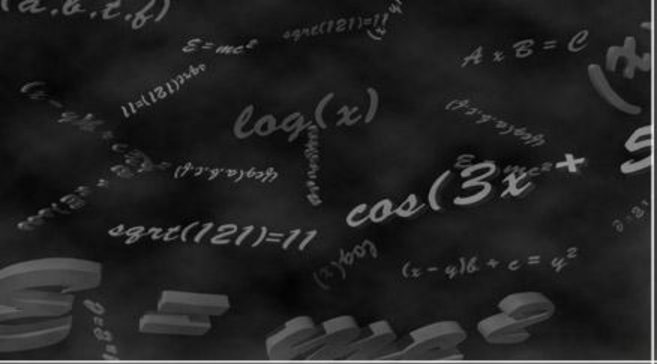
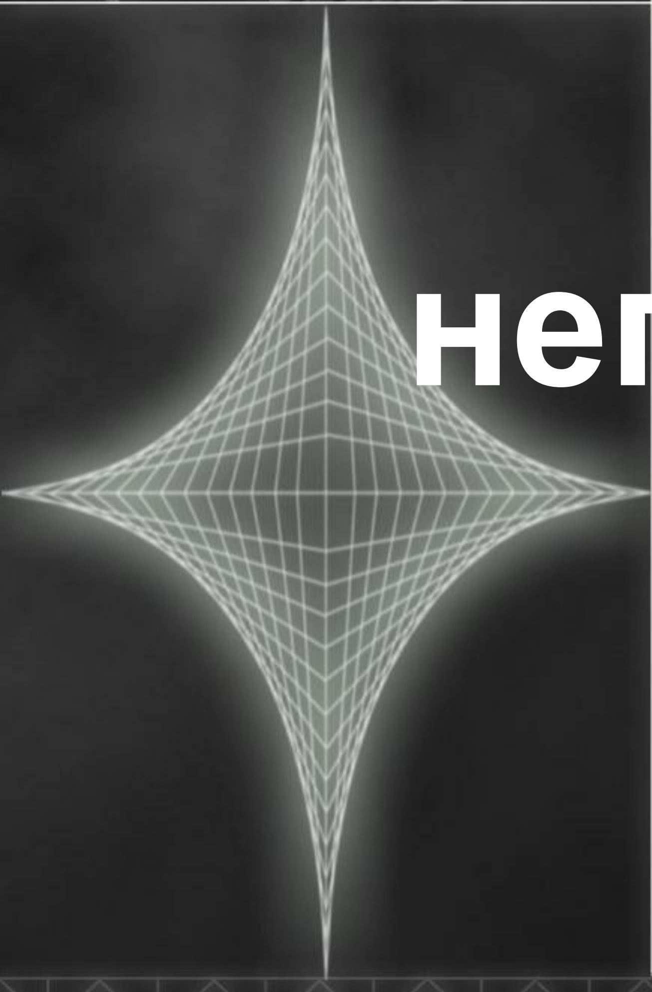


Функции, пределы, непрерывности.

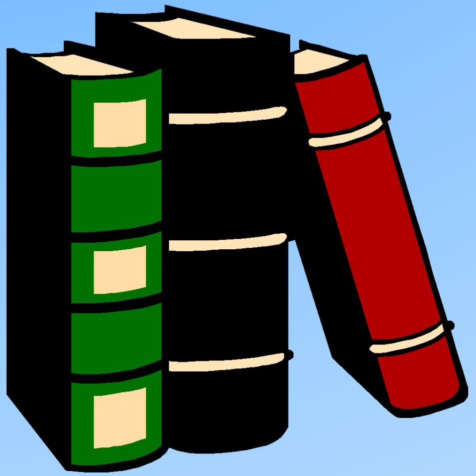


Основные вопросы:

- Понятие предела функции.
- Основные теоремы о пределах функций (*суммы, произведения и частного*).
- Методы вычисления пределов на неопределенность($\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$

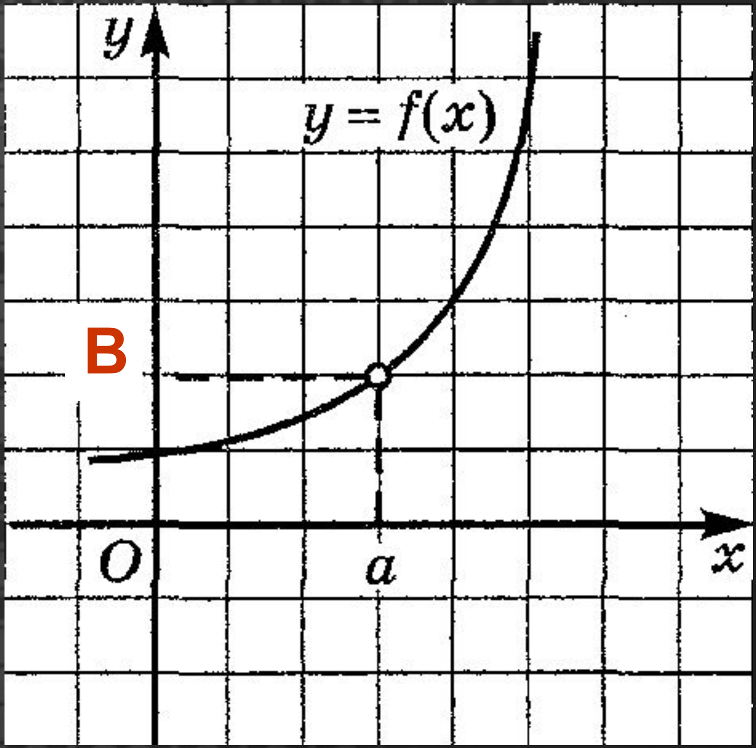
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

***Предел** – одно из основных понятий математического анализа.* Понятие предела использовалось еще Ньютоном во второй половине XVII века и математиками XVIII века, такими как Эйлер и Лагранж, однако они понимали предел интуитивно. Первые строгие определения предела дали Больцано в 1816 году и Коши в 1821 году.



РАЗЛИЧАЮТ – предел функции в точке И предел функции на бесконечности.

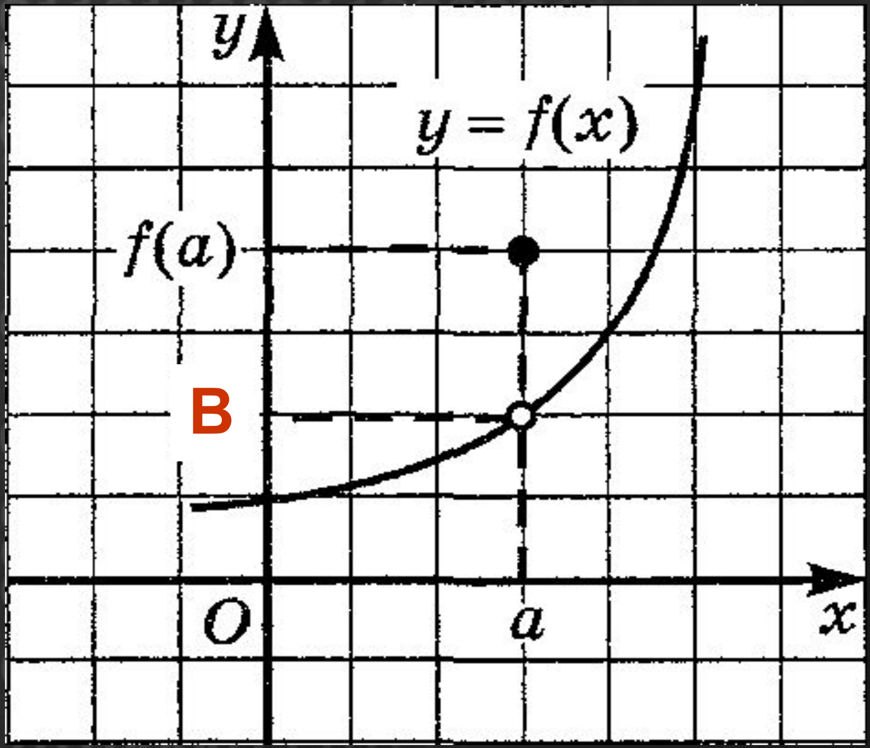
СЛУЧАЙ 1.



$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

$f(a)$ – не существует

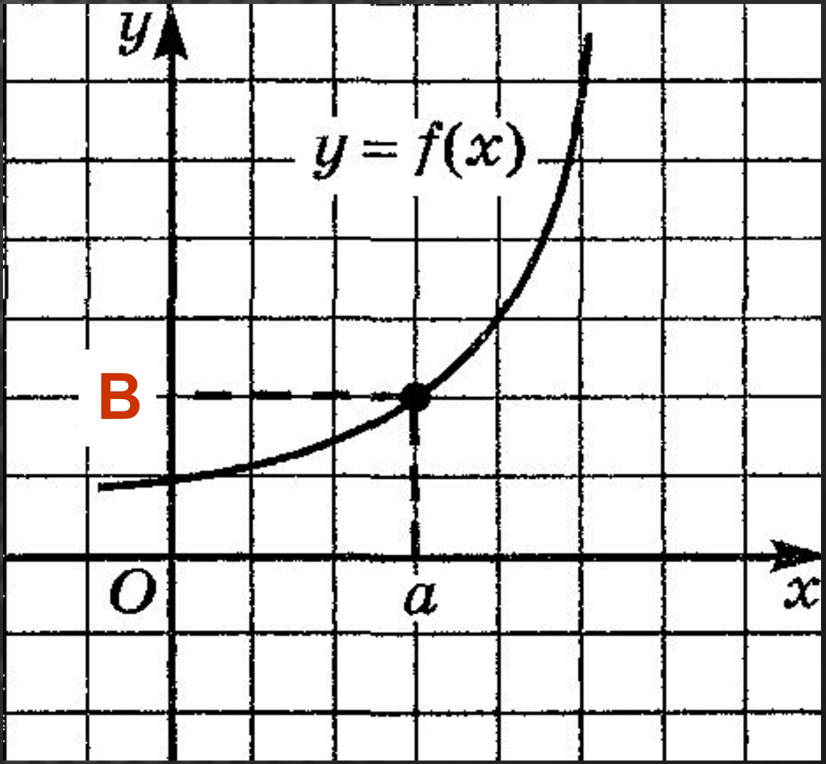
СЛУЧАЙ 2.



$$\lim_{x \to a} f(x) = B$$

$$f(a) \neq B$$

СЛУЧАЙ 3.

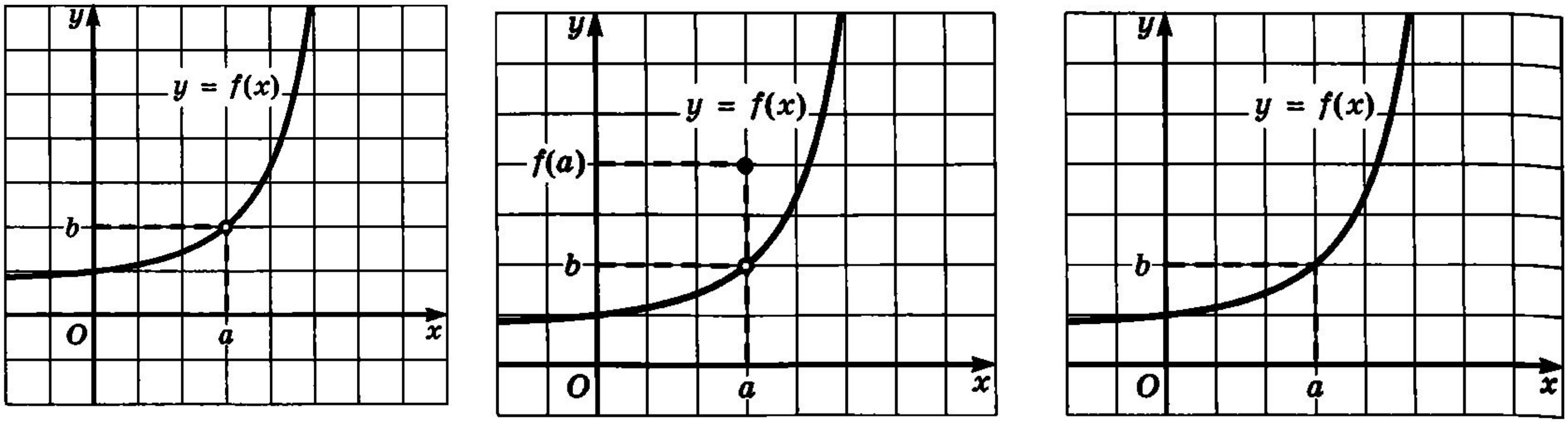


$$\lim_{x\to a} f(x) = B$$

$$f(a) = B$$

В этом случае говорят, что функция непрерывна в точке a

Предел функции



Для всех трех случаев используется одна и та же запись:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

А теперь ответьте на вопрос: какую из рассмотренных трех функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$?

<u>*Определение 1.*</u> Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке $x = a$**, если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Предел функции в точке

Число **В** называется пределом функции в точке **а**, если для всех значений **х** , достаточно близких к **а** и отличных от **а**, значение функции $f(x)$ сколько угодно мало отличается от **В**.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Теорема 1.

Предел суммы (разности) 2-х функций равен сумме (разности) их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 2.

Предел константы равен самой этой константе.

$$\lim_{x \to x_0} C = C$$

Теорема 3.

Предел произведения 2-х функций равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Теорема 4.

Предел отношения 2-х функций равен отношению) их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от 0:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, если\_\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Теорема 5.

Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} (k \cdot f(x)) = k \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Теорема 6.

Предел степени переменного равен той же степени предела основания:

$$\lim_{x \to a}(z^n) = (\lim_{x \to a} z)^n$$

Вычисление пределов

Вычисление предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$.

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию $f(x)$ получаются выражения вида:

то предел будет равен:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8;$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2;$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}\overset{(0/0)}{=}\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x+\frac{3}{2})}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}=\infty;$$

Примеры

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$.

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{4x + 12}$.

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 3}{4} = \frac{-3 - 3}{4} = -1{,}5.$$

Последовательности, пределы.

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 **в функцию** $f(x)$ **получаются выражения следующих видов:**

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0};\quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются ***неопределенности***, а вычисление пределов в этом случае называется ***раскрытие неопределенности.***

Методы вычисления пределов на неопределенность

$$\frac{0}{0}, \frac{c}{0}, \frac{c}{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0-0}{0-0}=\left(\frac{0}{0}\right)-$$

Раскрыть соответствующую неопределенность - это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения, что, однако не всегда просто.

Правило № 1

- В большинстве случаев, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, достаточно числитель и знаменатель дроби разделить на множители, и затем сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Пример №1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{2}{5}$$

Пример № 2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x^2+2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}4x}{\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^2+2x\right)}=\frac{4*0}{3*0+2*0}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{x(3x+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{4}{3x+2}=\frac{4}{3*0+2}=2.$$

Правило № 2

- Чтобы раскрыть неопределенность данного вида, зависящую от иррациональности, достаточно перевести иррациональность (или иррациональности) из числителя в знаменатель или из знаменателя в числитель и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\ \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\ldots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\ \ldots$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Пример:

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$.

Непосредственно подставляя число $x_0=0$ в функцию, получаем неопределенность (0/0). Учтем формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ и умножим числитель и знаменатель на выражение $\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+5x+4x^2}\right)^2-(3)^2}{x\cdot\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+5x+4x^2-9}{x\cdot\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+4x}{\sqrt{9+5x+4x^2}+3}=\frac{5+0}{\sqrt{9+0+0}+3}=$$

$$=\frac{5}{3+3}=\frac{5}{6}.$$

Основные правила раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty$

В процессе вычисления пределов функций могут встретиться разные <u>*случаи*</u>:

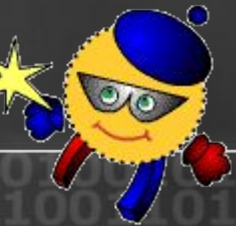
$$\lim_{x\to\infty}(2x^3+1)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+3}=0$$

Прямую подстановку использовать ***нельзя в тех случаях****, когда мы не можем вычислить значение элементарной функции, стоящей под знаком предела, в данной предельной точке* x_0 .

Бывают неопределённости вида



$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ $[\infty - \infty]$ $[\infty \cdot 0]$

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, надо числитель и знаменатель дроби почленно разделить на переменную в наивысшей степени.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на x в старшей степени

Замечание: если в числителе и знаменателе многочлены одной степени, то предел равен *отношению коэффициентов при старших степенях*, если же разной степени, но предел равен 0 или

$$\infty$$

Например:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}$$

При раскрытии неопределенности вида $[\infty - \infty]$ ***нужно числитель и знаменатель одновременно умножить на сопряженное выражение*** *и тем самым свести к неопределенности вида* $\frac{0}{0}$ *или* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Например:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}\right) = [\infty - \infty] = 0$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0$$

Упражнения:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-1}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(2x^2-3x+4\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left[(7x+2)(4x-3)(5x+1)\right]$$

Упражнения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(2x-2)}{x^2(5x-4)}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+5x-12}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{6-x}{3-\sqrt{x+3}}$$

Упражнения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sqrt{7}x^3}{7x^3+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+5}{x^2+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-2}{x^4-2x^3+3x-1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+x^2}{1-x^3-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-1}{1-x-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-2x^4+3x-1}{x^3+2x^2+4x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{2x^2+3x+4}$$

$$\lim_{X\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+3x+1}{4x^3-x^2-7x+8}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{x^3+4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x-2}}{1+3x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-5x}{4+2{,}5x}*\frac{x^2-2x+1}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}2^x$$

Домашнее задание: