\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\cdot\sin\beta x]$, где $\tilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{a}_k\cdot x^k$, $\tilde{Q}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\tilde{b}_k\cdot x^k$, $\forall k\ \tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ – неопределённые коэффициенты
		$\alpha + \beta\cdot j \in \{\lambda\}$ и является k-кратным корнем	$\tilde{y}(x) = e^{\alpha \cdot x}[\tilde{P}_n(x)\cdot\cos\beta x + \tilde{Q}_n(x)\cdot\sin\beta x]\cdot x^k$ $\tilde{y} = (\cdots)\cdot x^k$

Пример. Решить уравнение $\boxed{y'''}-\boxed{y''}=e^x$. ~~НЛДУ~~ 3 пор.

1) ОЛДУ: $y_{oo}=C_1+C_2x+C_3e^x$ // $\lambda_{1,2}=0$, $\lambda_3=1$

2) Метод подбора $y_{чн}$:

$f(x)=e^x=e^{1\cdot x}(1\cdot\cos(0\cdot x)+1\cdot\sin(0x))$.

$\alpha=1,\ \beta=0 \Rightarrow \boxed{\mu=\alpha+\beta i=1.}$ Сравним с λ_i $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 совпадение

$\tilde{y}_{чн}=x^1\cdot(e^x\cdot A)$

$\tilde{y}=A\cdot x\cdot e^x$ Найдём A $\Rightarrow$ подст-м в НЛДУ

$\tilde{y}'=Ae^x+Axe^x=Ae^x(x+1)$

$(-1)\cdot\ \tilde{y}''=Ae^x(x+1)+Ae^x=Ae^x(x+2)$

$+\ 1\cdot\ \tilde{y}'''=Ae^x(x+2)+Ae^x=Ae^x(x+3)$

$Ae^x\cdot 1=e^x \Rightarrow A=1 \Rightarrow \tilde{y}_{чн}=e^x\cdot x$

3) $y_{он}=y_{oo}+\tilde{y}_{чн} \Rightarrow \underline{y_{он}=C_1+C_2x+C_3e^x+e^x\cdot x}$ Отв.

~~Пример~~.

$$f(x) = \underset{\substack{\parallel \\ P_0(x)}}{2} \Rightarrow \tilde{y} = A \quad (\text{совп нет})$$

$$f(x) = 3 - x^4 \Rightarrow \tilde{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$$

Теорема (о суперпозиции решений)

Пусть $L_n[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Функция $y_1(x)$ – решение НЛДУ $L_n[y] = f_1(x)$,

$y_2(x)$ – решение НЛДУ $L_n[y] = f_2(x)$.

Тогда $y_1(x) + y_2(x)$ – решение НЛДУ $L_n[y] = f_1(x)+f_2(x)$.

(Доказательство состоит в проверке того, что функция $y_1(x) + y_2(x)$– решение исходного НЛДУ.)

Эта теорема справедлива и для большего количества функций $f_i(x)$ $(i = 1,\ldots,n)$.

Пример: $f(x) = \boxed{e^x \cdot \sin 2x} - x \cdot \cos 3x + \sin 2x - 3.$

$f_1 = e^x \cdot \sin 2x$, $f_2 = -x \cos 3x$ $f_3 = \sin 2x$ $f_4 = -3$

Пример. Решить задачу Коши $y''' - y'' = \boxed{x-1} + \boxed{2\cos x} + \boxed{e^x}$ при начальных условиях $y(0)=0$, $y'(0)=y''(0)=1$.

1) ОЛДУ: $y_{оо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$ $(\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=1)$

2) НЛДУ:

I

$y''' - y'' = x - 1$ (1)

$f(x) = x - 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=0\end{matrix}\right\}\ \mu=0$

2 совпадения с $\lambda_1=\lambda_2=0$

$\tilde{y}_1 = x^2(Ax+B) = Ax^3 + Bx^2$

подст-м в (1)

$\tilde{y}_1' = 3Ax^2 + 2Bx$

$\tilde{y}_1'' = 6Ax + 2B \quad \cdot(-1)$

$\tilde{y}_1''' = 6A \quad \cdot 1 \quad +$

$-6Ax + 6A - 2B = x - 1$

x^1: $-6A = 1 \Rightarrow A = -1/6$

x^0: $6A - 2B = -1$

$B = 0$

$\boxed{\tilde{y}_1 = -\frac{x^3}{6}}$

II

$y''' - y'' = 2\cos x$

III

$y''' - y'' = e^x$

Интегрирование ЛДУ с переменными коэффициентами, сводящееся к ЛДУ с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение Эйлера

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot x \cdot y' + a_n \cdot y = 0,$$

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in R.$$

С помощью подстановки $x = e^t$ уравнение Эйлера приводится к ЛДУ с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примере уравнения 2го порядка:

$$x^2 \cdot y'' + a_1 \cdot x \cdot y' + a_2 \cdot y = f(x).$$

Заменяем $x = e^t$. Тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{(e^t)'_t} = \frac{y'_t}{e^t} = \frac{y'_t}{x} \Rightarrow y'_t = y'_x \cdot x;$$

$$y''_{tt} = \left(y'_x \cdot x \right)'_t = y''_{xx} \cdot x'_t \cdot x + y'_x \cdot x'_t = \quad y''_{xx} \cdot x^2 + y'_x \cdot x = y''_{xx} \cdot x^2 + y'_t$$

Подставим эти значения в уравнение Эйлера:

$$y''_{tt} = y''_{xx} \cdot x^2 + y'_t \Rightarrow y''_{tt} - y'_t = y''_{xx} \cdot x^2$$

и получим ЛДУ с постоянными коэффициентами.

$$y''_{tt} - y'_t + a_1 y'_t + a_2 \cdot y = f(e^t) \quad \text{или} \quad y''_{tt} + (a_1 - 1) y'_t + a_2 \cdot y = f(e^t)$$

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 \cdot y'' + 3 \cdot x \cdot y' + y = \ln x \sin(\ln x) + \cos(\ln x).$$

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2 y''' - 3xy'' + 3y' = \ln x \sin(\ln x) + \cos(\ln x).$$