# ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Лекція 3

# ПЛАН

- Момент інерції тіла
- Таблиця моментів інерції тіл правильної форми
- Теорема Штейнера
- Кінетична енергія тіла, що обертається
- Момент сили
- Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла
- Закон збереження моменту імпульсу

# Момент інерції тіла

Будь-яке тверде тіло (ТТ) можна умовно поділити на таку кількість N малих частин, щоб розміри їх були малі порівняно з розмірами цього тіла. Тоді ТТ можна розглядати як систему з *N* матеріальних точок (МТ), а маса ТТ дорівнюватиме

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

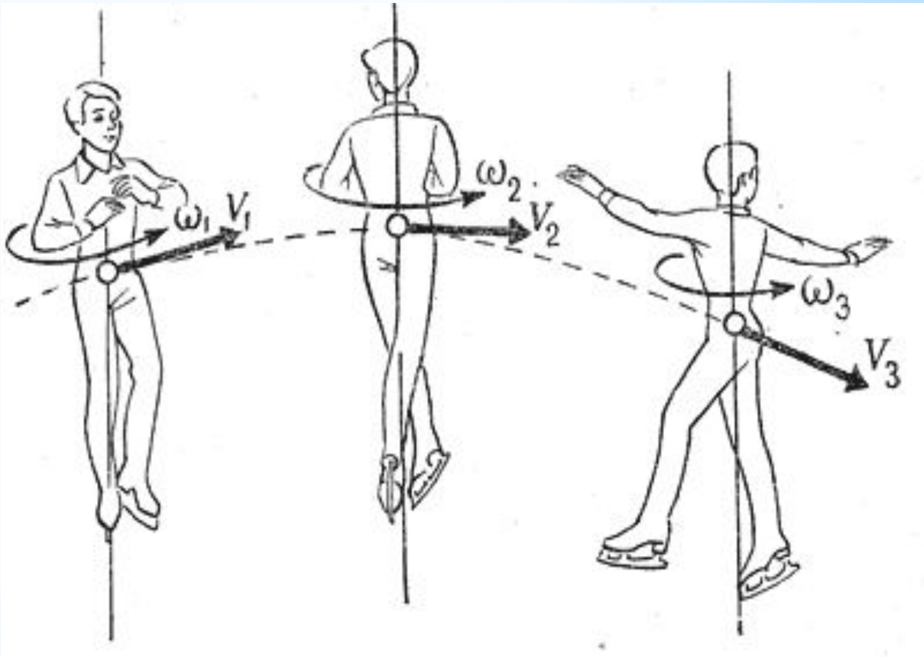
(маса – адитивна, тобто маса тіла дорівнює арифметичній сумі мас його окремих частин)

# Момент інерції тіла

При вивченні обертального руху ТТ користуються поняттям моменту інерції. Воно базується на уявленні про масу як міру інертності. У випадку обертального руху не досить знати, якою є маса тіла.

Необхідно також знати, як маса розподілена відносно осі обертання.

Наприклад, у фігурному катанні, якщо спортсмен складає руки вздовж тіла, то швидкість його обертання збільшується, коли руки розводить - сповільнюється. Маса ж залишається однаковою в обох випадках. **Змінюється розподіл маси відносно осі обертання**. При цьому якраз і відбувається зміна моменту інерції.



# Момент інерції тіла

**Моментом інерції матеріальної точки** масою $m_i$ відносно осі обертання **z** називається фізична величина, що дорівнює добутку маси МТ на квадрат її відстані до осі обертання Z

$$J_{zi} = m_i \cdot r^2$$

**Моментом інерції тіла** (системи тіл) відносно осі обертання Z називається скалярна ФВ рівна сумі добутків мас всіх МТ системи на квадрати їх відстаней до осі обертання Z

$$J_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

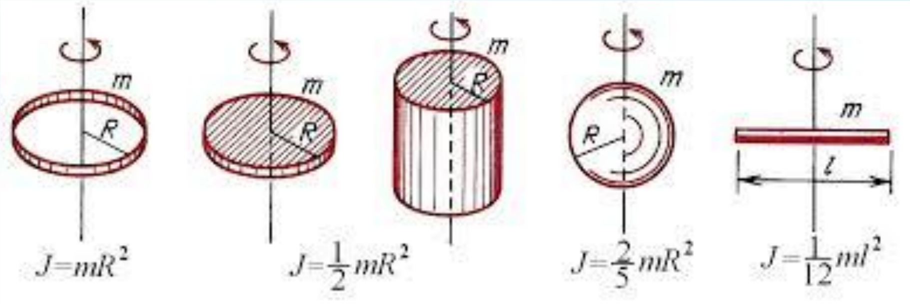
У випадку неперервного розподілу мас ця сума зводиться до інтегралу

$$J_z = \int r^2 \, dm$$

# Моменти інерції тіл правильної форми

| Тіло | Положення осі обертання | Момент інерції |
|---|---|---|
| Полий тонкостінний циліндр радіусом R | Вісь симетрії | $mR^2$ |
| Суцільний циліндр або диск радіусом R | Вісь симетрії | $1/2\ mR^2$ |
| Прямий тонкий стержінь довжиною l. | Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його середину | $1/12\ mR^2$ |
| Прямий тонкий стержінь довжиною l | Вісь перпендикулярна до стержня і проходить через його кінець | $1/3\ mR^2$ |
| Куля радіусом R | Вісь проходитьчерез центр кулі | $2/5\ mR^2$ |

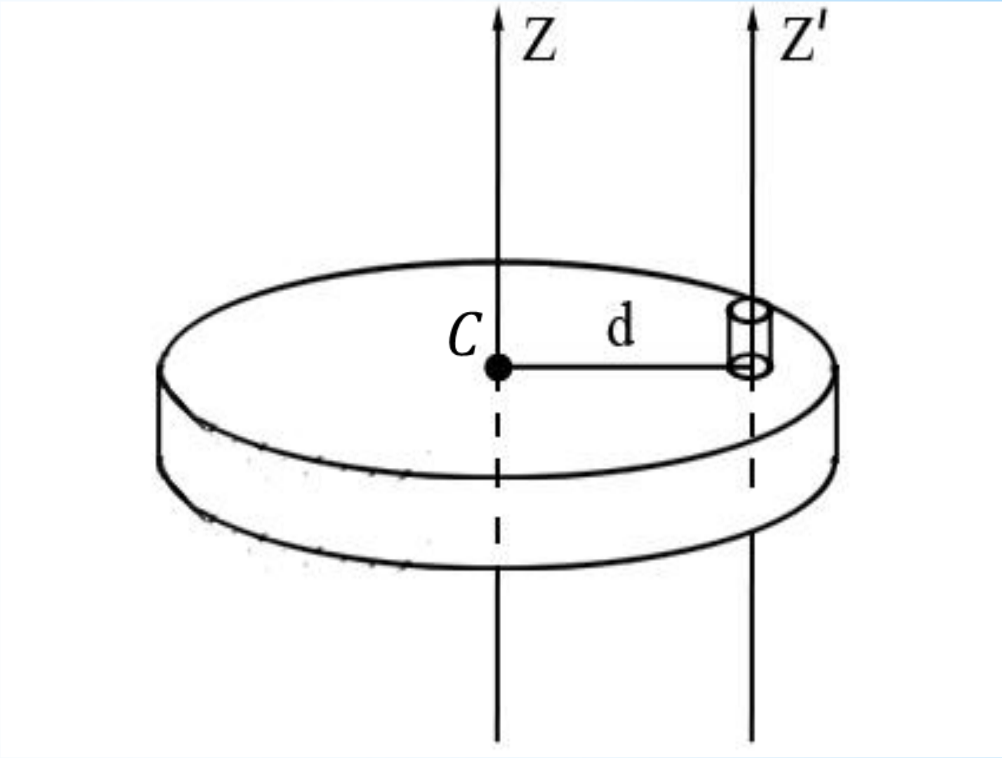
$$J_z = \int r^2\ dm$$



# Теорема Штейнера

дозволяє знаючи момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас, визначити момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної до неї осі:

момент інерції тіла $J_a$ відносно довільної осі обертання дорівнює сумі моменту інерції цього тіла $J_c$ відносно паралельної їй осі , яка проходить через центр мас (С), та добутку маси ***m*** тіла на квадрат відстані ***d*** між осями




$$J_a = J_c + md^2$$

# Кінетична енергія тіла, що обертається

Нехай маємо ТТ, що обертається навколо осі $z$. Уявно розділимо його на $n$ маленьких об'ємів з елементарними масами $m_i$ , які розташовані на відстані $r_i$ від осі обертання. При обертанні ТТ відносно нерухомої осі його елементарні об'єми будуть описувати кола різних радіусів $r_i$ і відповідно мати різні лінійні швидкості $v_i$. Але оскільки ми розглядаємо абсолютно тверде тіло (АТТ), то кутова швидкість обертання цих об'ємів однакова, отже для усіх елементарних об'ємів (а їх можна вважати МТ)

$$\omega = \frac{v_i}{r_i}$$

Кінетичну енергію елементарного об'єму масою $m_i$ визначають, як

$$W_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

# Кінетична енергія тіла, що обертається

Тоді кінетичну енергію ТТ, що обертається визначають, як суму кінетичних енергій усіх його точок

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Врахувавши зв’язок між лінійною та кутовою швидкостями, здійснимо наступні математичні перетворення:

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}$$

## Кінетична енергія тіла, що обертається

При порівнянні виразів для кінетичних енергій поступального і обертального рухів видно, що при обертальному русі момент інерції є аналогом маси при поступальному, тобто

***момент інерції є мірою інертності тіла при його обертальному русі***!

Якщо ж маємо складний рух, наприклад куля масою ***m*** котиться по похилій площині без ковзання, тобто приймає участь як в поступальному, так і у обертальному рухах одночасно, то повна кінетична енергія складається із суми відповідних енергій поступального руху та енергії обертання:

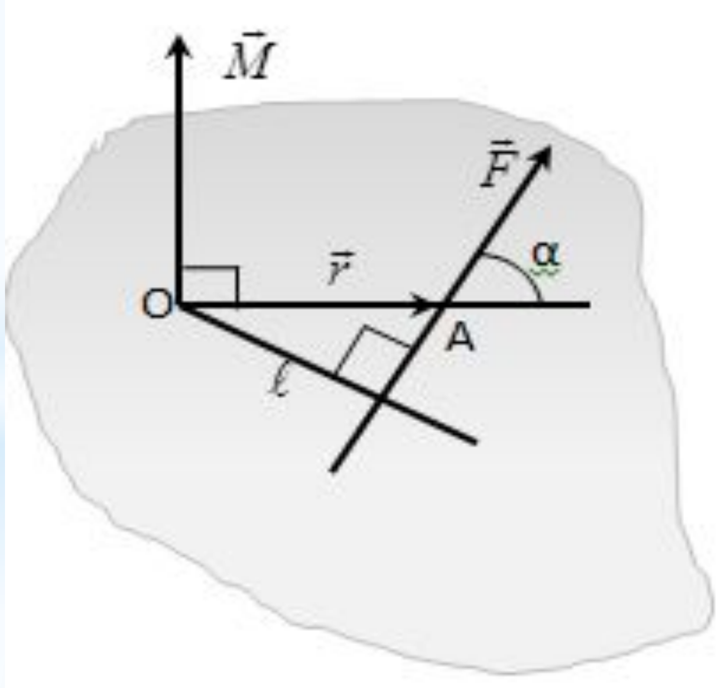
$$W_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}$$

# Момент сили

Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, яка призводить до зміни обертального руху тіла, вводять поняття моменту сили.

Розрізняють момент сили відносно точки та відносно осі обертання.

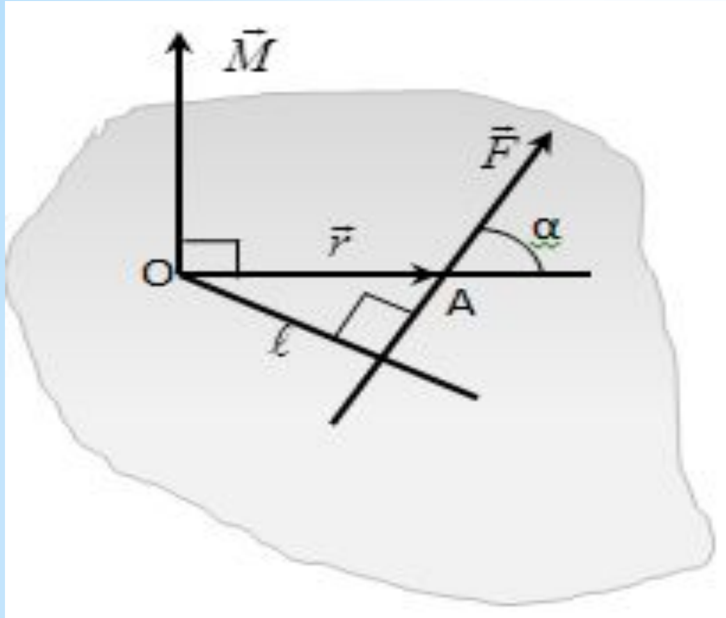
**Момент сили відносно нерухомої точки** (центру обертання) – це фізична величина, яка визначається векторним добутком радіус-вектора, т.О в точку прикладання сили, та цієї




$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$M_i = F_i r_i \sin\alpha$$

# Момент сили відносно нерухомої точки




**$\alpha$** - кут між векторами $\vec{r}_i$ і $\vec{F}_i$

$l = r_i sin\alpha$ – найкоротша відстань між центром обертанна та лінією дії сили – плече сили

Момент сили відносно точки – це ***псевдовектор*** (або аксіальний вектор), його напрям співпадає з напрямом поступального руху правого гвинта

$$M_i = F_i r_i \sin\alpha$$

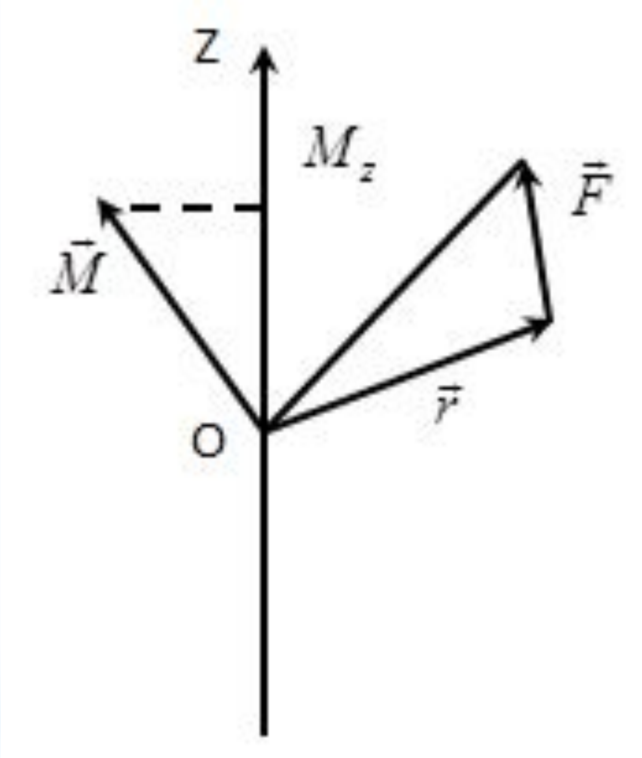
***Момент сили характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої він визначається.***

# Момент сили відносно нерухомої осі

**Моментом сили відносно нерухомої осі** *OZ* називається скалярна величина, рівна проекції на цю вісь вектора момента сили, визначеного відносно довільної точки О заданої осі **Z**. Значення його не залежить від вибору положення точки на осі Z.

Розмірність моменту сили в системі СІ

$[\boldsymbol{M}] = 1$ Н·м.



# Головний момент

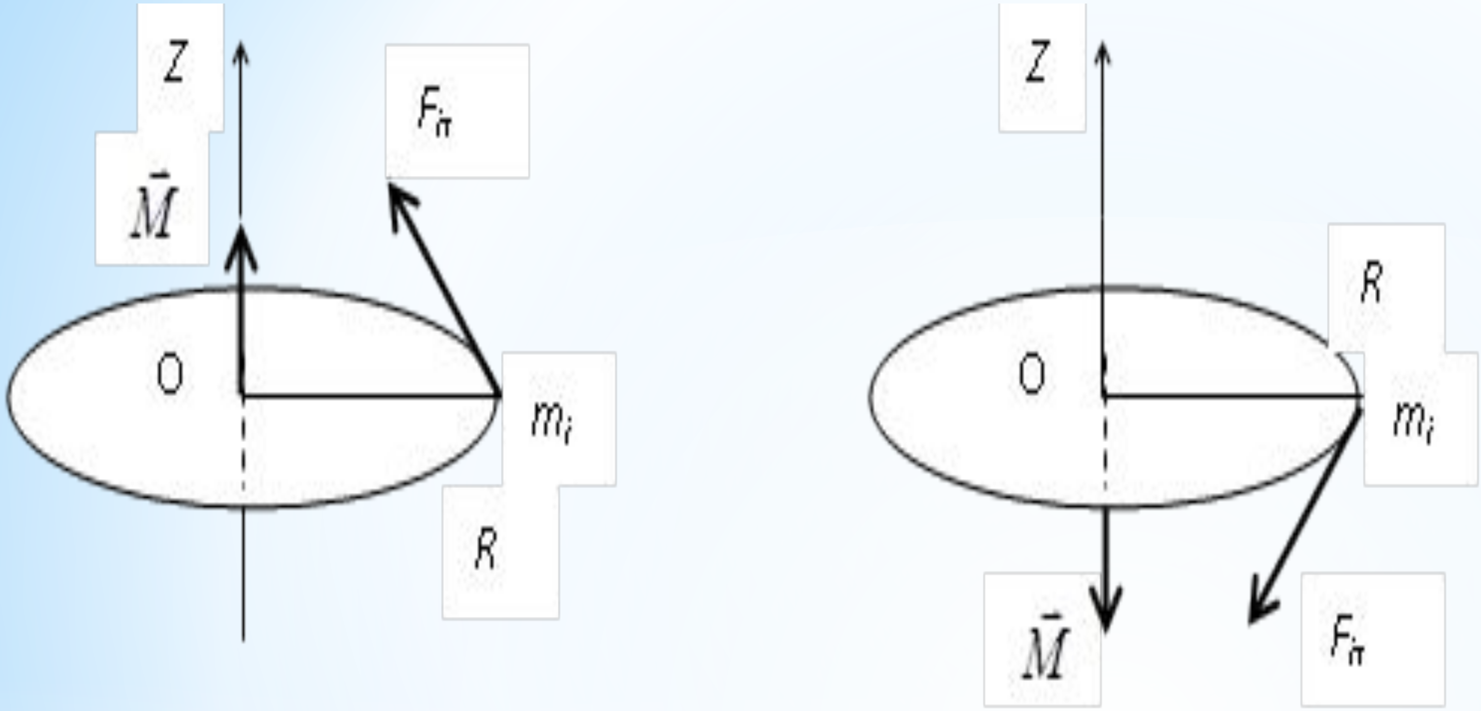
Векторна сума моментів всіх зовнішніх сил, які прикладені до тіла називається **головним моментом зовнішніх сил відносно точки**

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

**Головний (результуючий) момент відносно нерухомої осі** ***OZ*** системи характеризує здатність сили обертати систему (тіло) навколо цієї осі та дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно цієї осі

$$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i \, F_{i\tau}$$

# Головний момент



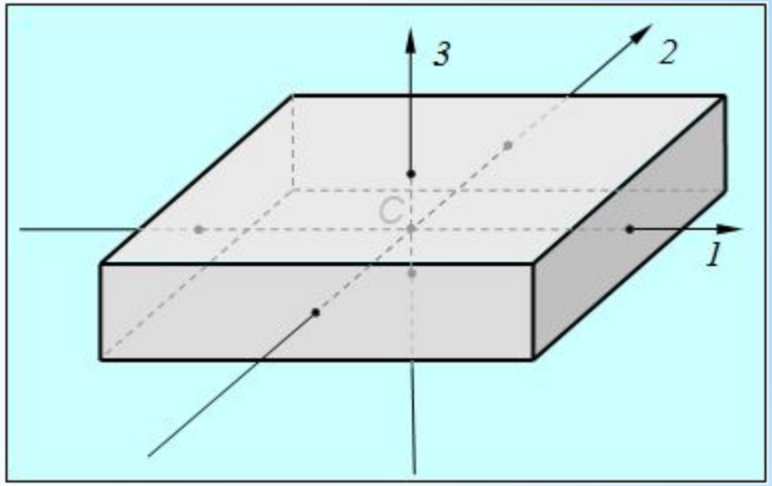

$$M_z = \sum_{i=1}^{N} M_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i F_{i\tau}$$

$F_{i\tau}$ - тангенціальна (дотична ) складова сили $\vec{F}_i$, саме ця складова викликає обертання навколо осі $Z$, $R$ –радіус кола.

У техніці машин і механізмів момент сили часто називають крутильним моментом.

# Основне рівняння динаміки обертального руху ТТ

* Існують такі осі обертання тіл, які не змінюють своєї орієнтції без дії на них зовнішніх сил. Такі осі називаються *вільними* (або осями вільного обертання). В будь-якому тілі існують три взаємно перпендикулярні осі, які проходять через центр мас тіла і можуть бути вільними осями. Їх називають **головними осями інерції**.




Якщо вісь обертання ТТ співпадає з головною віссю інерції, яка проходить через центр мас, має місце векторна рівність.

$$\vec{M}_z = J_z\vec{\beta}$$

# Основне рівняння динаміки обертального руху ТТ

* Рівність $\vec{M}_z = J_z\vec{\beta}$ можна також записати наступним чином:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{M}_z}{J_z} \qquad \left(\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\right)$$

***Кутове прискорення ТТ, яке обертається навколо нерухомої осі OZ, прямо пропорційне результуючому моменту відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, що діють на тіло і обернено пропорційне моменту інерції тіла відносно тієї ж осі.***

Обидва ці рівняння називають ***рівнянням динаміки обертального руху ТТ***.

(Індекс *Z* означає, що обертання  і момент інерції твердого тіла розглядаються відносно осі Z)

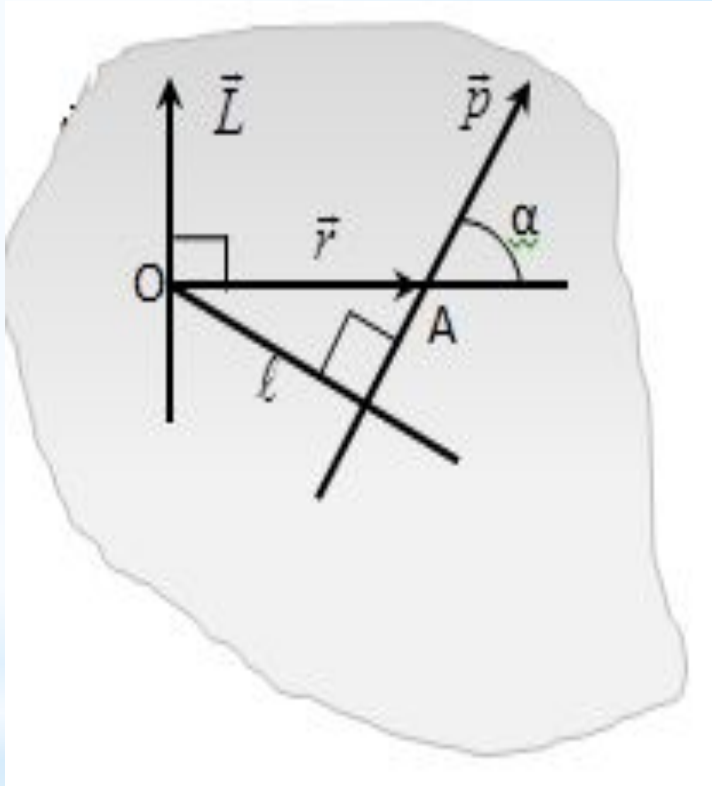
# Момент імпульсу

* Аналогом імпульсу як характеристики поступального руху є характеристика обертального руху, яка називається моментом імпульсу МТ (тіла).

**Моментом імпульсу** МТ відносно нерухомої точки називається векторна ФВ, рівна векторному добутку радіус-вектора МТ, проведеного з даної точки, на імпульс цієї МТ або

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$ або

$$L_i = r_i m_i v_i sin\alpha$$



# Момент імпульсу

**Моментом імпульсу МТ відносно нерухомої осі Z** називається скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно довільної точки на осі Z.

**Момент імпульсу ТТ відносно точки** - векторна величина рівна векторній сумі моментів імпульсу всіх МТ, з яких складається ТТ

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i \vec{v}_i$$

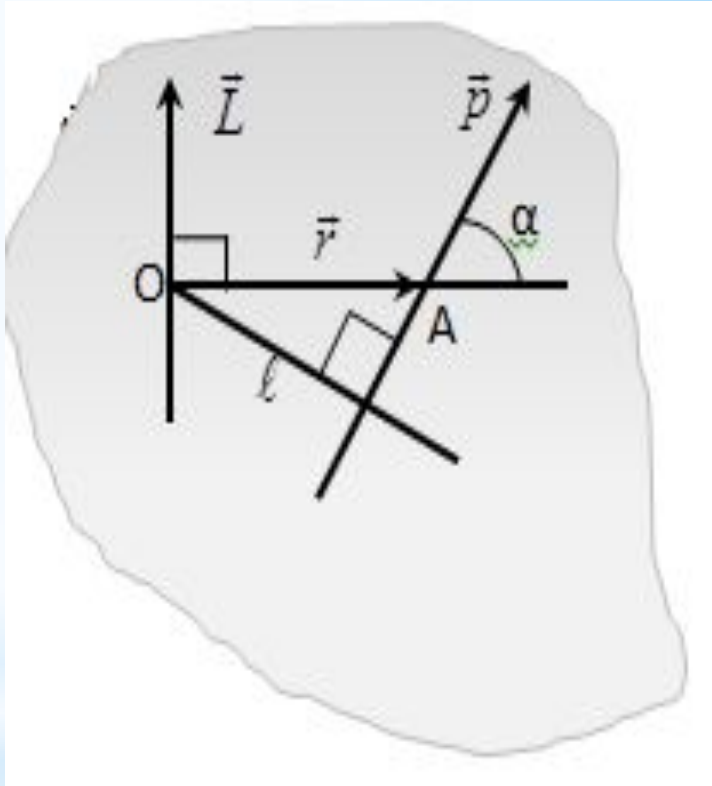
**Момент імпульсу** $L_z$ **ТТ відносно нерухомої осі Z** називається скалярна величина, яка дорівнює проекції на цю вісь вектора моменту імпульсу відносно довільної точки на осі Z.

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz}$$

# Момент імпульсу

Для обертального руху МТ по колу радіуса $R_i$ момент імпульсу відносно осі задається формулою

$$L_{i\,z} = R_i m_i v_i$$




Для ТТ момент імпульсу відносно осі Z знаходиться як сума відповідних моментів імпульсу усіх його точок

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz} = \sum_{i=1}^{N} R_i m_i v_i = \sum_{i=1}^{N} R_i m_i \omega\, R_i = \omega \sum_{i-1}^{N} m_i\, R_i^2 = J_z\, \omega$$

Отже,

$$L_z = J_z\, \omega$$

# Основний закон динаміки обертального руху

* $$L_z = J_z\,\omega$$

Тобто момент інерції ТТ відносно осі дорівнює добутку моменту імпульсу та кутової швидкості.

Візьмемо похідну від цього виразу за часом:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d(J_z\omega)}{dt} = J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\beta = M$$

У векторній формі отримаємо наступний запис:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$$

***Це більш загальна форма основного закону динаміки обертального руху***

# Основний закон динаміки обертального руху:

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$$

***Швидкість зміни моменту імпульсу дорівнює моменту обертальної сили (якщо діє кілька моментів сил, то результуючому моменту)***

Це рівняння іноді називають рівнянням моментів: похідна за часом від моменту імпульсу МТ відносно нерухомої точки - полюса дорівнює моменту рушійної сили, що діє відносно того ж полюсу.

Також з цієї рівності випливає закон збереження моменту імпульсу

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$$

# Закон збереження моменту імпульсу:

* ***момент імпульсу замкненої системи зберігається, тобто не змінюється із часом***

Дійсно, за відсутності моменту зовнішніх сил (система замкнена) результуючий момент $\vec{M}_z = 0$, отже і похідна від моменту імпульсу дорівнює 0, а сам момент імпульсу є сталим

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_z = J_z\vec{\omega} = const$$

Наслідком цього закону також є те, що кутову швидкість замкненої системи можна змінити за допомогою зміни її моменту інерції.

# Аналогія між лінійними та кутовими характеристиками

* Запис основного закону динаміки обертального руху $$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z$$

аналогічний загальній формі запису *II* закону Ньютона $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$