Задачи в «натуральных числах»

Выполнила студентка 521 группы

Чавычалова Анастасия

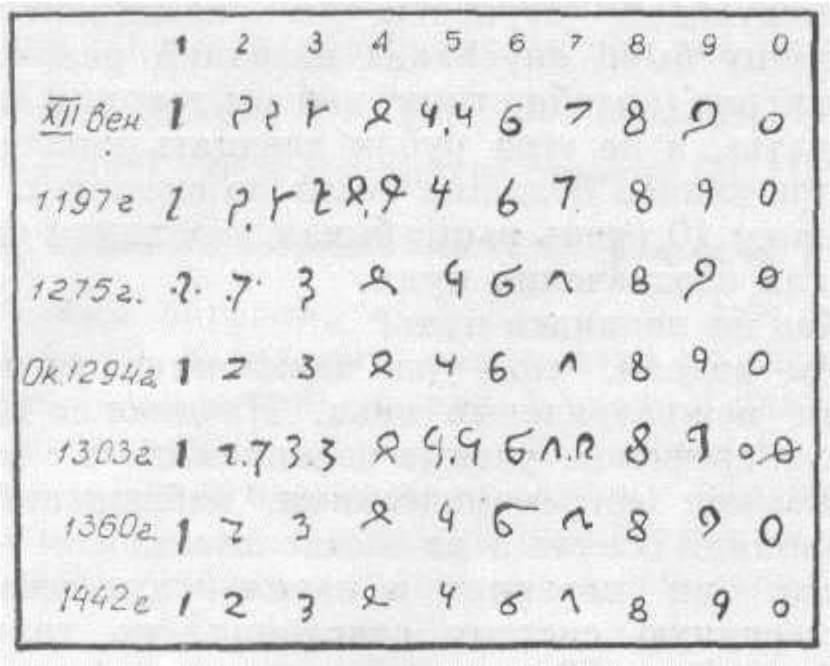
Натуральные числа

Первоначальные представления о числе появились в эпоху каменного века. Древнему человеку было далеко до абстрактного мышления, хватило того, что он придумал числа: «один» и «два».

Росло производство пищи, добавлялись объекты, которые требовалось учитывать в повседневной жизни, в связи с чем придумывались новые числа: «три», «четыре».

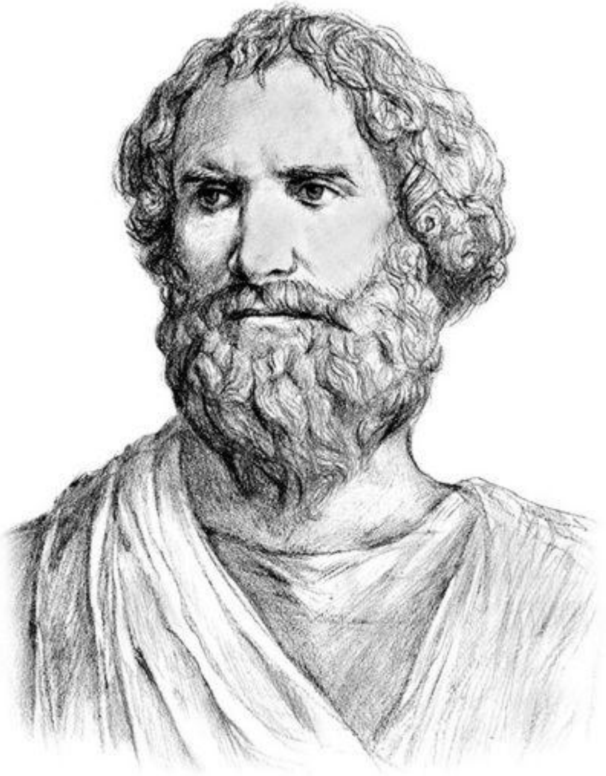
Долгое время пределом познания было число «семь».

Познаваемый мир усложнялся, требовались новые числа. Так дошли до нового предела. Им стало число 40.



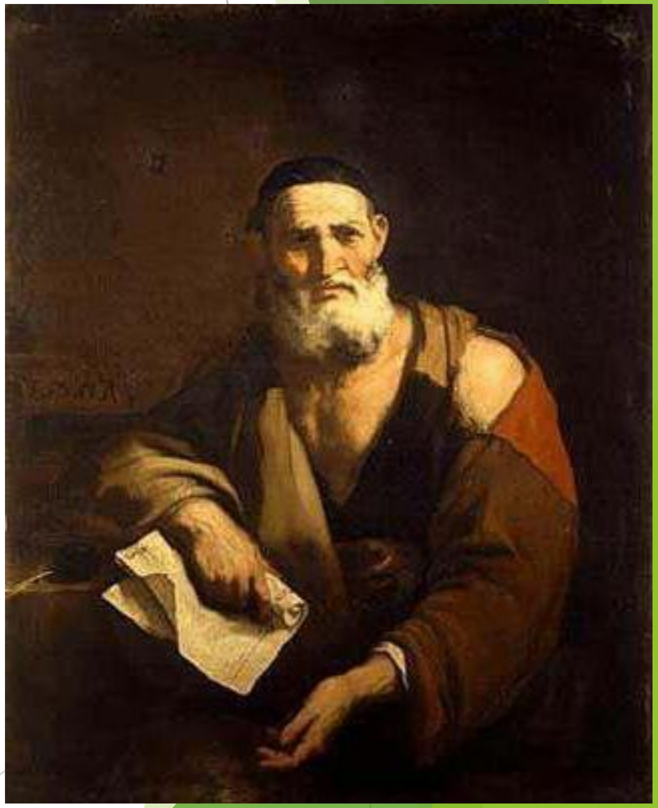
Следующим пределом у славянского народа было число «тьма», (у древних греков - мириада), равное 10 000, а запределом - «тьма тьмущая», равное 100 миллионам.

У славян применяли также и иную систему исчисления (так называемое «большое число» или «большой счет»). В этой системе «тьма» равнялась 106, «легион» - 1012, «леодр» - 1024, «ворон» - 1048, «колода» - 1096, после чего добавляли, что большего числа не существует.



Архимед

В Античном мире дальше всех продвинулись Архимед (III в. до н. э.) в «исчислении песчинок» - до числа 10, возведенного в степень 8x1016 , и Зенон Элейский (IV в. до н. э.) в своих парадоксах - до бесконечности ∞.



Зенон Элейский

2 основные функции натуральных чисел:

- - характеристика количества предметов;
- - характеристика порядка предметов, размещенных в ряд.

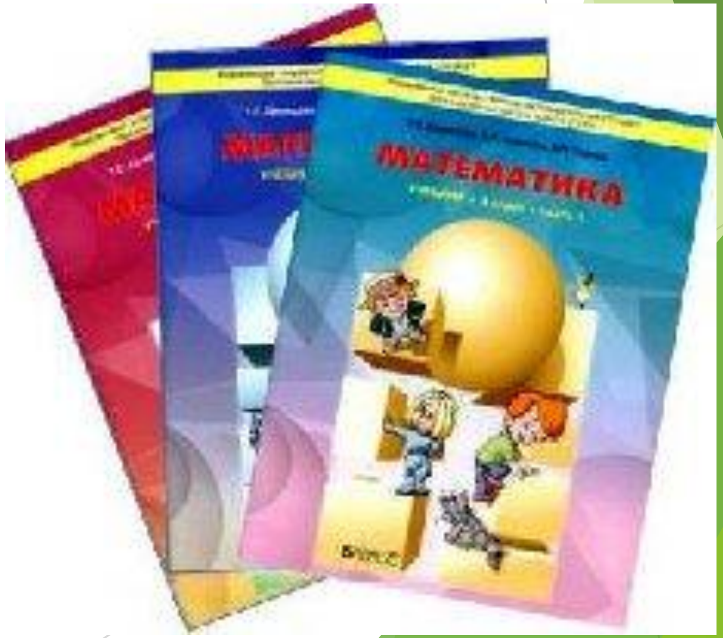
Определение

- Натуральными числами называют числа, которые используются для подсчета предметов либо для указывания порядкового номера любого предмета из всех однородных предметов.

Определение понятия: задачи в «натуральных числах»

Г. А. Балл предлагает такое определение: «Задача в самом общем виде – эта система, обязательными компонентами которой являются: а) предмет задачи, находящийся в исходном состоянии; б) модель требуемого состояния предмета задачи (эту модель отождествляем с требованием задачи)».

А.П. Тонких дает следующее определение этому понятию «Текстовая задача - описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации (определить числовое значение некоторой величины по известным числовым значениям других величин и зависимостям), установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения, найти последовательность требуемых действий»



Различные модели решения задач в «натуральных числах»

1. Решение математических текстовых задач.

Основная особенность в решении математических текстовых задач состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи.

Задача 1. Михаил имеет 24 купюры двух видов – по 100 и 500 рублей на сумму 4000 рублей. Сколько у него купюр по 500 рублей?

Решение:
Поскольку полученная сумма, число «круглое», то, следовательно, количество купюр по 100 рублей кратно 1000. Таким образом, количество купюр по 500 рублей тоже кратно 1000. Отсюда имеем – по 100 рублей 20 купюр; по 500 рублей – 4 купюры.

Ответ: У Михаила 4 купюры по 500 рублей.

2. Решение сюжетных задач, математической моделью которых является линейное диофантово уравнение. Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач, математической моделью которых является линейное диофантово уравнение, является идея делимости одних чисел на другие, а необходимым элементом решения – метод эффективного перебора (разновидность метода исчерпывающих проб).

Задача 2. Среди невиданных зверей, оставивших следы на неведомых дорожках, было стадо одноглавых тридцатичетырёхножек и трёхголовых Драконов. Всего в стаде 286 ног и 31 голова. Сколько лап у трёхголового Дракона?

Решение:

Математическая модель задачи – система двух линейных диофантовых уравнений: t = 3d = 31, 34t + xd = 286 , где t – число тридцатичетырёхножек, d – число драконов, x – число лап у каждого дракона.

Из первого следует: t =1, d = 10; t =4, d = 9; t =7, d = 8; t =10, d = 7; t=13, d = 6; t =16, d = 5; t =19, d = 4; t =22, d = 3; t =25, d = 2; t =28, d = 1.

Учащиеся могут осуществить перебор всех вариантов, подставляя во второе уравнение в поисках верного равенства – I способ решения.

Можно упростить процедуру, используя чётность и оценку значений для второго уравнения: в стаде 286 ног, это значит, что тридцатичетырёхножек не может быть больше 8, так как 34·9 > 286. Отсюда проверять следует только первые три пары:

t =1, d = 10

34 + 10x = 286

x ¢ N (слева число оканчивается на 4, справа – на 6)

t =4, d = 9

68 + 9d = 286

x ¢ N (9d = 218 – не делится на 9)

t =7, d = 8

238 + 8x = 286

x = 6

Ответ: у каждого Дракона 6 лап.

3. Решение текстовых задач «на остатки». Ключевой идеей решения школьниками сюжетных задач «на остатки» является применение свойства делимости суммы и произведения, признаков делимости натуральных чисел.

Задача 3. При умножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков в произведении. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 39, а в остатке 22. Найти множители.

Решение:
Пусть первое число – x и второе – y. Не нарушая общности предположим что x<y то есть y=x+10.По условию ученик при подсчете произведения допустил ошибку, уменьшив на 4 цифру десятков то есть произведение уменьшилось на 40, то есть он получил
xy-40=x(x+10)-40=x^2+10x-40.
Теперь когда он поделил на x он получил в остатке 22, а в частном 39 то есть −2 нам не подходит.

Ответ: 31 и 41

4. Решение сюжетных задач на применение НОД и НОК. Ключевой
идеей решения школьниками сюжетных задач применение НОД и НОК осуществляется на основе разложения чисел на простые множители и использовании свойств НОК и НОД.

Задача 4. Каково наибольшее количество торговых точек, в которые
можно поровну распределить 60 л подсолнечного и 48 л кукурузного масла? Сколько литров каждого вида при этом получит одна торговая точка.

I способ.

Наибольшее количество торговых точек, в которые можно
поровну распределить 60 л подсолнечного и 48 л кукурузного масла – это наибольший общий делитель чисел 60 и 48.
НОД (48;60)= 12.
48:12=4 (л) – кукурузного масла получит каждая торговая точка.
60:12=5 (л) – подсолнечного масла получит каждая торговая точка.

II способ.

Если бы подсолнечного масла было столько, сколько и
кукурузного – 48 литров, то есть на 12 меньше, чем дано в условии, то наибольшее количество торговых точек было бы 48, а так их не может быть больше 12. Пусть их 12 (самое большое из возможных чисел), тогда:
48:12=4 (л) – кукурузного масла получит каждая торговая точка.
60:12=5 (л) – подсолнечного масла получит каждая торговая точка.
Ответ: Торговых точек – 12. Каждая торговая точка получит 4 л кукурузного масла и 5 л подсолнечного масла.

5. Решение задач «на стратегии». Ключевой идеей решения
школьниками сюжетных задач теории игр – задач «на стратегии» является экспериментальная проверка и определение выигрышной стратегии с последующим обоснованием последней, в нашем случае с использованием теории делимости (применения признаков делимости и/или свойства делимости).

Задача 5. Даша и Таня по очереди выписывают на доску цифры
шестизначного числа. Сначала Даша выписывает первую цифру, затем Таня – вторую, и так далее. Таня хочет, чтобы полученное в результате число делилось на три, а Даша хочет ей помешать. Кто из них может добиться желаемого результата независимо от ходов соперника?

I этап (экспериментальный).

Я – Даша, моя цель – не дать Тане получить число делящееся на три, поэтому я не буду использовать цифры 3, 6 и 9. Если я напишу 1, 4 или 7, то Таня может записать 2, 5 или 8 и получить число, делящееся на три. Если я напишу 2, 5 или 8, то Таня может записать 1, 4 или 7 и получить число, делящееся на три. Таня всегда выиграет. Я же выиграю в случае арифметической ошибки Тани.

Я – Таня, моя цель – получить число делящееся на три. Пусть Даша пишет что хочет, а я до последнего хода буду писать нули, а на последнем ходу посчитаю, сумму Дашиных цифр и дополню, если это нужно до наименьшего кратного 3, например,

40201? (4+2+1=7, 7+2=9) – 402012.

Или я буду своей цифрой дополнять до наименьшего кратного 3, например, 425100.

II этап (логический).

Даша начинает, а Таня – выигрывает, так как она заканчивает, а значит, может, зная сумму первых 5 записанных цифр указать цифру, которая к сумме с имеющимися даёт (наименьшее) кратное 3, например,
13579? (1+3+5+7+9=25, 25+2=27) – 135792.
У Тани есть следующая выигрышная стратегия (меньше вероятность допустить арифметическую ошибку): после очередного хода Даши Таня должна дописать к числу такую цифру, чтобы в результате получившееся число делилось на 3. Это всегда можно сделать (более того, для этого Тане достаточно использовать цифры 0, 1 и 2), тогда после каждого хода Тани написанное на доске число будет делиться на 3.

Ответ. Выиграет Таня.

6. Решение текстовых задач, математической моделью которых
является алгебраическое уравнение или система уравнений. Математической моделью текстовой задачи является выражение (либо запись по действиям), если задача решается арифметическим методом, и уравнение (либо система уравнений), если задача решается алгебраическим методом.

Задача 6. Ученику и мастеру дано задание изготовить одинаковое
количество деталей. Мастер, изготовляя 18 деталей в час, затратил на выполнение задания на 3 ч меньше, чем ученик, который изготавливал лишь 12 деталей в час. Сколько деталей было заказано?

Решение:
Пусть x – время затратил ученик
$x-3$ – время затратил мастер
$12x$– изготовил ученик
$18(x-3)$ – изготовил мастер деталей.
Составляем уравнение: так как количество деталей одинаковое по
заданию, то: $18(x-3)=12x$, решаем уравнение:
$18x-54=12x$
$18x-12x=54$
$6x=54$
$x=9$(ч) – затратил ученик,
$12x=12\cdot 9=108$(д) –изготовил ученик.
Мастер тоже изготовил 108 деталей.

Ответ: Всего деталей было заказано 216.