

## Ряд Фурье в действительной форме

Рядом Фурье для  $2l$ -периодической функции  $f(x)$ , кусочно-непрерывной и ограниченной на отрезке  $[-l; l]$  по основной тригонометрической системе называется ряд вида

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right),$$

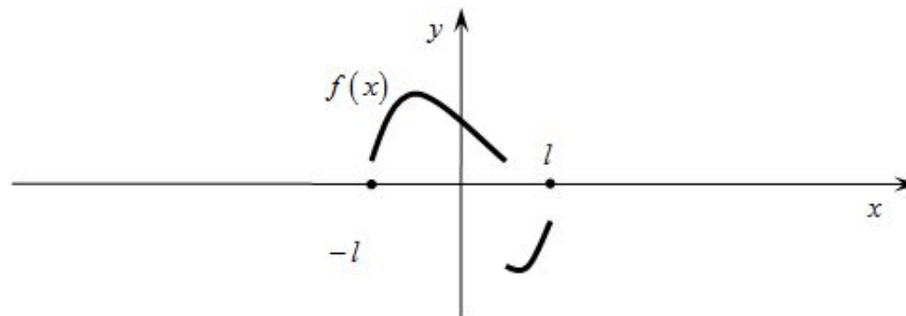
где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$$

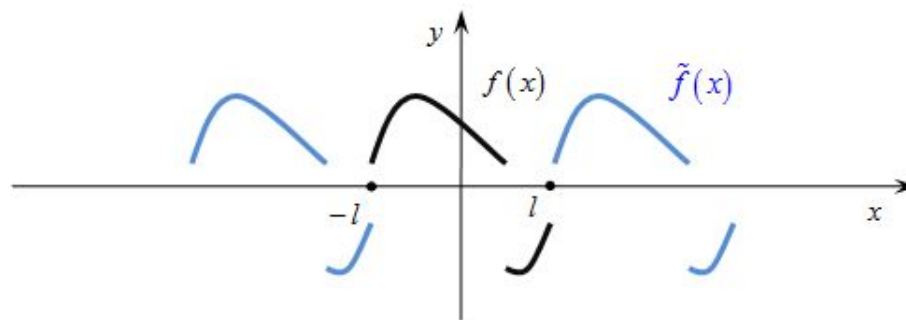
– коэффициенты ряда Фурье.

# Алгоритм представления функции рядом Фурье

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-l; l]$ , кусочно-непрерывна и ограничена на нем, имеет график



1. Построить периодическое продолжение  $\tilde{f}(x)$  функции на всю действительную ось, с периодом  $2l$ ,  $\tilde{f}(x)|_{x \in [-l; l]} = f(x)$ :



2. Для полученной функции  $\tilde{f}(x)$  вычислить коэффициенты по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

3. Записать ряд Фурье  $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l})$ .

4. Указать, что  $F(x) = \tilde{f}(x)$  для всех  $x$  – точек непрерывности функции  $\tilde{f}(x)$ , следовательно,

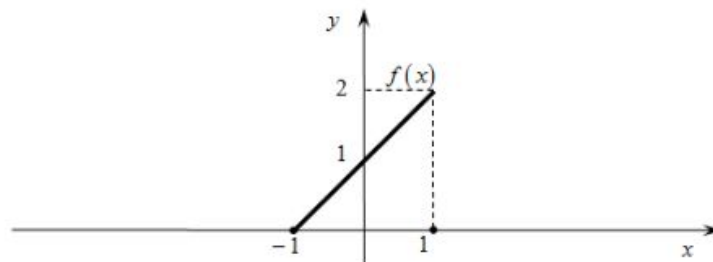
$F(x) = f(x)$  на отрезке  $[-l; l]$  в точках непрерывности функции  $f(x)$ . И

$F(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$  в точках разрыва функции  $f$ , при этом  $f(x-0)$  и  $f(x+0)$  – пределы слева и справа, соответственно, функции  $f(x)$  в точке разрыва.

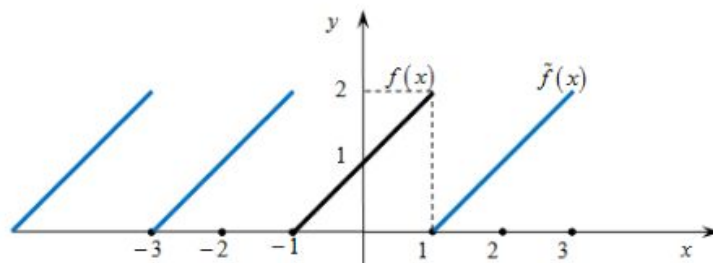
## Пример 1

Построить ряд Фурье для функции  $f(x) = x + 1$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

1. Строим график функции



2. Строим периодическое продолжение функции с периодом 2:



3. Вычислим коэффициенты ряда Фурье для функции  $\tilde{f}(x)$  по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (x+1) \cos \frac{\pi k x}{1} dx = \int_{-1}^1 (x+1) \cos \pi k x dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 (x+1) \sin \frac{\pi k x}{1} dx = \int_{-1}^1 (x+1) \sin \pi k x dx$$

Вычислим коэффициенты с помощью программы MathCad

$$\int_{-1}^1 (x+1) \cdot \cos(\pi k \cdot x) dx \rightarrow \frac{2 \cdot \sin(\pi \cdot k)}{\pi \cdot k}$$

$$\int_{-1}^1 (x+1) \cdot \sin(\pi k \cdot x) dx \rightarrow \frac{2 \cdot (\sin(\pi \cdot k) - \pi \cdot k \cdot \cos(\pi \cdot k))}{\pi^2 \cdot k^2}$$

Таким образом,

$$a_k = \frac{2 \sin \pi k}{\pi k} = 0,$$

$$b_k = \frac{2(\sin \pi k - \pi k \cos \pi k)}{\pi^2 k^2} = \frac{2(0 - \pi k(-1)^k)}{\pi^2 k^2} = -\frac{2(-1)^k}{\pi k}.$$

4. Составляем ряд Фурье:

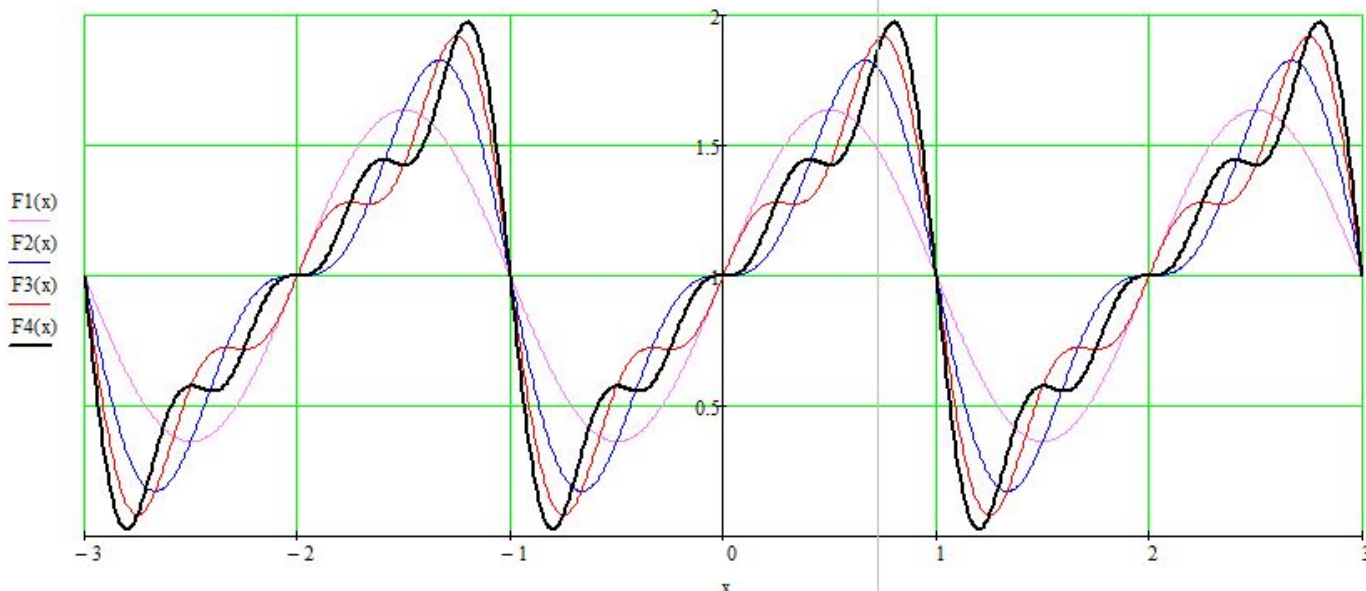
$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right) = \frac{2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( 0 \cos \pi k x - \frac{2(-1)^k}{\pi k} \sin \pi k x \right) = \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x. \end{aligned}$$

Полученный ряд  $F(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x$  сходится к функции  $\bar{f}(x)$  во всех точках непрерывности функции, т.е. для  $x \neq k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , следовательно,  $F(x) = f(x) = x + 1$  на интервале  $(-1; 1)$  и  $F(1) = \frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$ .

Изобразим на графике полученный ряд

$$F1(x) := 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{1} \cdot \sin(\pi x) \quad F2(x) := 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{1} \cdot \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi \cdot x)$$

$$F3(x) := 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{1} \cdot \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi \cdot x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \sin(3\pi \cdot x) \quad F4(x) := 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{1} \cdot \sin(\pi x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(2\pi \cdot x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-1}{3} \cdot \sin(3\pi \cdot x) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin(4\pi \cdot x)$$



## Ряды Фурье для четных и нечетных функций

Если функция  $f(x)$  четна на отрезке  $[-l; l]$ , то ее график симметричен относительно оси  $Oy$ , и коэффициенты вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi kx}{l} dx,$$

при этом коэффициент  $b_k = 0$ .

Ряд Фурье имеет вид  $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi kx}{l}$ , и называется рядом по косинусам.

Если функция  $f(x)$  нечетна на отрезке  $[-l; l]$ , то ее график симметричен относительно начала координат, и коэффициенты

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0,$$

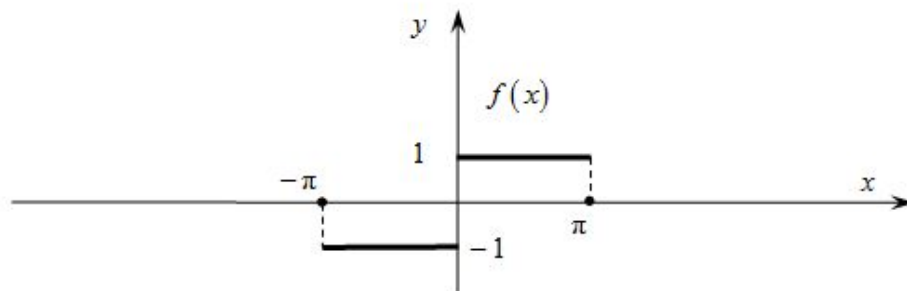
при этом коэффициент

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx.$$

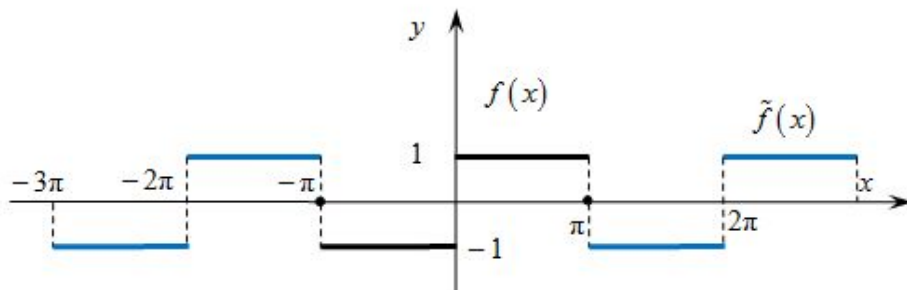
Ряд Фурье имеет вид  $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi kx}{l}$ , и называется рядом по синусам.

Построить ряд Фурье для функции  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

1. Строим график функции



2. Строим периодическое продолжение с периодом  $2\pi$ :



3. Вычисляем коэффициенты. Функция  $f(x)$  нечетна, следовательно,  $a_0 = 0$ ,  $a_k = 0$ ,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \sin \frac{\pi k x}{\pi} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \\ &= -\frac{2}{\pi k} (\cos \pi k - \cos 0) = -\frac{2}{\pi k} \left( (-1)^k - 1 \right). \end{aligned}$$

4. Составляем ряд Фурье

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi k} \left( (-1)^k - 1 \right) \sin kx.$$

Заметим, что

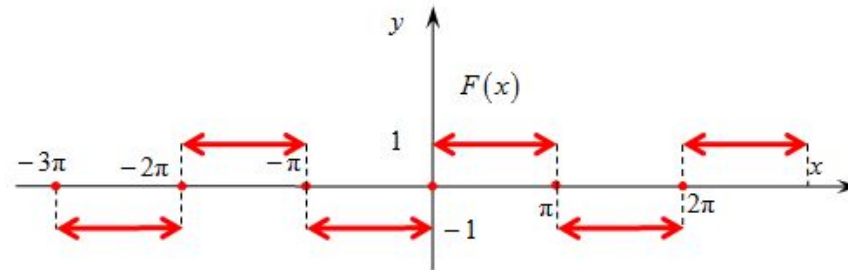
$$\left( (-1)^k - 1 \right) = \begin{cases} 0, & k - \text{четно} \\ -2, & k - \text{нечетно} \end{cases}$$

следовательно, ряд будет содержать только слагаемые, соответствующие нечетным  $k$ , или для  $k = 2n - 1$ , т.о.

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{2}{\pi k} \left( (-1)^k - 1 \right) \sin kx = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$F(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases} \text{ и } F(\pi) = \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Построим график  $F(x)$ :



Проверим себя с помощью программы MathCad

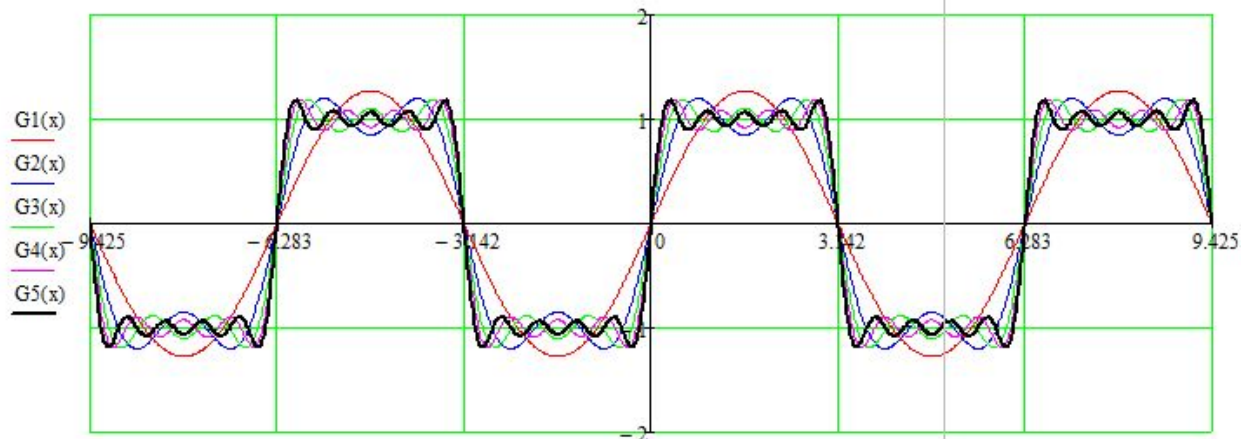
$$G1(x) := \frac{4}{\pi} \cdot (\sin(x))$$

$$G2(x) := \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} \right)$$

$$G3(x) := \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} \right)$$

$$G4(x) := \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} \right)$$

$$G5(x) := \frac{4}{\pi} \cdot \left( \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} \right)$$



# Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Пусть функция  $f(x)$  кусочно-непрерывна и ограничена на отрезке  $[a; b]$ ,  $a < b$ . Для разложения функции в ряд Фурье построим ее периодическое продолжение  $\tilde{f}(x)$  с периодом  $\frac{b-a}{2}$  и построим ряд Фурье для функции  $\tilde{f}(x)$  на отрезке  $[-\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{2}]$ :

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} \right)$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x) \cos \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx, \quad b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f(x) \sin \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx.$$

Так как для интеграла от  $2l$ -периодической функции верно равенство:

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_a^{a+2l} f(x) dx,$$

то коэффициенты ряда можно вычислить по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx, \quad b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx.$$

Если построить продолжение функции  $f(x)$  четным образом на отрезок  $[-b; b]$  периодически с периодом  $2b$ , то коэффициенты  $b_k$  ряда Фурье для продолжения функции будут равны нулю, а ряд Фурье будет иметь вид

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{b} \quad \text{с коэффициентами} \quad a_0 = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{b} dx.$$

Такой ряд называется рядом Фурье по косинусам.

Аналогично, если построить продолжение функции  $f(x)$  нечетным образом на отрезок  $[-b; b]$  периодически с периодом  $2b$ , то коэффициенты ряда Фурье для продолжения функции будут равны нулю, а ряд Фурье будет иметь вид:

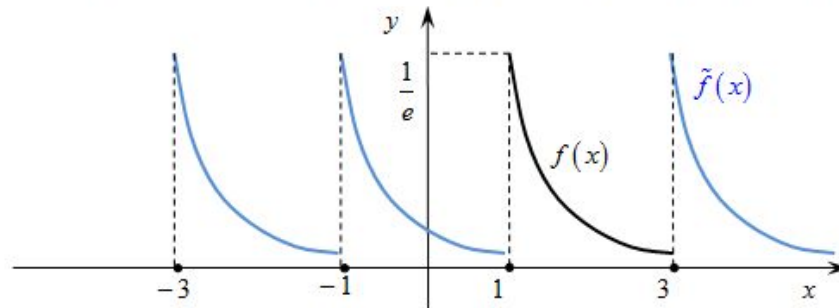
$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{b} \quad \text{с коэффициентами} \quad b_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin \frac{\pi k x}{b} dx.$$

Такой ряд называется рядом Фурье по синусам.



Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = e^{-x}$ , определенную на отрезке  $[1; 3]$ .

Решим сначала эту задачу в общем виде, построив периодическое продолжение функции  $\tilde{f}(x)$  с периодом  $3 - 1 = 2$ .



Вычислим коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{1} \int_1^3 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^3 = -(e^{-3} - e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3},$$

$$a_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx = \frac{1}{1} \int_1^3 e^{-x} \cos \frac{\pi k x}{1} dx = -\frac{e^{-x}}{\pi^2 k^2 + 1} (\cos \pi k x - \pi k \sin \pi k x) \Big|_1^3 =$$

$$= -\frac{e^{-3}}{\pi^2 k^2 + 1} \left( \underbrace{\cos 3\pi k}_{=(-1)^k} - \underbrace{\pi k \sin 3\pi k}_{=0} \right) + \frac{e^{-1}}{\pi^2 k^2 + 1} \left( \underbrace{\cos \pi k}_{=(-1)^k} - \underbrace{\pi k \sin \pi k}_{=0} \right) = \frac{(-1)^k (e^{-1} - e^{-3})}{\pi^2 k^2 + 1}.$$

$$b_k = \frac{1}{\frac{b-a}{2}} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi k x}{\frac{b-a}{2}} dx = \int_1^3 e^{-x} \sin \pi k x dx = \frac{e^{-x}}{\pi^2 k^2 + 1} (\sin \pi k x + \pi k \cos \pi k x) \Big|_1^3 = \frac{\pi k (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} (e^{-1} - e^{-3}).$$

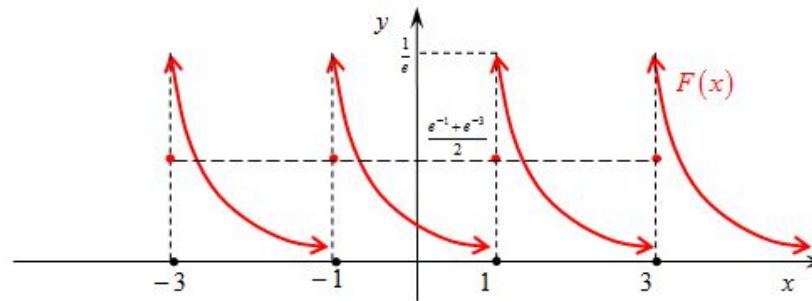
Итак, получим ряд Фурье:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^{-1} - e^{-3}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^k (e^{-1} - e^{-3})}{\pi^2 k^2 + 1} \cos \pi k x + \frac{\pi k (-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} (e^{-1} - e^{-3}) \sin \pi k x \right) = \\ &= \frac{e^{-1} - e^{-3}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (e^{-1} - e^{-3})}{\pi^2 k^2 + 1} (\cos \pi k x + \pi k \sin \pi k x) = \\ &= (e^{-1} - e^{-3}) \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^2 k^2 + 1} (\cos \pi k x + \pi k \sin \pi k x) \right). \end{aligned}$$

$F(x) = \bar{f}(x)$  в точках непрерывности, так как  $\bar{f}(x)|_{x \in [1;3]} = e^{-x}$ , то  $F(x) = e^{-x}$  на отрезке  $[1; 3]$ .

В точках разрыва  $F(1) = \frac{f(1-0)+f(x+0)}{2} = \frac{e^{-3}+e^{-1}}{2}$

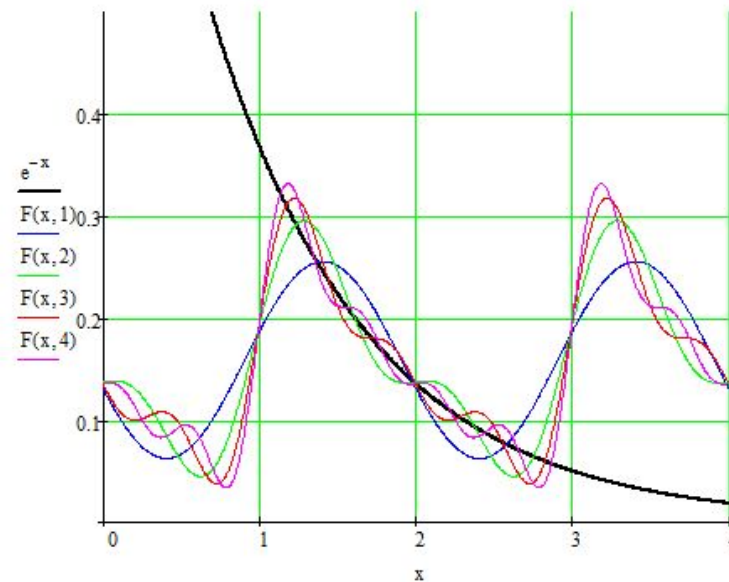
Построим схематический график полученного ряда.



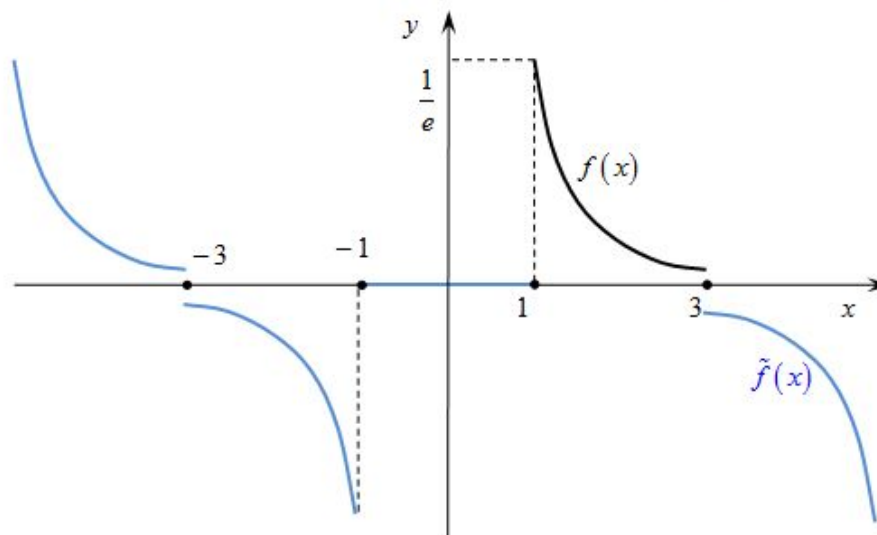
Построим график полученного ряда методами MathCad

$$b(k) := \int_1^3 e^{-x} \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x) dx \quad a(k) := \int_1^3 e^{-x} \cdot \cos(\pi \cdot k \cdot x) dx \quad a_0 := \int_1^3 e^{-x} dx$$

$$\bar{F}(x, N) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a(k) \cdot \cos(\pi \cdot k \cdot x) + b(k) \cdot \sin(\pi \cdot k \cdot x))$$



Построим разложение в ряд Фурье функции  $f(x) = e^{-x}$ , определенной на отрезке  $[1; 3]$ , продолжив ее нечетным образом на  $\mathbf{R}$ .



Функция  $\tilde{f}(x)$  периодична, с периодом 6, нечетна, следовательно, ее ряд Фурье будет иметь вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{b} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{3} \text{ с коэффициентами}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \sin \frac{\pi k x}{b} dx = \frac{2}{3} \int_0^3 \tilde{f}(x) \sin \frac{\pi k x}{3} dx = \frac{2}{3} \int_1^3 e^{-x} \sin \frac{\pi k x}{3} dx = \\ &= \frac{6e^{-x}}{\pi^2 k^2 + 9} \left( \sin \frac{\pi k x}{3} + \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi k x}{3} \right) \Big|_1^3 = \frac{6}{\pi^2 k^2 + 9} \left( e^{-3} \left( \sin \pi k + \frac{\pi k}{3} \cos \pi k \right) - e^{-1} \left( \sin \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi k}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{6}{\pi^2 k^2 + 9} \left( e^{-3} \frac{\pi k}{3} (-1)^k - e^{-1} \left( \sin \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi k}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

Ряд Фурье имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 k^2 + 9} \left( e^{-3} \frac{\pi k}{3} (-1)^k - e^{-1} \left( \sin \frac{\pi k}{3} + \frac{\pi k}{3} \cos \frac{\pi k}{3} \right) \right) \sin \frac{\pi k x}{3}$$

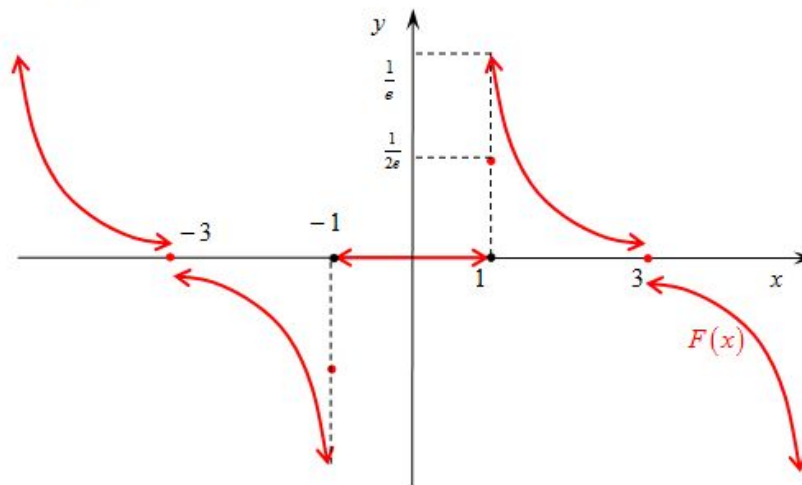
$F(x) = \tilde{f}(x)$  в точках непрерывности, так как  $\tilde{f}(x)|_{x \in [1; 3]} = e^{-x}$ , то  $F(x) = e^{-x}$  на отрезке  $[1; 3]$ .

В точках разрыва:

$$F(3) = \frac{f(3-0) + f(3+0)}{2} = \frac{e^{-3} + (-e^{-3})}{2} = 0,$$

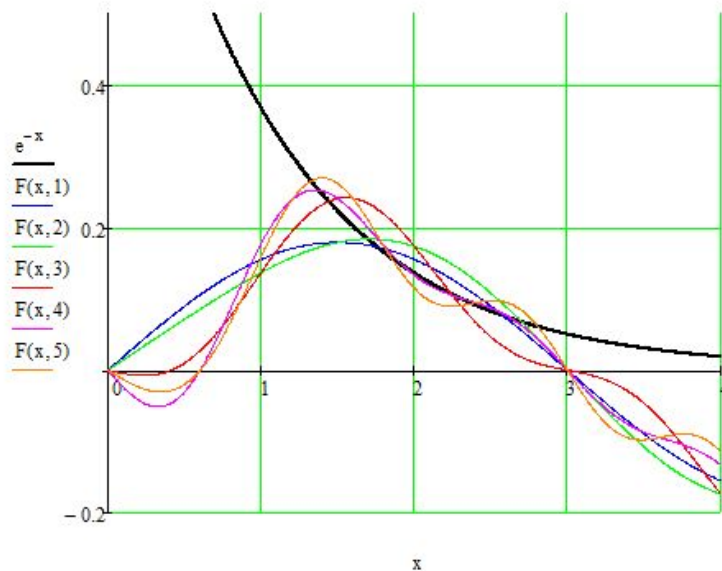
$$F(1) = \frac{f(1-0) + f(1+0)}{2} = \frac{0 + (e^{-1})}{2} = -\frac{1}{2e}.$$

Построим схематический график полученного ряда.



Проведем вычисления с помощью MathCad:

$$b(k) := \frac{2}{3} \int_1^3 e^{-x} \cdot \sin\left(\pi \cdot k \cdot \frac{x}{3}\right) dx \quad F(x, N) := \sum_{k=1}^N \left( b(k) \cdot \sin\left(\pi \cdot k \cdot \frac{x}{3}\right) \right)$$



Заметим, что полученный ряд сходится к функции медленнее, в отличие от ряда, построенного в предыдущем примере, т.е. для приближения с заданной точностью в полученном ряде нужно взять больше слагаемых, чем в ряде, построенном в примере 3.

## Ряд Фурье в комплексной форме

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[-l; l]$ , кусочно-непрерывна и ограничена на нем, если функция периодична с периодом  $2l$ , то ряд

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{iskx}{l}}, \quad \text{где } c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{iskx}{l}} dx - \text{коэффициенты ряда}$$

является рядом Фурье функции  $f(x)$  в комплексной форме.

Этот ряд сходится к функции  $f(x)$  во всех точках непрерывности и

$$F(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

в точках разрыва функции  $f$ , при этом  $f(x-0)$  и  $f(x+0)$  – пределы слева и справа, соответственно, функции  $f(x)$  в точке разрыва.

Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  тригонометрического ряда Фурье и  $c_k$  ряда Фурье в комплексной форме связаны следующими равенствами:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}; \quad c_k = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

$$a_k = c_k + c_{-k}; \quad b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

Построить ряд Фурье для функции  $f(x) = e^{-x}$ , определенной на отрезке  $[0; \pi]$ .

Построим периодическое продолжение  $\bar{f}(x) = e^{-x}$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$  с периодом  $2\pi$  ( $l = \pi$ ) и вычислим коэффициент  $c_k$  ряда Фурье в комплексной форме:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{ikx}{l}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-\frac{ikx}{\pi}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x(ik+1)} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{e^{-x(ik+1)}}{ik+1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi(ik+1)} (e^{-\pi(ik+1)} - e^{\pi(ik+1)}) = \\ &= \frac{-1(-ik+1)}{2\pi(ik+1)(-ik+1)} (e^{-\pi} e^{-\pi ik} - e^{\pi} e^{\pi ik}) = \left| \begin{array}{l} -\pi ik = \cos \pi k - i \sin \pi k = (-1)^k \\ e^{\pi ik} = \cos \pi k + i \sin \pi k = (-1)^k \end{array} \right| = \\ &= \frac{-1(1-ik)}{2\pi(1+k^2)} \cdot (e^{-\pi} - e^{\pi}) (-1)^k = \frac{(-1)^k (1-ik)}{\pi(1+k^2)} \cdot \underbrace{\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}}_{\text{sh } \pi} = \frac{(-1)^k (1-ik) \text{sh } \pi}{\pi(1+k^2)}. \end{aligned}$$

Итак, ряд Фурье имеет вид:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ikx}{l}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-ik) \text{sh } \pi}{\pi(1+k^2)} e^{\frac{ikx}{\pi}} = \frac{\text{sh } \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k (1-ik) e^{ikx}}{1+k^2}.$$

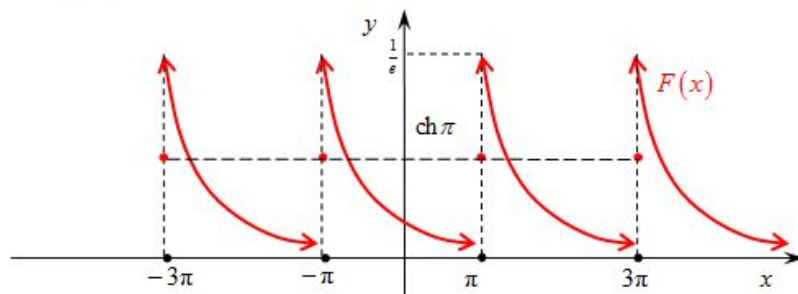
$F(x) = \bar{f}(x)$  в точках непрерывности, так как

$$\bar{f}(x) \Big|_{x \in [-\pi; \pi]} = e^{-x}, \text{ то } F(x) = e^{-x} \text{ на отрезке } [-\pi; \pi].$$

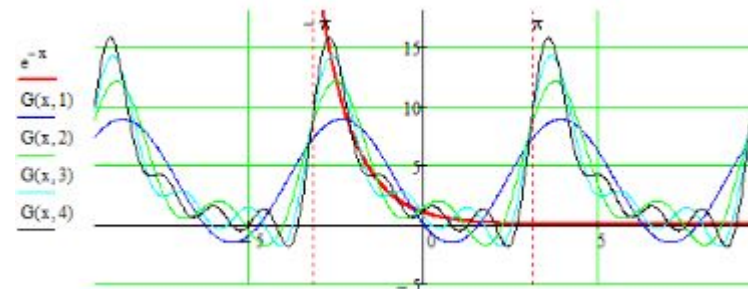
В точках разрыва:

$$F(\pi) = \frac{f(\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} = \text{ch } \pi$$

Построим эскиз графика полученного ряда и график с помощью MathCad



$$G(x, N) := \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{(-1)^k (1-ik) e^{i \cdot k \cdot x}}{1+k^2}$$



Составить ряд Фурье для функции  $f(x) = |\sin x|$  на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  в тригонометрической и комплексной формах.

Так как функция  $f(x)$  четная, то разложим ее в ряд по косинусам:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{b}$$

с коэффициентами

$$a_0 = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b f(x) \cos \frac{\pi k x}{b} dx.$$

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{4}{\pi} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos \frac{\pi k x}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos(1+2k)x}{(1+2k)} + \frac{\cos(1-2k)x}{(1-2k)} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos 0}{(1+2k)} + \frac{\cos 0}{(1-2k)} \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{1-4k^2}. \end{aligned}$$

Получим ряд Фурье  $F(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2kx$ .

Используя формулу  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ , находим

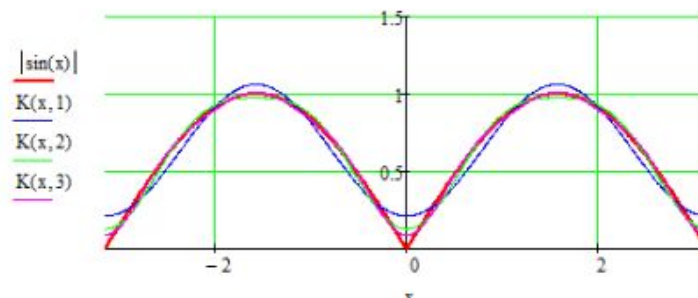
$$c_k = \frac{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4k^2} - 0}{2} = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}$$

и составляем ряд Фурье в комплексной форме

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4k^2)} e^{i2kx} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2kx}}{1-4k^2}.$$

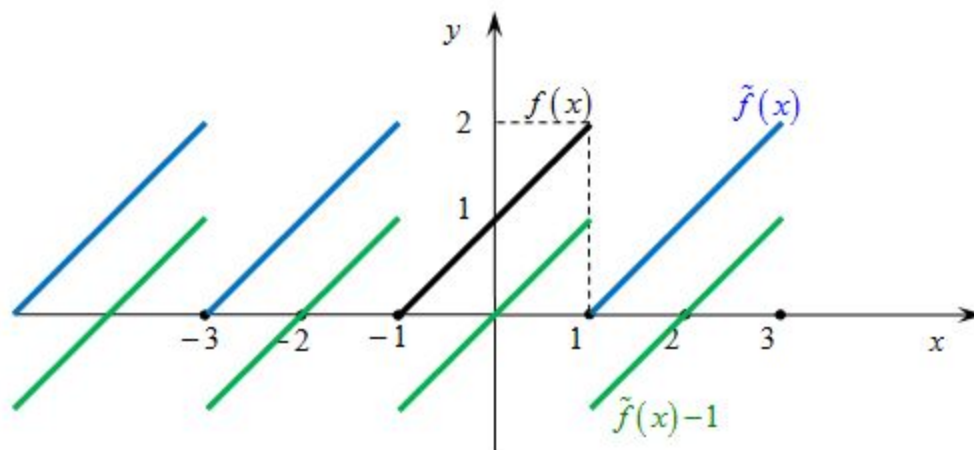
Построим ряд и график

$$\tilde{K}(x, N) := \frac{2}{\pi} \sum_{k=-N}^N \frac{e^{i2k \cdot x}}{1-4k^2}$$



Построить ряд Фурье для функции  $f(x) = x + 1$  на отрезке  $[-1; 1]$ .

1. Строим график и периодическое продолжение функции с периодом 2:



Заметим, что функция  $\tilde{f}(x) - 1$  нечетна, следовательно, ее ряд Фурье будет рядом по синусам и коэффициенты

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l (\tilde{f}(x) - 1) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = 2 \int_0^1 x \sin \pi k x dx = -2 \frac{(-1)^k}{\pi k}.$$

Ряд Фурье для функции  $\tilde{f}(x) - 1$  имеет вид

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -2 \frac{(-1)^k}{\pi k} \sin \pi k x = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x.$$

Для функции  $\tilde{f}(x)$  ряд Фурье найдем сдвигом полученного ряда на 1 вверх:

$$F(x) = G(x) + 1 = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \pi k x.$$

Заметим, что полученный ряд мы уже находили в примере 1.