



Неравенства с модулем

Способы решения неравенств с модулями:

2

- 1. По определению модуля
- 2. Возведение обеих частей неравенства в квадрат
- 3. Замена переменной
- 4. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства
- 5. Равносильность неравенств системам
- 6. Важный частный случай

1. По определению модуля

3

$$|f(x)| < a$$



$$|3x-1| < 7$$

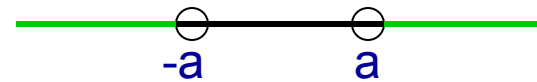
$$-7 < 3x-1 < 7$$

$$-6 < 3x < 8$$

$$-2 < x < \frac{8}{3}$$

$$\text{Ответ: } \left(-2; \frac{8}{3}\right)$$

$$|f(x)| > a$$



$$|5x-2| > 4$$

$$\begin{cases} 5x-2 > 4 \\ 5x-2 < -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x > 6 \\ 5x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$$

2. Возведение обеих частей в квадрат

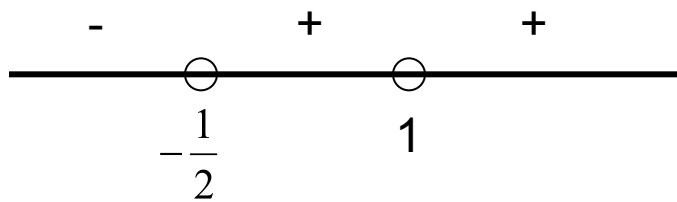
4

$$|x^2-1| > |x^2-x|$$

$(x^2-1)^2 > (x^2-x)^2$ - равносильность не нарушена

$(x^2-1+x^2-x)(x^2-1-x^2+x) > 0$ – разность квадратов

$$(2x^2-x-1)(x-1) > 0$$



$$x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$$

3. Замена переменной

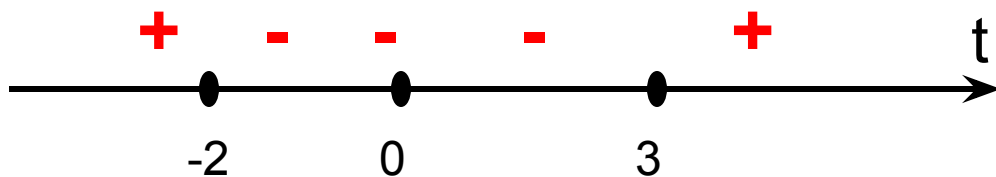
5

$$x^2 - |x| - 6 \leq 0$$

$$|x| = t; t \geq 0$$

$$t^2 - t - 6 \leq 0$$

$(t + 2)(t - 3) \leq 0$ учитывая условие $t \geq 0$, получим



$$0 \leq t \leq 3$$

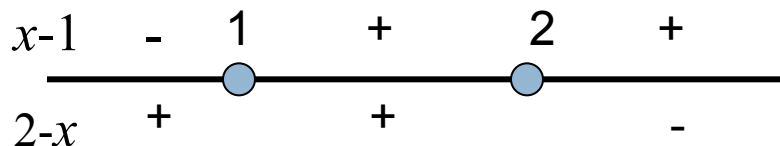
$$|x| \leq 3 \iff x \in [-3; 3]$$

Ответ: $[-3; 3]$

4. Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства

6

$|x-1| + |2-x| > 3$ Нули подмодульных выражений: $x = 1$ и $x = 2$



а)

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ -(x-1) + 2 - x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ x < 0 \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; 0)$$

б)

$$\begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x + 1 - x > 3 \end{cases}$$

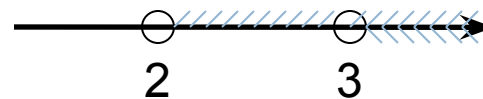
$$\begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ 1 > 3 - \text{неверное} \end{cases}$$

\emptyset

в)

$$\begin{cases} x > 2 \\ x - 3 + x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$



$$x \in (3; +\infty)$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

5. Равносильность неравенств системам или их совокупности

7

См. решение по определению

$$|f(x)| < g(x)$$

Равносильно неравенству:

$$-g(x) < f(x) < g(x)$$

Можно записать в виде системы

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| > g(x)$$

Неравенство равносильно двум неравенствам:

$$f(x) > g(x) \text{ или } f(x) < -g(x)$$

Можно записать в виде совокупности

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$$

5. Равносильность неравенств системам (примеры)

8

№ 1

$$3x + |2 - x| \leq 5$$

$$|2 - x| \leq 5 - 3x$$

$$\begin{cases} 2 - x \leq 5 - 3x \\ 2 - x \geq 3x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 1\frac{1}{2} \\ x \leq 1\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 1\frac{1}{2}]$$

№

2

$$5x - 7 < |x + 2|$$

$$|x + 2| > 5x - 7$$

$$\begin{cases} x + 2 > 5x - 7 \\ x + 2 < 7 - 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2\frac{1}{4} \\ x < \frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 2\frac{1}{4})$$

6. Один частный случай

9

$$\left| \frac{x-1}{x+2} \right| > 1 \quad \text{ОДЗ: } x \neq -2$$

$$\left| \frac{x-1}{x+2} \right| > 1 \quad \text{умножим на } |x+2| > 0 \text{ в ОДЗ}$$

$$|x-1| > |x+2| \quad \text{возведем в квадрат, обе части}$$

$$(x-1+x+2)(x-1-x-2) > 0$$

$$(2x+1)(-3) > 0$$

для преобразования используем
разность квадратов

$$2x+1 < 0$$

$$x < -\frac{1}{2} \quad \text{Учитывая ОДЗ, получим:}$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{1}{2})$$

Обучающая самостоятельная работа

10

Метод решения	условие	ответы
1. По определению модуля	$ x + 2 < 3$	$(-5; 1)$
По определению модуля	$ x^2 - 17 \geq -1$	$(-\infty; +\infty)$
По определению модуля	$ x^2 - 17 \geq 1$	$(-\infty; -3\sqrt{2}] [-4; 4] \cup [3\sqrt{2}; +\infty)$
По определению модуля	$\left \frac{x - 1}{x + 2} \right > 1$	
2. Возведение обеих частей в квадрат	$ x - 2 < x + 4 $	$(-1; +\infty)$
3. Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства	$x \cdot x \geq x$	$[-1; 0) \cup [1; +\infty)$
4. Замена переменной	$x^2 - 7 x - 8 \geq 0$	$(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$
Замена переменной	$2 x - 1 \geq (x - 1)^2 + 1$	$0; 2$
5. Замена совокупностью систем	$ x - 2 \geq 2x + 1$	$(-\infty; \frac{2}{3}]$

Обучающая самостоятельная работа

11

Метод решения	условие	ответы
1. По определению модуля	$ x + 2 < 3$	$(-5; 1)$
По определению модуля	$ x^2 - 17 \geq -1$	$(-\infty; +\infty)$
По определению модуля	$ x^2 - 17 \geq 1$	$(-\infty; -3\sqrt{2}] [-4; 4] \cup [3\sqrt{2}; +\infty)$
По определению модуля	$\left \frac{x-1}{x+2} \right > 1$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
2. Возведение обеих частей в квадрат	$ x - 2 < x + 4 $	$(-1; +\infty)$
3. Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства	$x \cdot x \geq x$	$[-1; 0) \cup [1; +\infty)$
4. Замена переменной	$x^2 - 7 x - 8 \geq 0$	$(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$
Замена переменной	$2 x - 1 \geq (x - 1)^2 + 1$	$0; 2$
5. Замена совокупностью систем	$ x - 2 \geq 2x + 1$	$(-\infty; \frac{2}{3}]$