

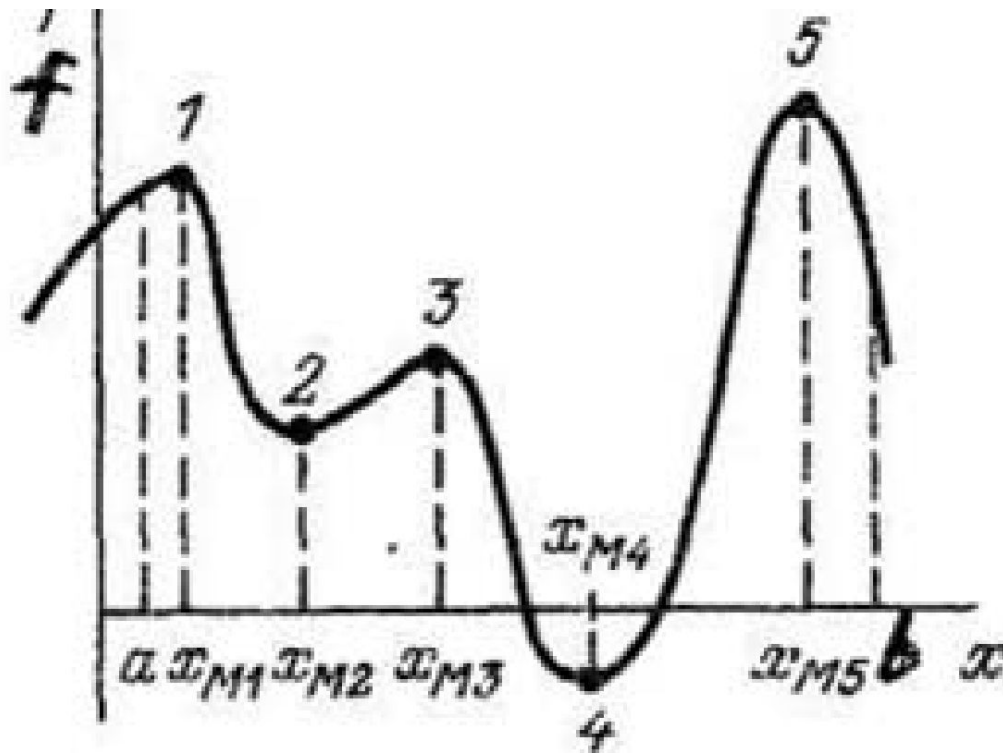
Раздел 4

Интерполирование и экстраполирование функций

Тема 4.1 Нахождение
экстремумов функций с одной
переменной

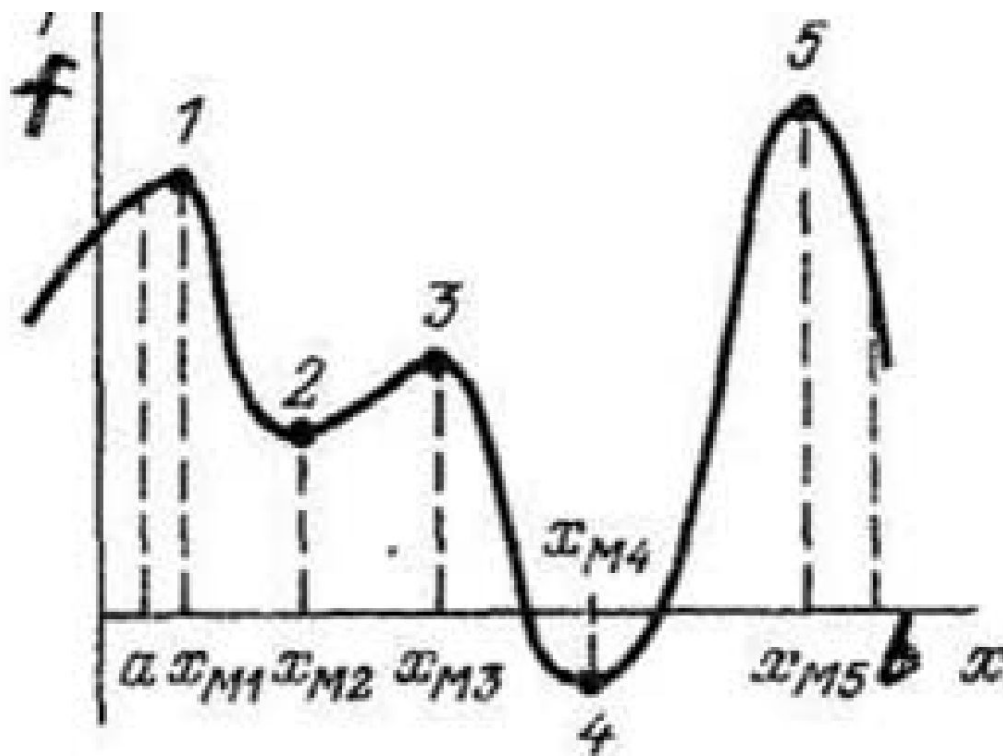
- На практике часто необходимо найти экстремум (или экстремумы) некоторой целевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n переменных x_i .
- Такая функция описывает $(n+1)$ -мерную поверхность.

- Соответственно, функция $f(x)$ одного параметра $x_1 = x$ описывает некоторую кривую на плоскости



- Поиск экстремумов функций одной переменной является самостоятельной и часто встречаемой задачей.
- Кроме того, к нему сводится гораздо более сложная задача поиска экстремумов функций множества переменных.

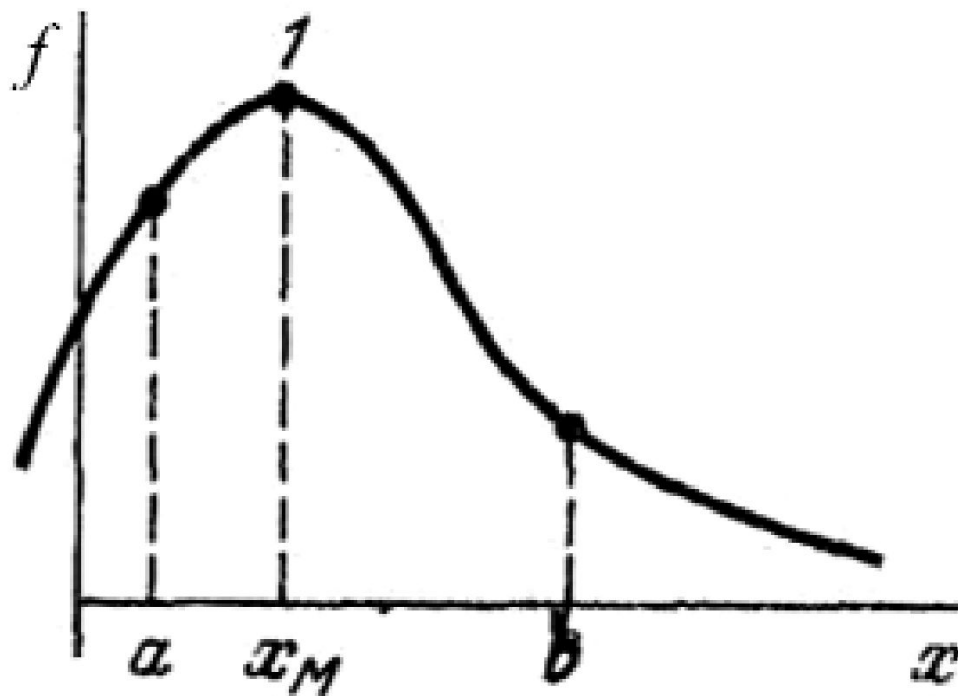
- В общем случае функция $f(x)$ может иметь несколько экстремумов (максимумов или минимумов)



- Задача поиска экстремумов сводится к их локализации и уточнению значений x и $f(x)$ в точке экстремума.
- Пусть экстремум - максимум $f(x)$.
- Поскольку максимуму функции $f(x)$ соответствует минимум функции $-f(x)$, то, сменив знак у $f(x)$, алгоритмами поиска максимума можно пользоваться и для поиска минимума функций.

- Пусть на изменения x (если это особо не оговорено) накладываются ограничения в виде неравенств $a \leq x \leq b$, где a и b — границы интервала поиска.

- Предположим, что в пределах отрезка $[a, b]$ функция является унимодальной, т. е. содержащей один максимум



- В этом случае, вычисляя последовательно целевую функцию при возрастающих значениях x , будем получать ее изменяющиеся значения, пока не достигнем точки максимума.

- Правило выбора последовательности точек x *определяет быстроту* нахождения интервала, в котором находится точка максимума.
- Интервал, в котором находится точка максимума x_m , называется ***интервалом неопределенности.***

Метод равномерного поиска

- Метод равномерного поиска основан на том, что переменной x присваиваются значения $x + \Delta x$ с шагом $\Delta x = \text{const}$ и вычисляются значения $f(x)$.
- Если $f(x_{n+1}) > f(x_n)$, переменной x дается новое приращение.
- Как только $f(x_{n+1})$ станет меньше $f(x_n)$, поиск останавливается.

Метод равномерного поиска

- Для этого метода при малой заданной погрешности итерационный процесс решения может сходиться очень медленно (т. е. требуется значительное количество шагов (итераций) до наступления момента достижения требуемой точности) и, следовательно, этот метод неэкономичен по затратам машинного времени при решении этой задачи на ЭВМ.

Метод поразрядного приближения

1. Задаем начальное приближение $x=x_0$ слева от максимума $f(x)$ и вычисляем $f(x_0)$. Задаем $D=h$, где $h=\Delta x$ — начальный шаг поиска.
2. Полагаем $G=f(x_n)$, где вначале $f(x_n)=f(x_0)$, задаем $x=x+D$ и вычисляем $f(x_{n+1})=f(x)$.

Метод поразрядного приближения

3. Проверяем условие $f(x_{n+1}) > G$; если оно выполняется, идем к п. 2, если нет — к п. 4.
4. Полагаем $D = -D/4$. Проверяем условие $|D| > \epsilon/4$, где ϵ — заданная погрешность вычисления x_m в точке максимума. Если оно выполняется, идем к п. 2, т. е. обеспечиваем поиск максимума в другом направлении с шагом в 4 раза меньше прежнего. Если данное условие не выполняется, заканчиваем счет.

Пример

- Найти максимум функции методами равномерного поиска и поразрядного приближения

$$f(x) = 0,1x^3 - 2x^2 + 10x.$$

$$h = 1, e = 0,001 \text{ и } x_0 = 2,$$

Вопросы для самоконтроля

- На чем основан метод равномерного поиска?
- Каким алгоритмом реализуется метод поразрядного приближения?