



# Связь непрерывных и дискретных алгоритмов фильтрации



## Непрерывные и дискретные фильтры

	Непрерывный фильтр Калмана-Бьюси	Дискретный фильтр Калмана
Вектор состояния	(1)	$x_i = \Phi_i x_{i-1} + \Gamma_i w_i,$ (6)
Измерения	(2)	$y_i = H_i x_i + v_i,$ (7)
Оценка	(3)	$\hat{x}_{i/i-1} = \Phi_i \hat{x}_{i-1}$ $\hat{x}_i = \hat{x}_{i/i-1} + K_i (y_i - H_i \hat{x}_{i/i-1})$ (8)
Коэфф. усил	(4)	$K_i = P_i H_i^T R_i^{-1}$ (9)
Матрица ковариаций	(5)	$P_{i/i-1} = \Phi_i P_{i-1} \Phi_i^T + \Gamma_i Q_i \Gamma_i^T$ $P_i = (P_{i/i-1}^{-1} + H_i^T R_i^{-1} H_i)^{-1}$ (10)

## Стохастическая эквивалентность

- Детерминированные системы

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t) \quad (11) & \longrightarrow \Phi_i x_{i-1} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Psi_i w \quad (11) \\
 x(t_i) = x_i &
 \end{aligned}$$

- Стохастические системы  $\bar{x}(t_i) = \bar{x}_i; P(t_i) = P_i$  (12)

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(t)\bar{x}(t); \quad \longrightarrow \bar{\Phi}_i \bar{x}_{i-1} \quad (13)$$

$$\dot{P}(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t) \longrightarrow P_i \Phi_i P_{i-1} \Phi_i^T + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Psi_i Q \Psi_i^T dt$$



## Выражения для выполнения условий СЭ

- Математическое ожидание

$$\bar{x}(t_i) = \Phi(t_i, t_i - \Delta t) \bar{x}(t_i - \Delta t) \quad (14) \quad \rightarrow \quad \Phi_i = \Phi(t_i, t_i - \Delta t) \quad (14)$$

- Матрица ковариаций

$$P(t_i) = \Phi(t_i, t_{i-1}) P(t_{i-1}) \Phi^T(t_i, t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) G(t_{i-1} + \tau) Q(t_{i-1} + \tau) G^T(t_{i-1} + \tau) \Phi^T(t_i, \tau) d\tau \quad (15)$$



$$\Gamma_i Q_{di} \Gamma_i^T = \int_{t_i - \Delta t}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) G(\tau) Q(\tau) G^T(\tau) \Phi^T(t_i, \tau) d\tau \quad (16)$$



## Решение для стационарных процессов

- Матрица динамики

$$\Phi = e^{F(\Delta t)}$$

или

$$\Phi \approx \sum_{v=0}^k F^v \Delta t^v / v! .$$

(17)

- Матрица порождающих шумов

$$\Gamma Q_d \Gamma^T = \int_0^{\Delta t} \Phi(\tau) G Q G^T \Phi^T(\tau) d\tau .$$

(18)

Если интервал дискретизации мал, то  $\Phi(\tau) \approx \Phi^*$

$$\Gamma Q_d \Gamma^T \approx \Phi^* G Q G^T (\Phi^*)^T \Delta t .$$

(19)

Или даже более грубая аппроксимация  $\Phi(\tau) \approx E$

$$\Gamma Q_d \Gamma^T \approx G Q G^T \Delta t .$$

(20)

## Соотношения для матрицы порождающих шумов

Поскольку  $\Gamma Q_d \Gamma^T \approx G Q G^T \Delta t$  (21)

У  
 Можно использовать  $\Gamma = G \Delta t, Q_d = \frac{1}{\Delta t} Q, M(w_i w_i^T) = \frac{Q}{\Delta t}$ . (22)

С другой стороны  $\Gamma = E, Q_d = G Q G^T \Delta t$ . (23)

Оба выражения справедливы, т.к. удовлетворяют исходным соотношениям.



## Дискретные измерения

Для нахождения дискретных измерений необходимо определить матрицы  $H_i$  и  $R_i$ .

Для этой цели предположим, что измерения осредняются на интервале

$$t \in [t_{i-1}, t_{i-1} + \Delta t]$$

$$y_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (H(t)x(t) + v(t)) dt \quad ,, \quad (24)$$

тогда  $H(t) \approx H(t_i) = H_i$  ;  $R_i \approx \frac{1}{\Delta t} R(t_i)$  . (25)



## Заключение

- Описаны методы описания случайных процессов: корреляционная функция, спектральная плотность, формирующий фильтр.
- Показано, что фильтр Калмана-Бьюси является оптимальным линейным байесовским фильтром, который может применяться для линейных нестационарных динамических систем.
- Обсуждены условия стохастической эквивалентности и показана связь дискретной и непрерывной задач линейной фильтрации.