МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕГАУССОВСКИХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Бакалаврская работа
студента 4 курса, группы 4022
направления 03.03.02 «Физика» Института физики
Самойлова Никиты Викторовича

Научный руководитель - д.ф.-м.н. профессор В. М. Аникин

Актуальность работы

- В данной выпускной квалификационной работе (ВКР) строятся алгоритмы моделирования случайных величин, имеющих распределение Релея, а также марковских диффузионных процессов, сечение которых описывается распределением Релея. Выбор данного распределения связан с тем, предлагается модель диффузионного процесса, не являющегося гауссовским (нормальным), как того требует классическая модель диффузии, т.е. предлагаемая модель может быть сопоставлена с процессом диффузии, происходящим в средах сложной структуры.

Цель работы

- ***Цель ВКР*** – конструирование датчиков случайных величин и моделей случайных диффузионных процессов, характеризуемых распределением Релея.
- Соответственно, ***объектом исследования*** ВКР являются разностные уравнения первого порядка (как основа датчиков случайных величин) и стохастические дифференциальные уравнения, решения которых непрерывны, хотя приращения процессов не являются гауссовскими.
- ***Предмет исследования*** – хаотические отображения как датчиков случайных величин с распределением Релея, уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (УФПК) с точным решением в виде релеевского распределения и соответствующие этому УФПК стохастические дифференциальные уравнения как моделей диффузионных процессов.

- ***Задачи ВКР:***
- \- разработка алгоритмов датчиков случайных величин на базе различных хаотических отображений с инвариантной плотностью в форме релеевского распределения посредством применения метода синтеза сопряженных отображений (глава 1);
- \- определение коэффициентов сноса и диффузии УФПК, обладающего точным (аналитическим) решением в форме плотности распределения Релея (глава 2);
- \- построение стохастического дифференциального уравнения как модели случайного процесса с релеевским распределением в сечении конструктивным способом (через стандартный винеровский процесс) (глава 3).

Построение отображения, обладающего инвариантным распределением в форме закона Релея

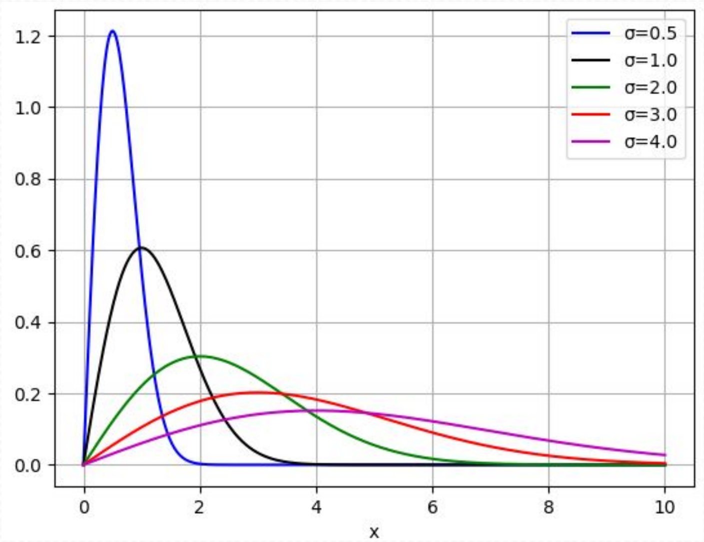


Рис. 1. Плотность распределения Релея

$$f(\mathrm{x};\sigma)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0\quad,\quad \sigma>0$$

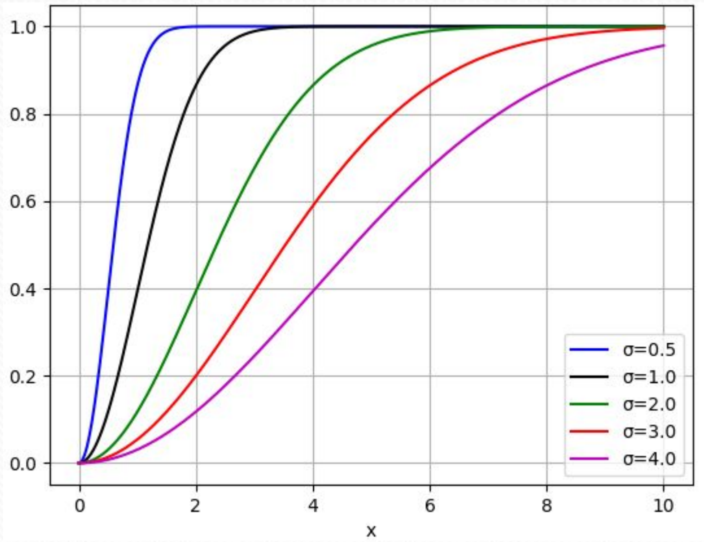


Рис. 2 Закон распределения Релея

$$F(\mathrm{x};\sigma)=1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\qquad x>0$$

Здесь σ - параметр распределения.Значение параметра определяет вид распределения на положительной числовой полуоси.

Переход к новому отображению с заданной инвариантной плотностью осуществляется посредством замены переменных в исходном базовом отображении с равномерным распределением

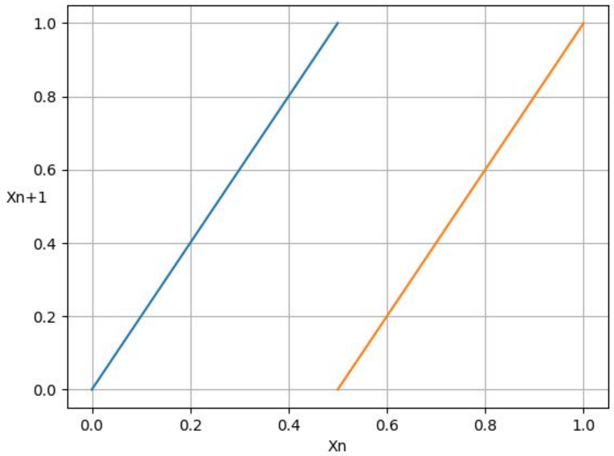


Рис.3. Сдвиг Бернулли

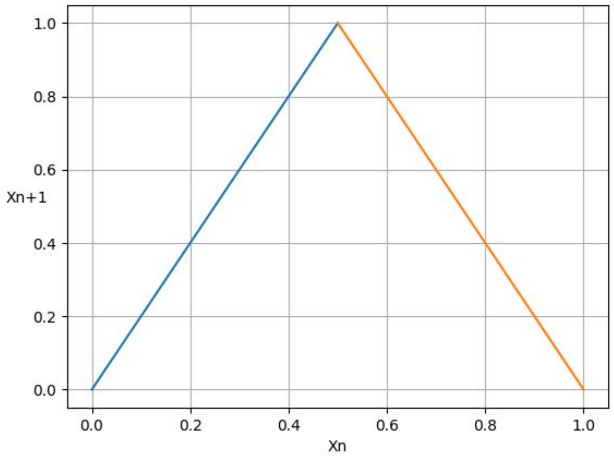


Рис.4. Пирамидальное отображение

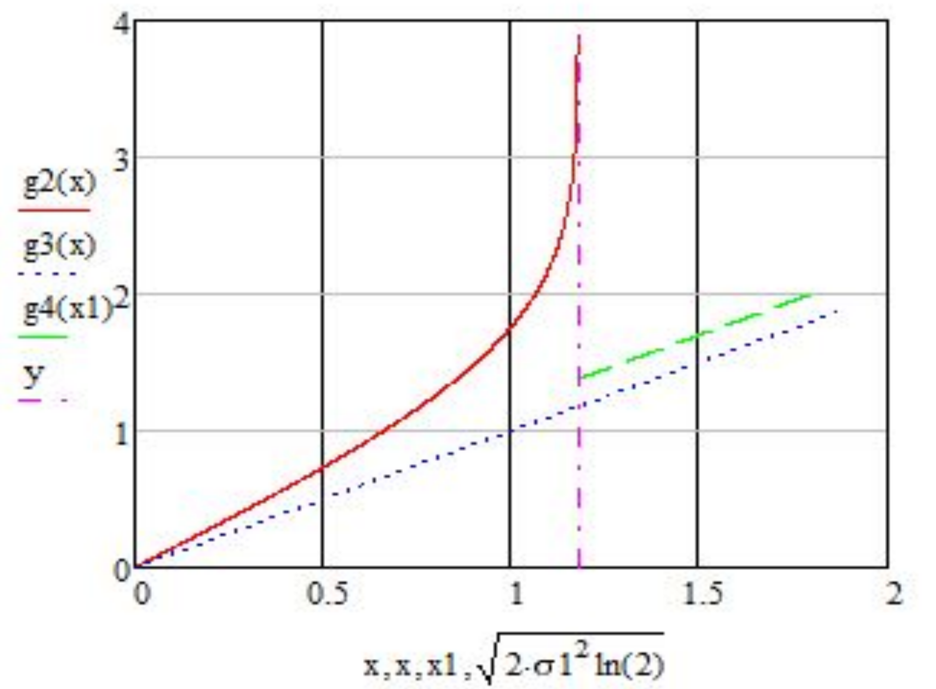
$$\xi_{m+1} = 2\xi_m, \quad 0 \le \xi_m \le 1/2,$$
$$\xi_{m+1} = 2\xi_m - 1, \quad 1/2 \le \xi_m \le 1$$

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = 2\xi_n, & 0 \le \xi_n \le 1/2, \\ \xi_{n+1} = 2 - 2\xi_n, & 1/2 \le \xi_n \le 1. \end{cases}$$

Замена переменных в базовых отображениях:

$$\xi = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad 0 \le \xi \le 1, \quad \sigma > 0$$

Отображение с инвариантной плотностью в форме закона Релея на базе сдвига Бернулли

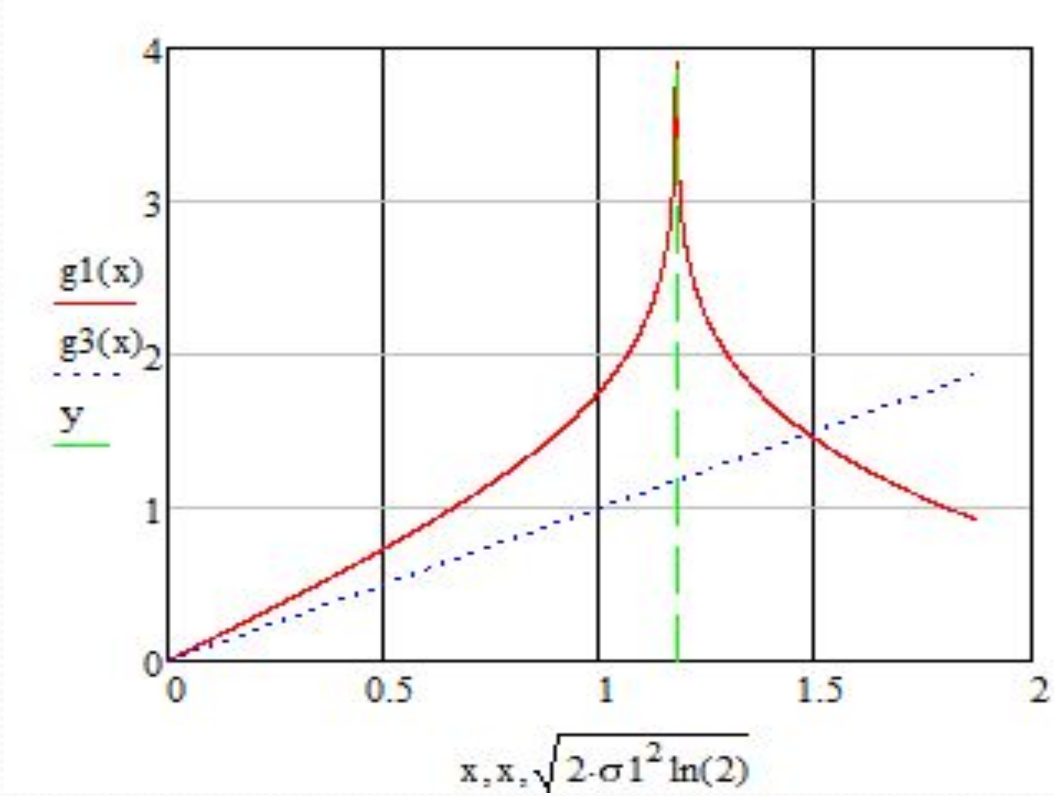


Точка разрыва второго рода:

$$x^* = \sqrt{2\sigma^2 \ln 2}$$

$$x_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{-2\sigma^2 \ln(2\exp(-x_n^2/2\sigma^2)-1)}, & 0 \le x_n \le \sqrt{2\sigma^2 \ln 2}; \\ x_n, & \sqrt{2\sigma^2 \ln 2} \le x_n \le \infty. \end{cases}$$

Отображение с инвариантной плотностью в форме закона Релея на базе пирамидального отображения



Точка разрыва второго рода:

$$x^* = \sqrt{2\sigma^2 \ln 2}$$

$$x_{n+1} = \sqrt{2\sigma^2 \ln\left|2e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}} - 1\right|}, \qquad 0 \le x_n \le \infty.$$

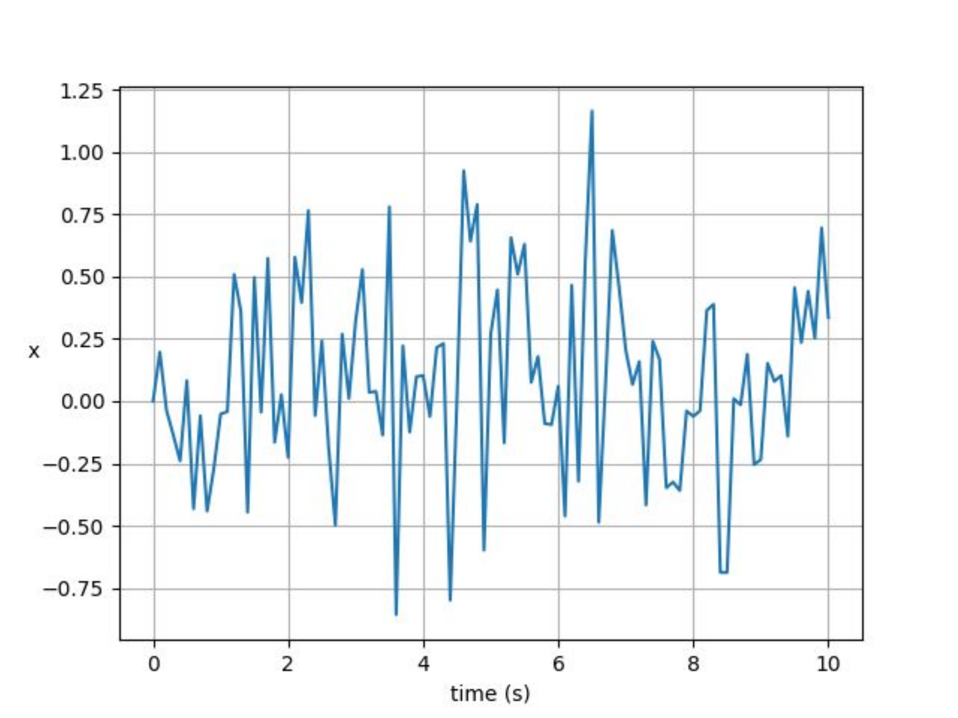
Компьютерное моделирование винеровского процесса

Компьютерное моделирование винеровского процесса основано на его определении:

$$\{W(0) = 0; \quad M\{W(t)\} = 0\}$$

$$P(\Delta w(t,s)) = N(0,\sigma^2 \,|\, t-s\,|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \,|\, t-s\,|}} \exp\left(-\frac{(\Delta w(t,s))^2}{2\sigma^2 \,|\, t-s\,|} \right)$$

$$W(t+\Delta t) = W(t) + N(0,\sigma^2 \,|\, \Delta t\,|)$$



Конструктивное моделирование марковских диффузионных процессов с негауссовым распределением вероятности

Стационарное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова для *одномерной плотности распределения* формулируется для непрерывных марковских процессов и в стационарном случае может быть представлено в виде:

$$\frac{p'_{st}(x)}{p_{st}(x)} = \frac{2f(x) - (g^2(x))'}{g^2(x)}$$

$$p_{st}(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

$$\frac{p'_{st}(x)}{p_{st}(x)} = \frac{d}{dx}(\ln p_{st}(x)) = \frac{d}{dx}\left(\ln x - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \ln \sigma^2\right) = \frac{\sigma^2 - x^2}{\sigma^2 x} \equiv \frac{2f(x) - (g^2(x))'}{g^2(x)}.$$

Коэффициенты сноса и диффузии, отвечающие точному решению уравнения в форме закона Релея имеют вид:

$$f(x) = \sigma^2 - \frac{1}{2}x^2 \qquad g^2(x) = \sigma^2 x$$

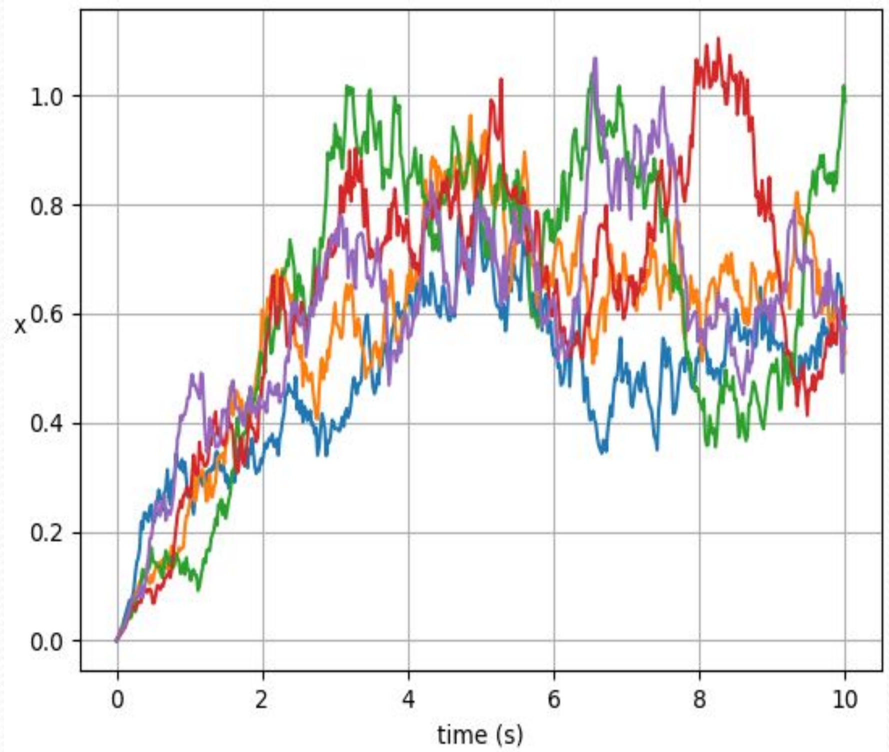
Стохастическое дифференциальное уравнение, управляющее диффузионным процессом с одномерным распределение в форме закона Релея, позволяет использовать винеровский процесс как базу для моделирования случайного процесса более общего вида (с негауссовым распределением) :

$$dX_t = \left(\sigma^2 - \frac{1}{2} X_t^2 \right) dt + \sigma \sqrt{X_t}\, dW_t$$

$$X(t + \Delta t) = X(t) + \Delta X(t)$$

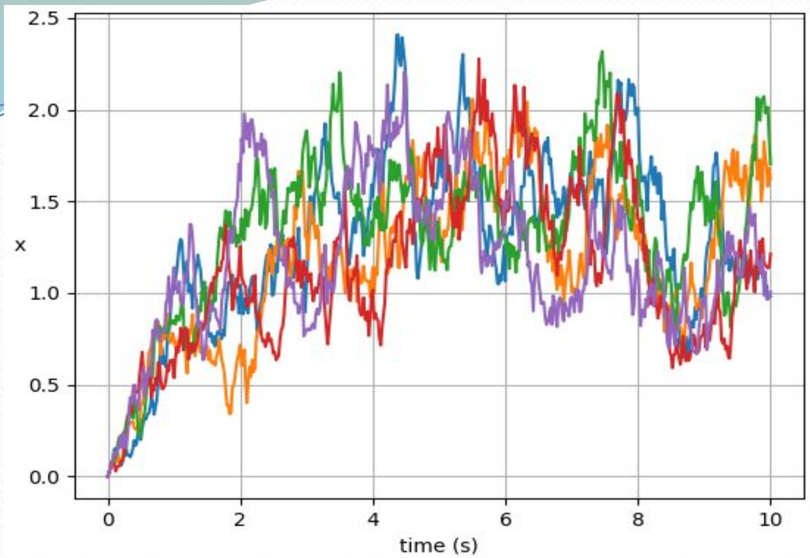
$X_t = X(t)$ – моделируемый процесс,

$W_t = W(t)$ – винеровский гауссовский процесс.

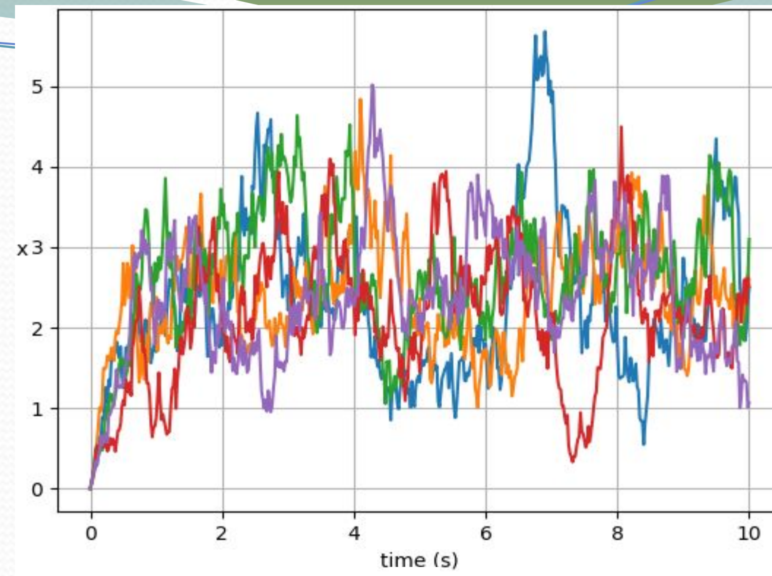


σ=0.5

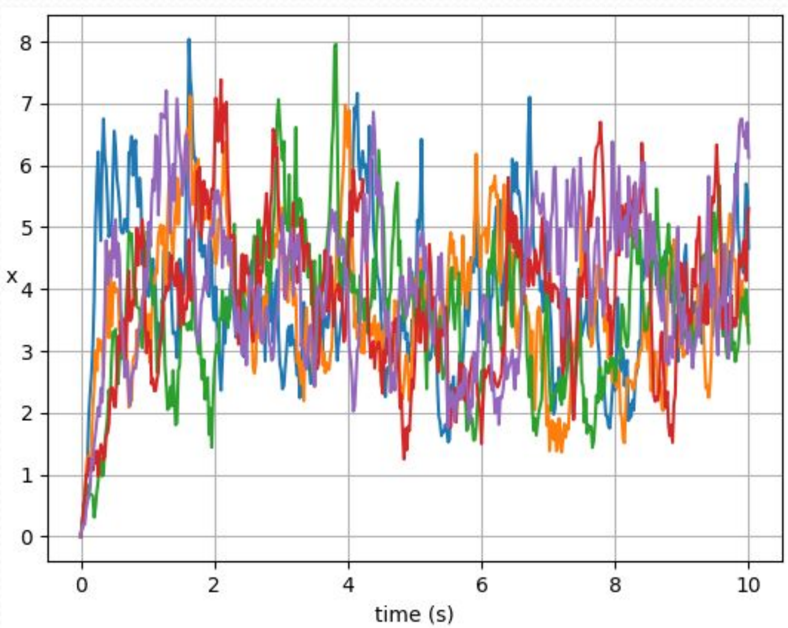
Результаты моделирования траекторий релеевского случайного марковского диффузионного процесса.



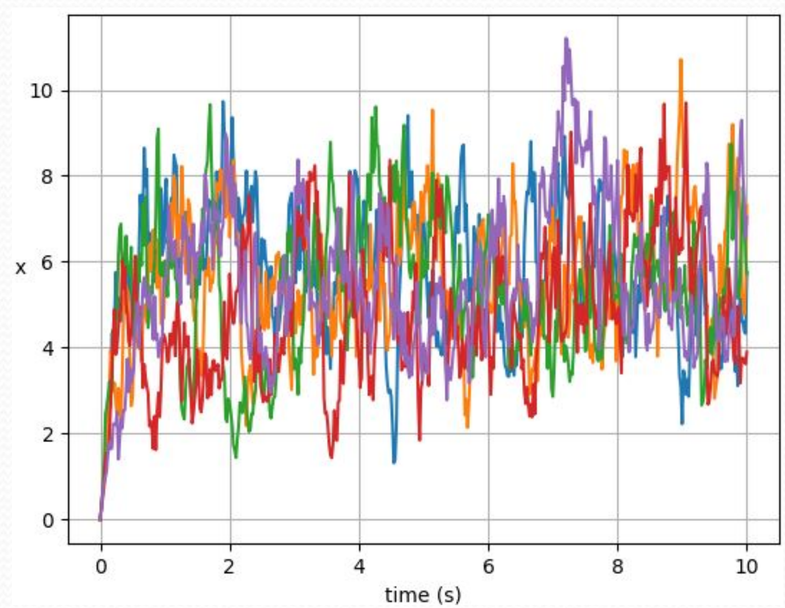
σ=1



σ=2



σ=3



σ=4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены новые хаотические отображения, обладающие инвариантной плотностью в форме распределения Релея: на базе сдвигов Бернулли и на базе пирамидального отображения. В процессе построения отображений, сопряженных названным кусочно-линейным отображениям, были произведены соответствующий выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получения аналитического вида нового отображения.Новые отображения могут рассматриваться как новые генераторы псевдослучайных величин, имеющих релеевское распределение на положительном полуинтервале числовой оси.

Найдены коэффициенты сноса и диффузии для уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), обеспечивающие точное решение стационарного уравнения ФПК для одномерной плотности в форме закона Релея. Записано стохастическое дифференциальное уравнение (Ито) выражающее негауссовский марковский диффузионный процесс через винеровский (гауссовский) процесс, т.е. решена задача конструктивного моделирования случайных негауссовых марковских диффузионных процессов через базовый винеровский процесс.

Полученные результаты обладают ***научной новизной и практической направленностью***. Нахождение генератора с релеевским распределением имеет значение в теории надежности для моделирования времени жизни различных устройств. Модель случайного процесса с релеевским распределением в сечении определяет новый тип марковского диффузионного процесса. Наличие параметра в отображении Релея может быть использовано для построения схем хаотического кодирования – наличие параметра усложняет задачу криптоанализа. **СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**