Теория автоматического управления

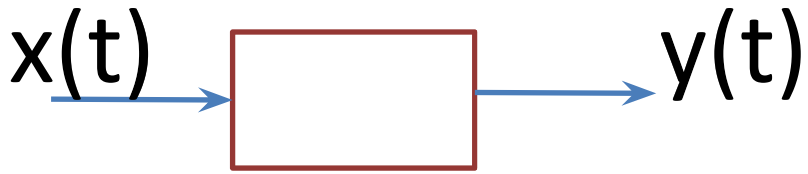
Основные характеристики звеньев и систем.
Частотные характеристики

Характеристики систем

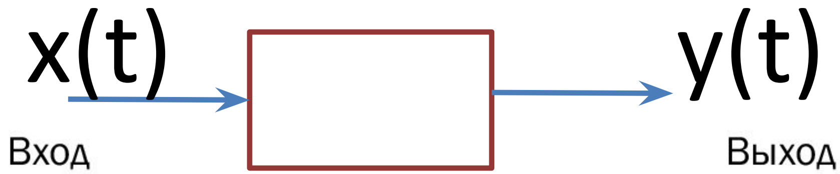
Временны́е характеристики – характеризуют поведение системы с течением времени (зависят от времени)

Частотные характеристики – характеризуют реакцию системы на входные воздействия различных частот (зависят от частоты)

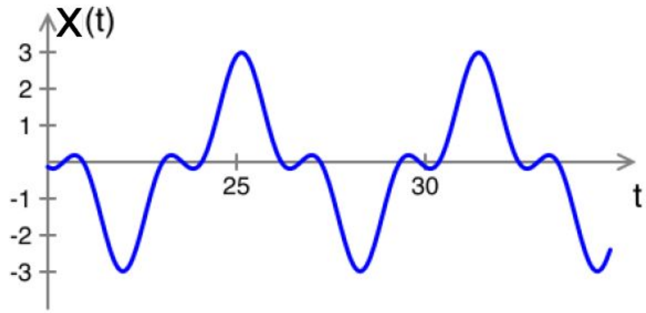
Временная и частотная область

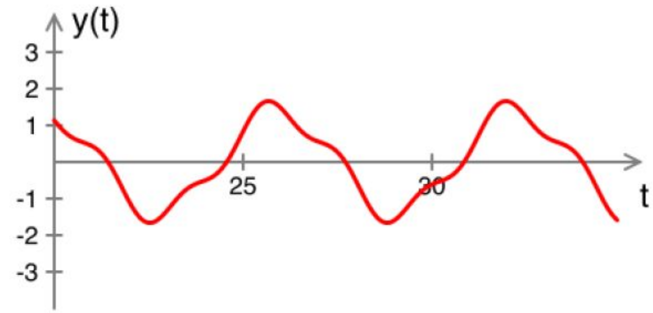


Временная и частотная область

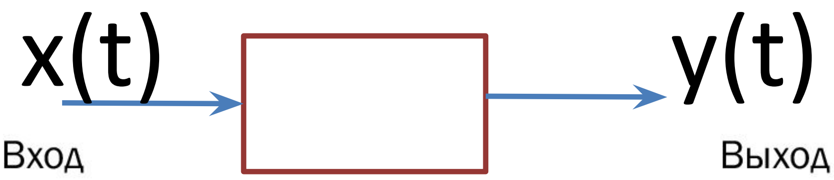


Временная область



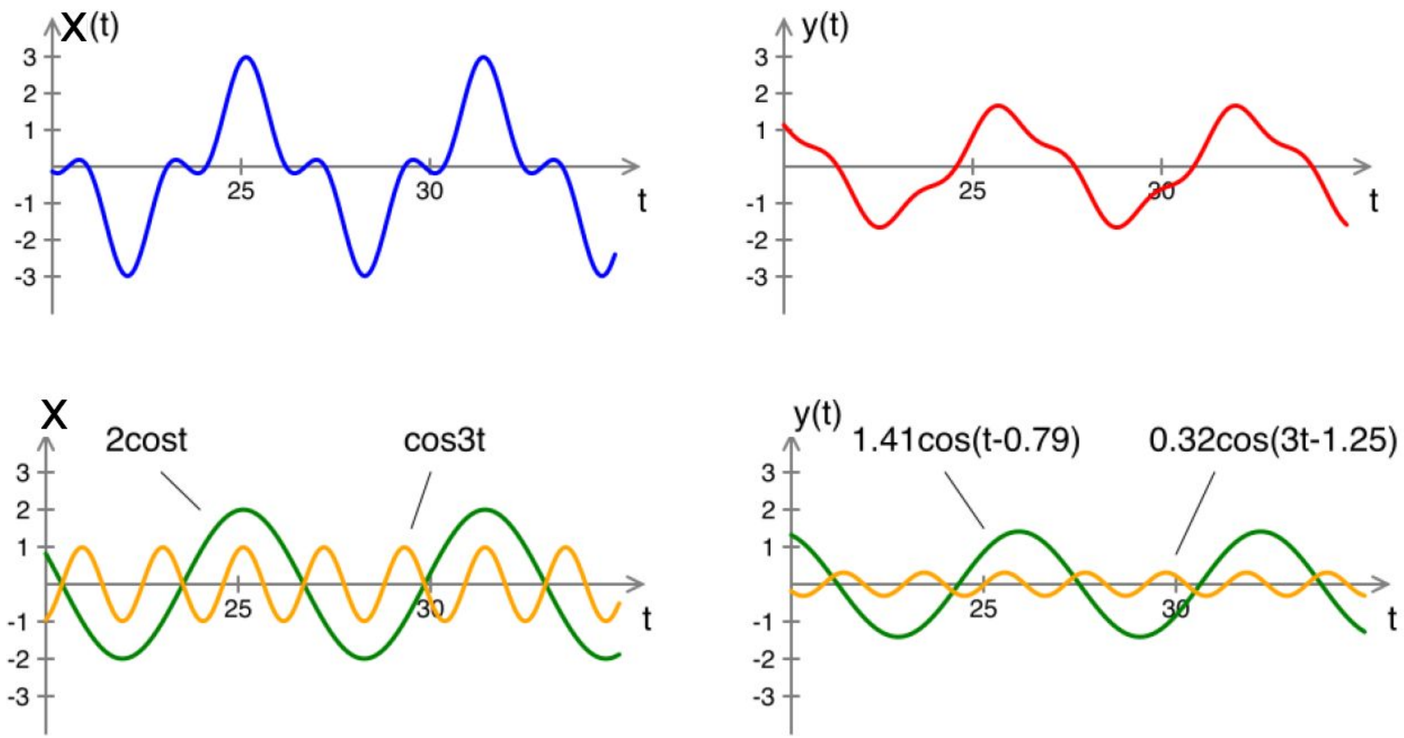


Временная и частотная область

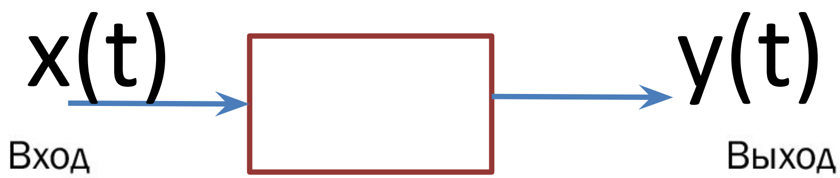


Временная область

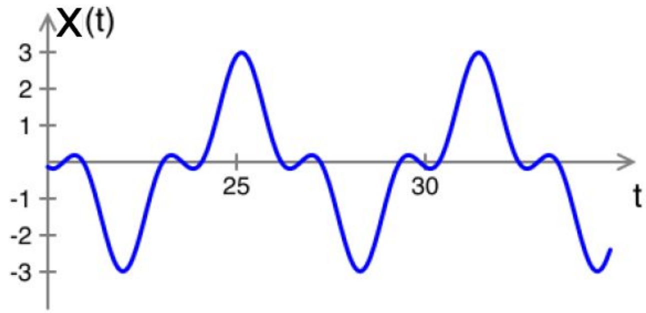
Разложение

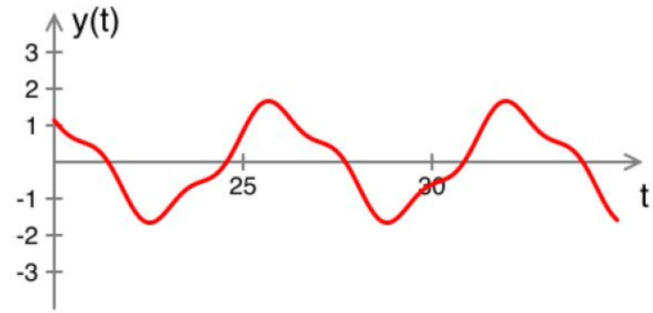


Временная и частотная область

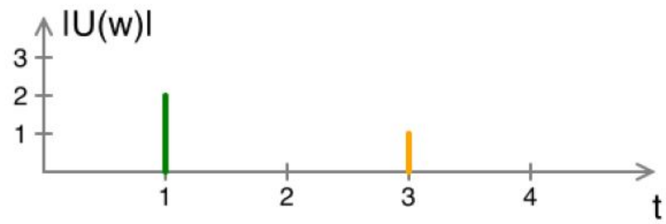


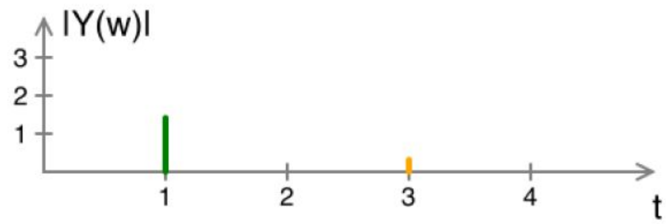
Временная область





Частотная область





Частотная передаточная функция

Частотная передаточная функция *W(jω)* – отношение образа Фурье выхода системы к образу Фурье входа системы при нулевых начальных условиях

$$W(j\omega) = \frac{\mathrm{F}\{y(t)\}}{\mathrm{F}\{\mathrm{x}(t)\}}$$

$$j^2 = -1$$

мнимая единица

Частотная передаточная функция

Частотная передаточная функция *W(jω)* – отношение образа Фурье выхода системы к образу Фурье входа системы при нулевых начальных условиях

$$W(j\omega) = \frac{\mathrm{F}\{y(t)\}}{\mathrm{F}\{\mathrm{x}(t)\}} \qquad j^2 = -1$$

мнимая единица

Преобразование Фурье – интегральное преобразование вида

$$F(j\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

Преобразование Фурье

Свойства преобразования Фурье

$$\mathcal{F}\left\{ax(t)+by(t)\right\}=a\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}+b\mathcal{F}\left\{y(t)\right\}$$

Преобразование Фурье

Свойства преобразования Фурье

$$\mathscr{F}\{ax(t)+by(t)\} = a\mathscr{F}\{x(t)\} + b\mathscr{F}\{y(t)\}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\} = j\omega\mathscr{F}\{f(t)\} - f(0^+)$$

Преобразование Фурье

Свойства преобразования Фурье

$$\mathscr{F}\left\{ax(t)+by(t)\right\}=a\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}+b\mathscr{F}\left\{y(t)\right\}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}=j\omega\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}-f(0^{+})$$

$$\mathscr{F}\left\{\int_{0}^{t}f(t)dt\right\}=\frac{1}{j\omega}\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$$

Преобразование Фурье

Свойства преобразования Фурье

$$\mathscr{F}\left\{ax(t)+by(t)\right\}=a\mathscr{F}\left\{x(t)\right\}+b\mathscr{F}\left\{y(t)\right\}$$

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}=j\omega\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}-f(0^{+})$$

$$\mathscr{F}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\}=\frac{1}{j\omega}\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}$$

$$\mathscr{F}\left\{f(t)*g(t)\right\}=\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}\mathscr{F}\left\{g(t)\right\}$$

Частотная передаточная функция

Для дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m x$$

Частотная передаточная функция

Для дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m x$$

$$(a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n) Y(j\omega) = (b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m) X(j\omega)$$

Частотная передаточная функция

Для дифференциального уравнения *n*-го порядка

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m x$$

$$(a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n) Y(j\omega) = (b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m) X(j\omega)$$

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Передаточная функция

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Передаточная функция

$$W(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{b_0(j\omega)^m+b_1(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0(j\omega)^n+a_1(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Связь с передаточной функцией

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$ получается из обычной передаточной функции $W(p)$ подстановкой $p=j\omega$

$$W(j\omega)=W(p)\big|_{p=j\omega}$$

Представление частотной передаточной функции

В алгебраической форме

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}W(j\omega) + \mathrm{Im}W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

Представление частотной передаточной функции

В алгебраической форме

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}W(j\omega) + \mathrm{Im}W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

В показательной форме

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\psi(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U(j\omega)^2 + V(j\omega)^2}$$

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

Представление частотной передаточной функции

Для дробно-рациональной частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

Представление частотной передаточной функции

Для дробно-рациональной частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

справедливы следующие соотношения

Представление частотной передаточной функции

Для дробно-рациональной частотной передаточной функции

$$W(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

справедливы следующие соотношения

- $$|W(j\omega)| = \frac{|b(j\omega)|}{|a(j\omega)|}$$

Представление частотной передаточной функции

Для дробно-рациональной частотной передаточной функции

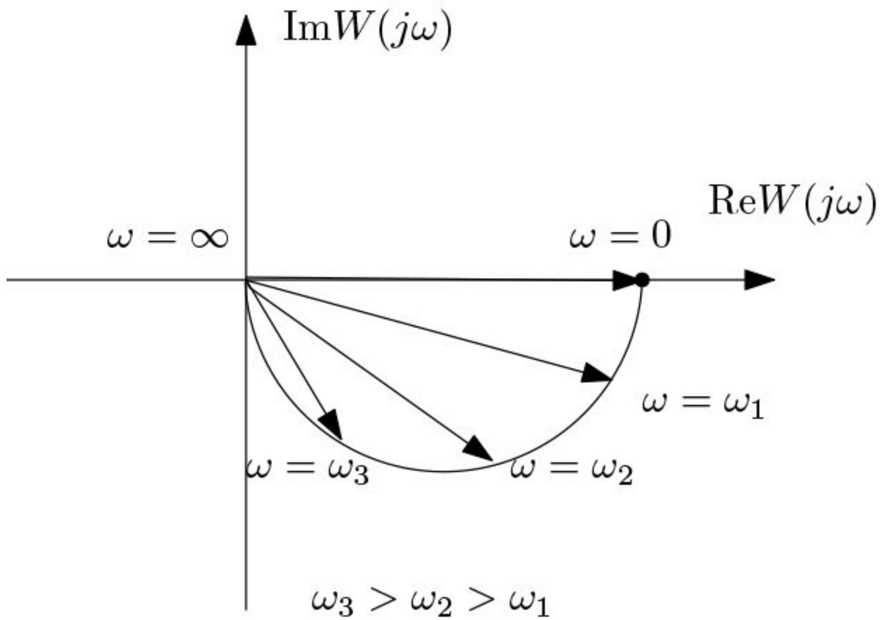
$$W(j\omega) = \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}$$

справедливы следующие соотношения

- $|W(j\omega)| = \dfrac{|b(j\omega)|}{|a(j\omega)|}$
- $\arg W(j\omega) = \arg b(j\omega) - \arg a(j\omega)$

АФЧХ

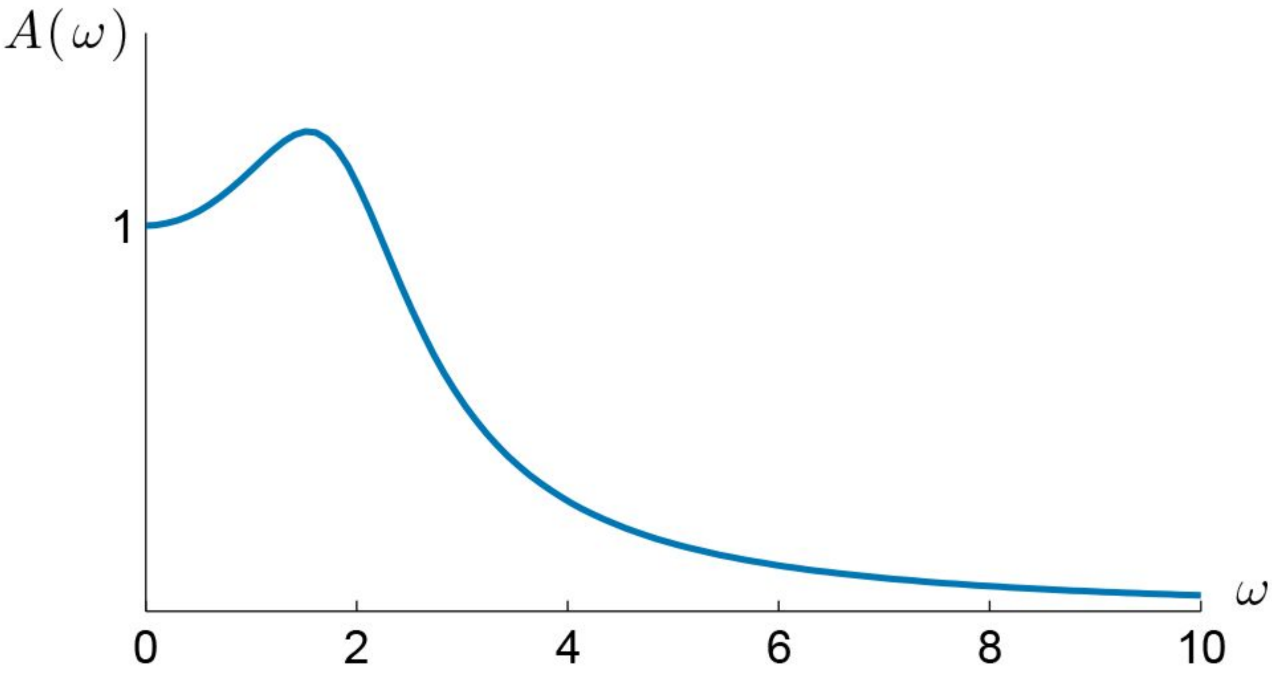
Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) – геометрическое место концов векторов (годограф), соответствующих частотной передаточной функции при изменении частоты от нуля до бесконечности



АЧХ

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость амплитуды сигнала от частоты

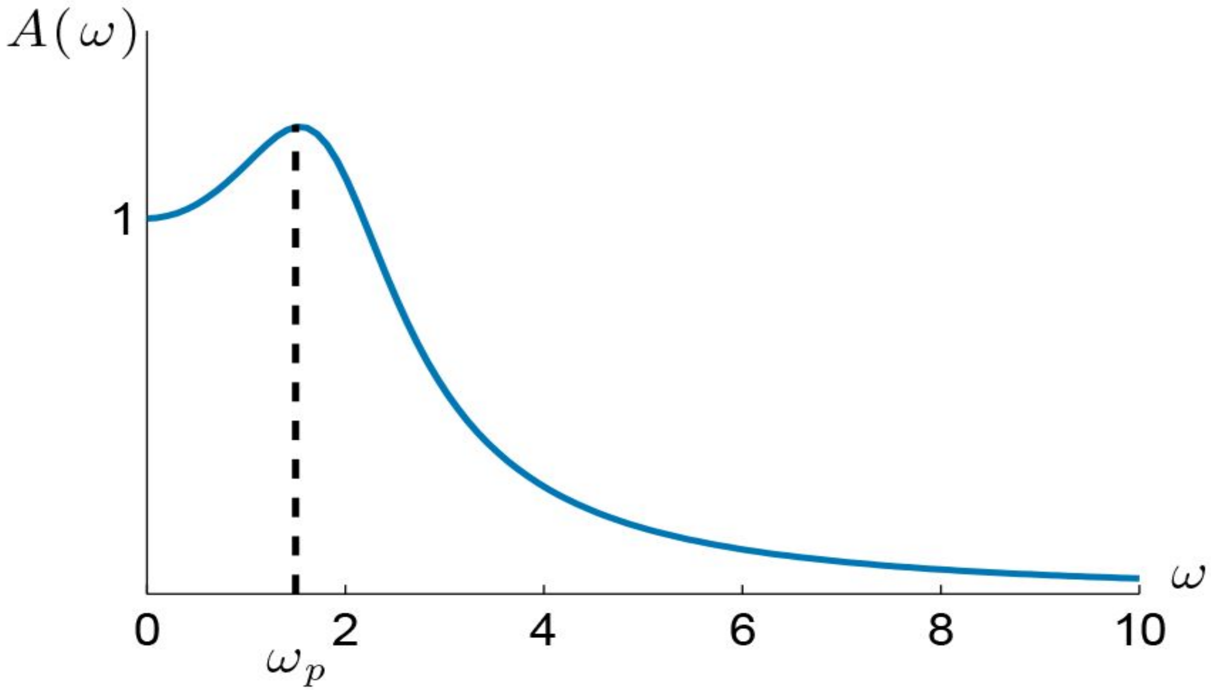
$$A(\omega) = |W(j\omega)|$$



АЧХ

Резонансная частота (ω_p) – частота, соответствующая максимальному значению АЧХ

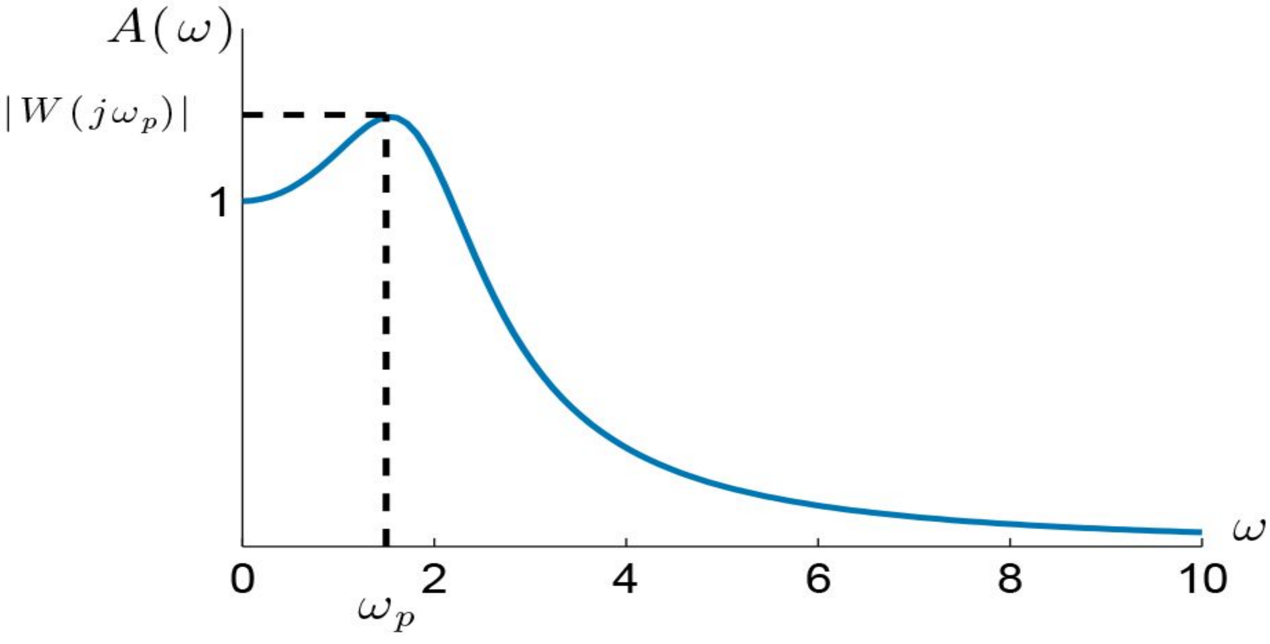
$$\omega_p : \left|W(j\omega)\right|\Big|_{\omega_p} = \left|W(j\omega)\right|_{max}$$



АЧХ

Показатель колебательности (*M*) – критерий качества системы, определяемый как относительная высота резонансного пика

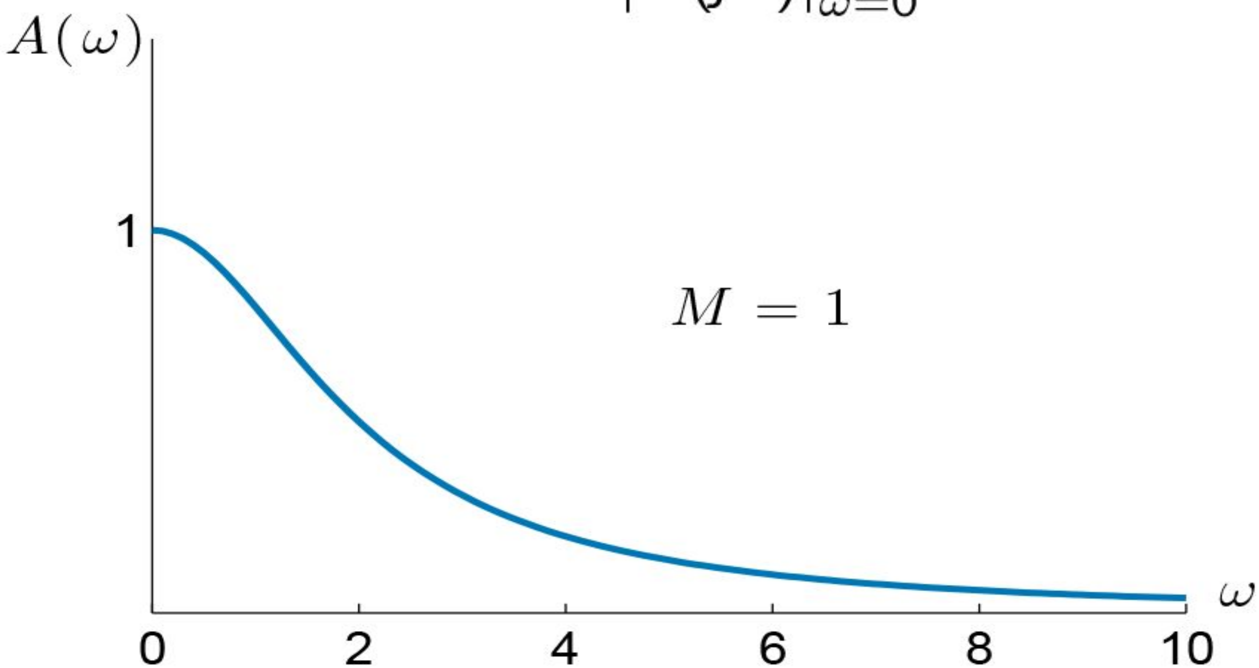
$$M = \frac{|W(j\omega)|_{\omega=\omega_p}}{|W(j\omega)|_{\omega=0}}$$



АЧХ

Показатель колебательности (M) – критерий качества системы, определяемый как относительная высота резонансного пика

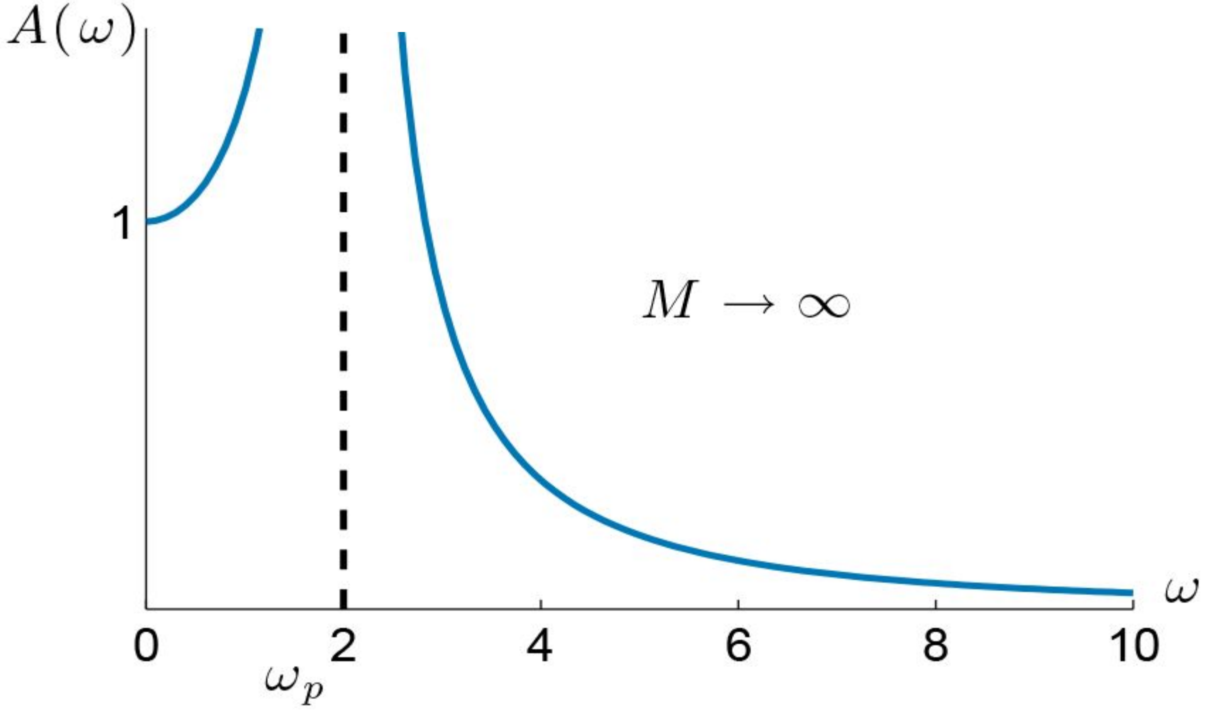
$$M = \frac{\left|W(j\omega)\right|_{\omega=\omega_p}}{\left|W(j\omega)\right|_{\omega=0}}$$



АЧХ

Показатель колебательности (M) – критерий качества системы, определяемый как относительная высота резонансного пика

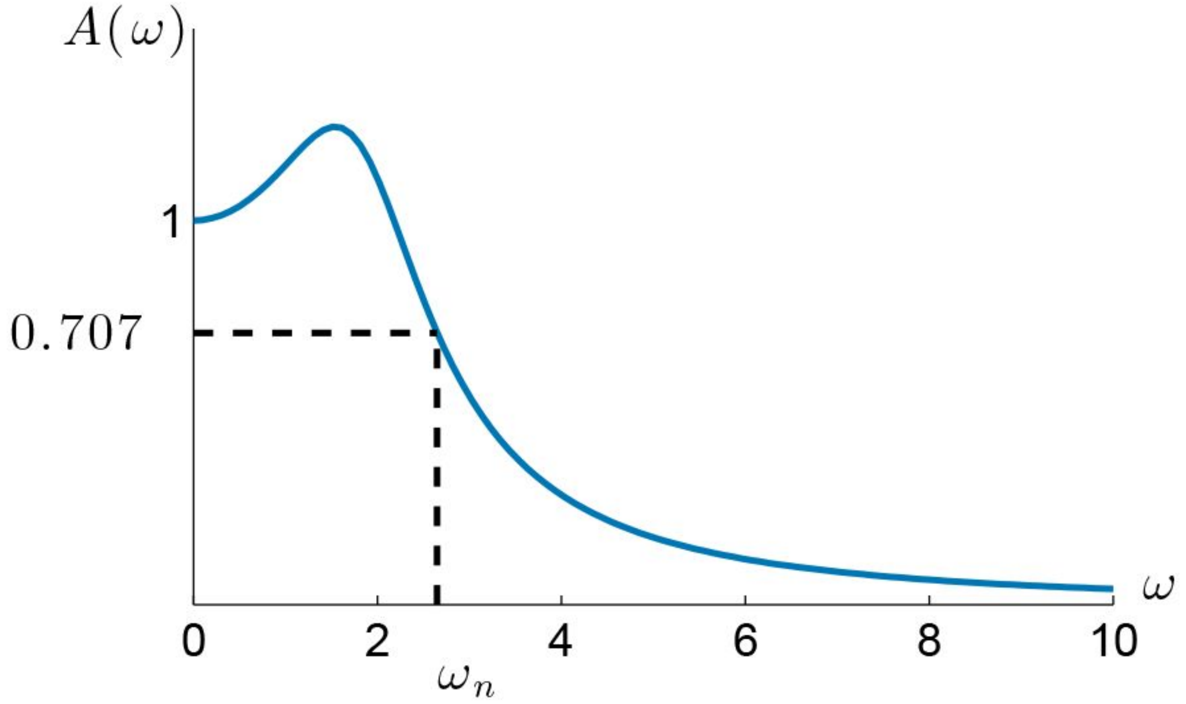
$$M = \frac{|W(j\omega)|_{\omega=\omega_p}}{|W(j\omega)|_{\omega=0}}$$



АЧХ

Полоса пропускания ($\omega_п$) – интервал частот, на котором выполняется соотношение

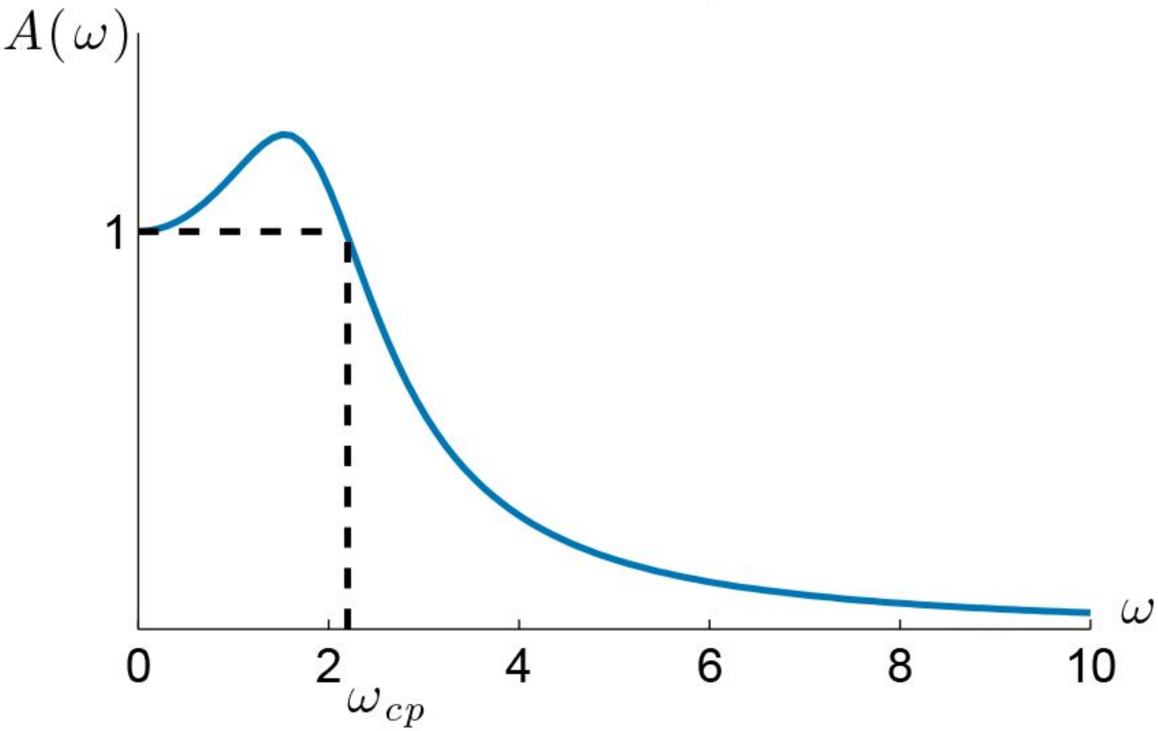
$$|W(j\omega)| \geq 0.707\ |W(j\omega)||_{\omega=0}$$



АЧХ

Частота среза($\omega_{ср}$) – максимальная частота, при которой АЧХ принимает значение, равное 1

$$\omega_{\text{ср}} : \left| W(j\omega) \right| \Big|_{\omega_{\text{ср}}} = 1$$

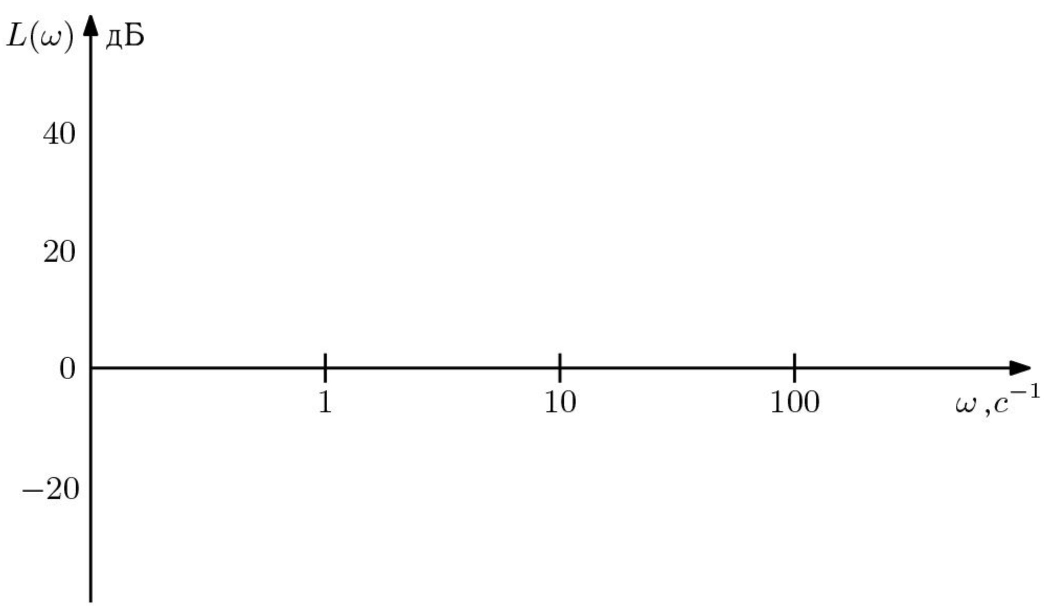


ЛАЧХ

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (*L(ω)*) – амплитудно-частотная характеристика в логарифмическом масштабе осей

ось абсцисс – частота в логарифмическом масштабе

ось ординат – *L(ω)* – коэффициент усиления в децибела



ЛАЧХ

Логарифмический масштаб оси абсцисс

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

Мощность входного сигнала $P_x(\omega) \sim |\mathbf{X}(\omega)|^2$

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

Мощность входного сигнала $P_x(\omega) \sim |\mathbf{X}(\omega)|^2$

Мощность выходного сигнала $P_y(\omega) \sim |Y(\omega)|^2$

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

Мощность входного сигнала $P_x(\omega) \sim |\mathbf{X}(\omega)|^2$

Мощность выходного сигнала $P_y(\omega) \sim |Y(\omega)|^2$

$$|Y(\omega)| = A(\omega)\,|\mathbf{X}(\omega)|$$

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

Мощность входного сигнала $P_x(\omega) \sim |\mathbf{X}(\omega)|^2$

Мощность выходного сигнала $P_y(\omega) \sim |Y(\omega)|^2$

$$|Y(\omega)| = A(\omega)\,|\mathbf{X}(\omega)|$$

$$\frac{P_y(\omega)}{P_x(\omega)} = \frac{|Y(\omega)|^2}{|\mathbf{X}(\omega)|^2} = \frac{A^2(\omega)\,|\mathbf{X}(\omega)|^2}{|\mathbf{X}(\omega)|^2} = A^2(\omega)$$

ЛАЧХ. Единица измерения

Бел (Б) – единица измерения, соответствующая десятикратному увеличению мощности.
1 дБ = 0,1 Б

Мощность входного сигнала $P_x(\omega) \sim |\mathbf{X}(\omega)|^2$

Мощность выходного сигнала $P_y(\omega) \sim |Y(\omega)|^2$

$$|Y(\omega)| = A(\omega)\,|\mathbf{X}(\omega)|$$

$$\frac{P_y(\omega)}{P_x(\omega)} = \frac{|Y(\omega)|^2}{|\mathbf{X}(\omega)|^2} = \frac{A^2(\omega)\,|\mathbf{X}(\omega)|^2}{|\mathbf{X}(\omega)|^2} = A^2(\omega)$$

$$L(\omega) = \lg\frac{P_y(\omega)}{P_x(\omega)} = \lg A^2(\omega) = 2\lg A(\omega)[\text{Б}] = 20\lg A(\omega)[\text{дБ}]$$

ФЧХ

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) – зависимость фазы сигнала от частоты

$$\varphi(\omega) = \arg\left(W\left(j\omega\right)\right)$$

ЛФЧХ

Логарифмическая фазо-частотная характеристика (ЛФЧХ) – зависимость фазы от частоты в полулогарифмическом масштабе осей

ось абсцисс – частота в логарифмическом масштабе

ось ординат – *φ(ω)* – вносимый фазовый сдвиг в градусах (радианах)