

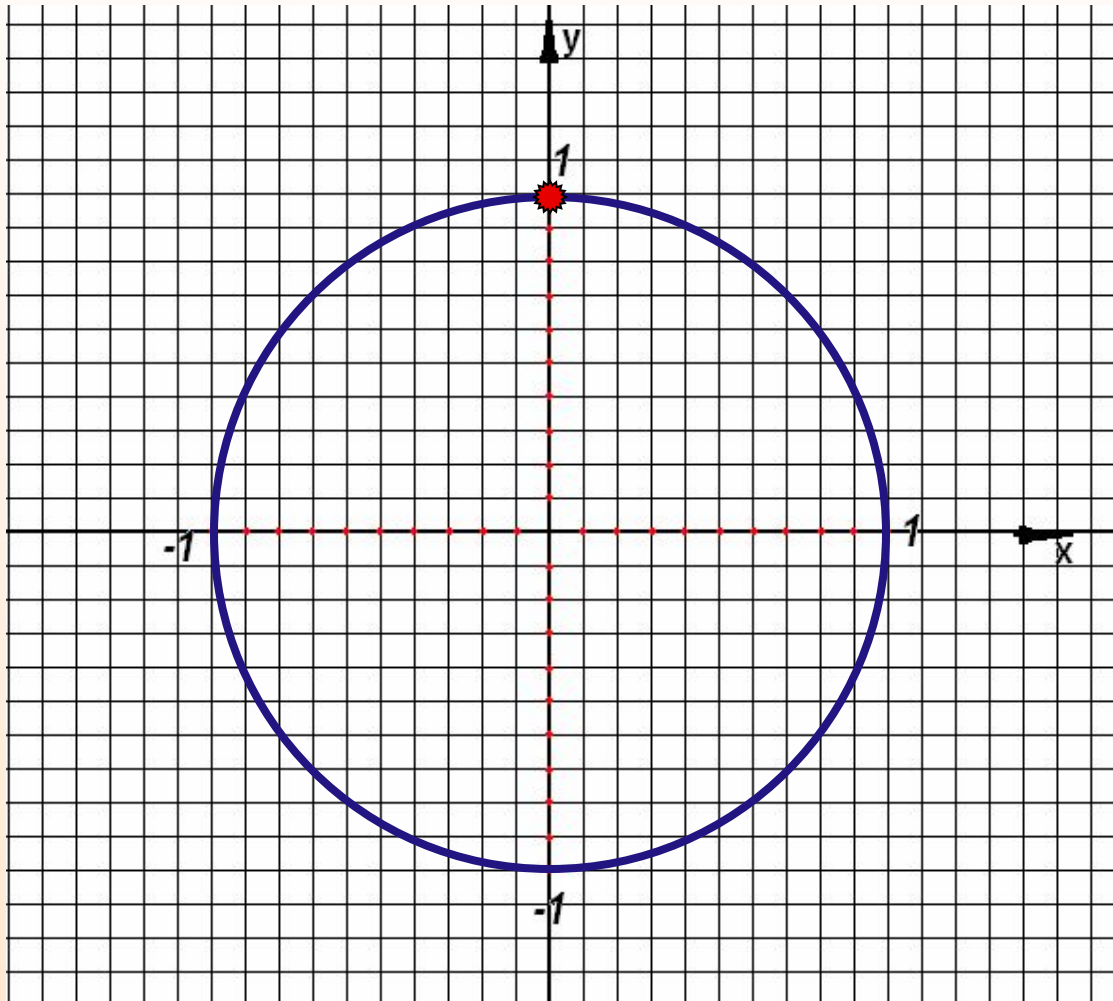
«Единичная окружность в тригонометрии»

Элективный курс в форме уроков дистанционного обучения для учащихся 11 для подготовки учащихся к решению задач повышенной сложности по теме - «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Работа выполнена учителем математики МОУ «Курлекская СОШ» Томского района Томской области

Логуновой Л.В.
Курлек - 2006

Зачем нужна единичная окружность?



Единичная окружность необходима при изучении тригонометрических функций и построении их графиков, часто используется в решении тригонометрических уравнений и неравенств при отборе корней.

Цель: повторить, как устанавливается соответствие между действительными числами на числовой прямой и точками единичной окружности; рассмотреть использование единичной окружности при решении различных задач.



Содержание

Урок 1 – «Отображение точек числовой прямой на точки единичной окружности»

Урок 2 – «Способ записи координаты точки единичной окружности»

Урок 3 – «Метод лепестков»

Урок 4 – «Числовые промежутки на единичной окружности»

Урок 5 – «Решение тригонометрических неравенств»

Итог



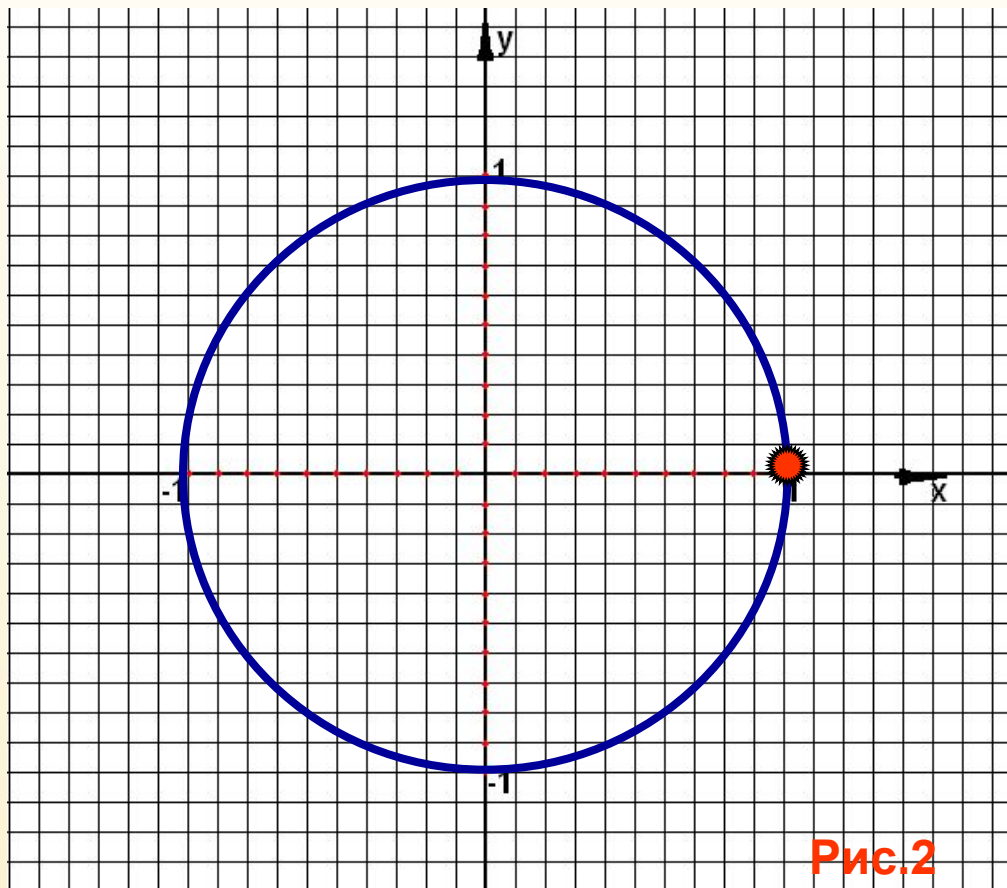
Урок 1

- ❖ Определение
- ❖ Способ задания соответствие между множеством действительных чисел и точками единичной окружности
(криволинейная система координат)
- ❖ Упражнения (тесты)



Определение единичной окружности

Автоматический показ



- Окружность радиуса 1 с центром в начале координат называют *единичной окружностью*.

Зададим соответствие между множеством действительных чисел и точками единичной окружности следующим образом:



Способ задания соответствия между множеством действительных чисел и точками единичной окружности

Координатную прямую с началом отсчета в точке А будем «наматывать», как нитку, на единичную окружность сначала в положительном направлении – **против хода** часовой стрелки, потом в отрицательном – **по ходу** часовой стрелки.

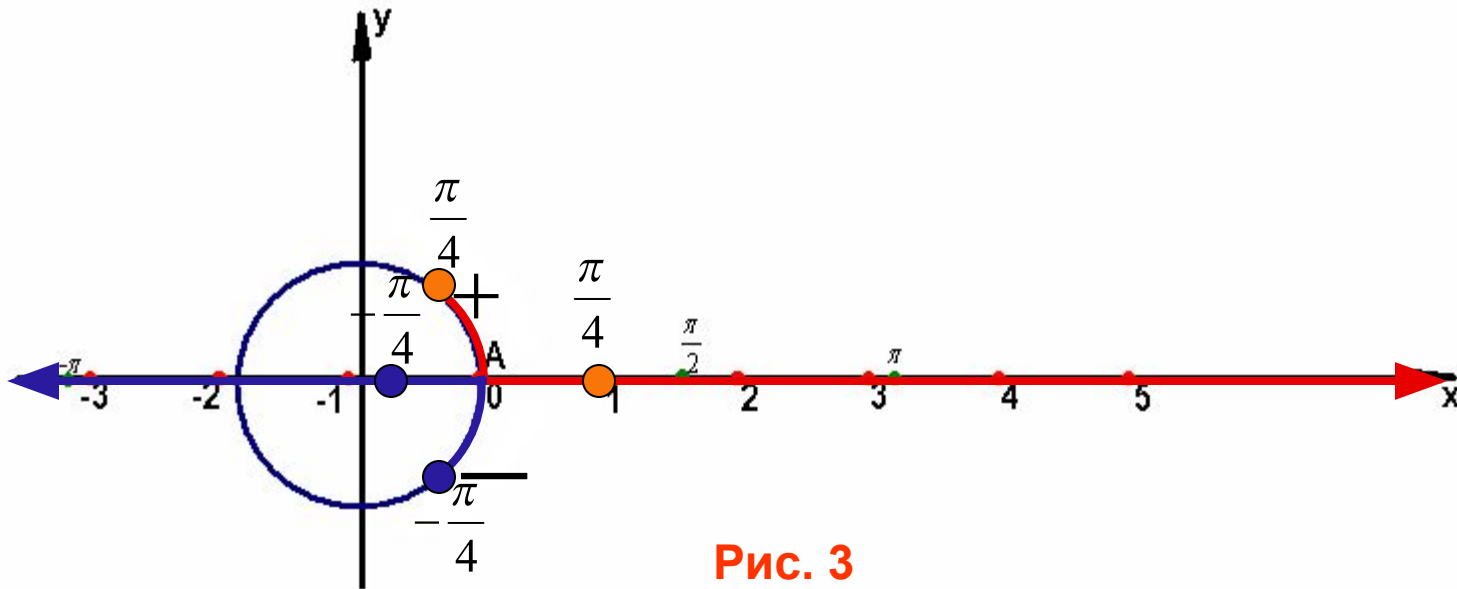


Рис. 3



Урок 1

Так как длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$, то можно получить изображение таких чисел на окружности как:

$\pi, \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{3\pi}{2}, 3\pi, 4\pi$ и т.д., учитывая, что $R = 1$ и $C = 2\pi$.

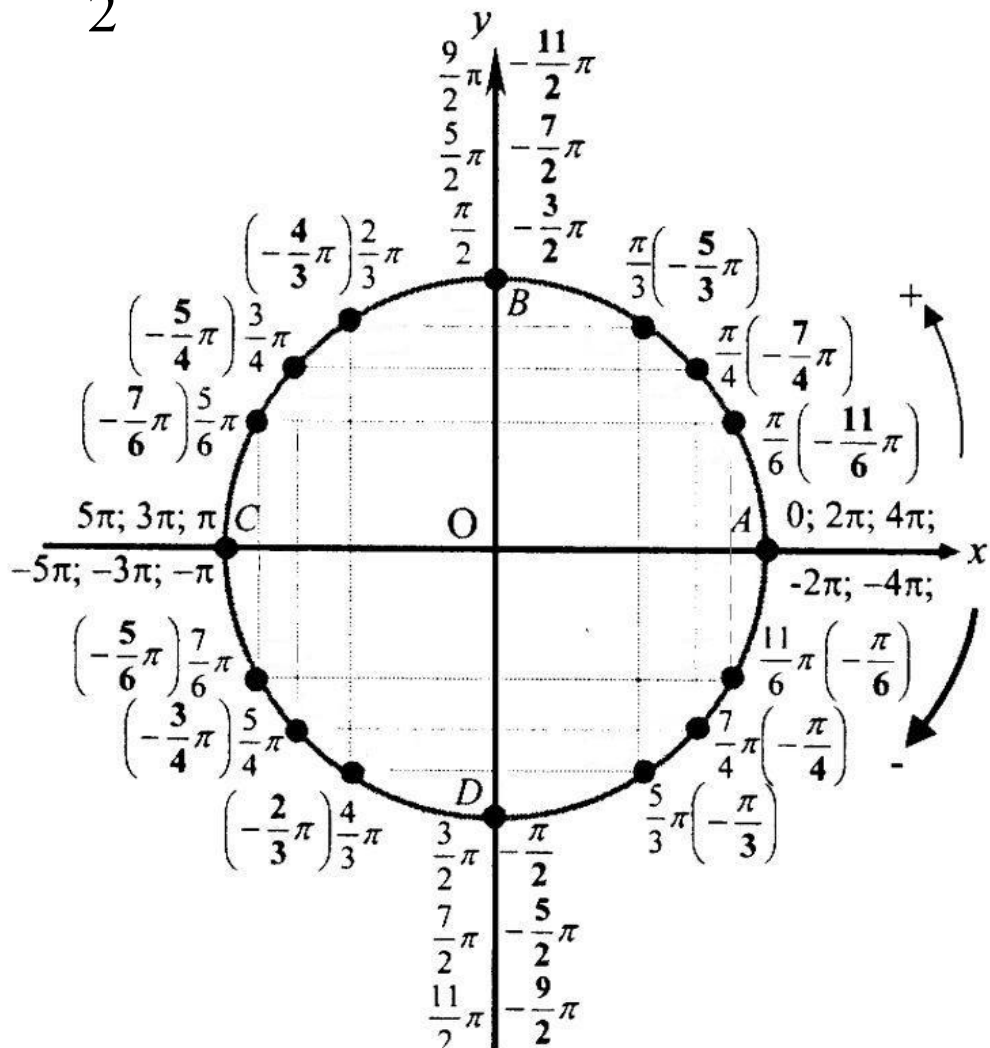


Рис.4

Обратите внимание, что построенное отображение не является однозначным:

Автоматический показ

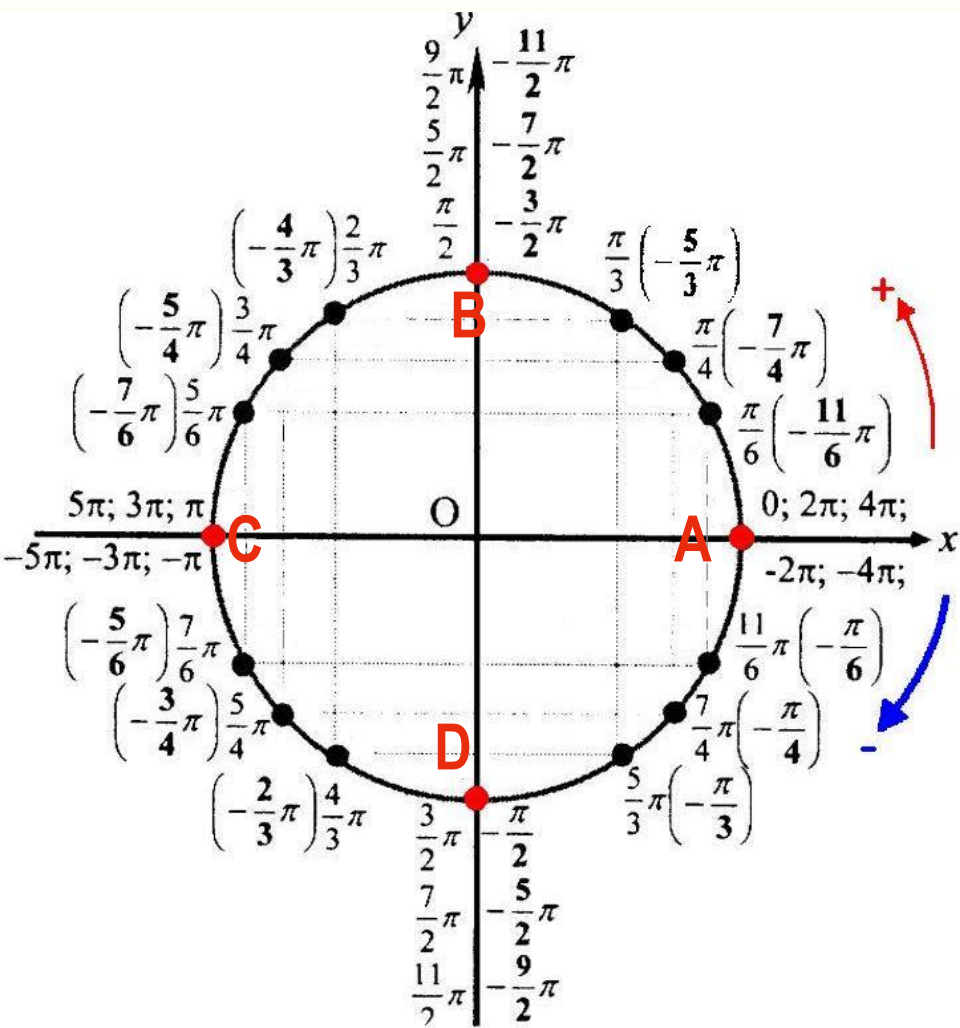


Рис.5

1. Каждому действительному числу соответствует единственная точка окружности.

2. Каждая точка окружности изображает бесконечное множество действительных чисел.

3. Точки **A, B, C, D** назовем **узловыми**.

Фактически, мы получили принципиально **новую систему координат – криволинейную**. Но точка единичной окружности имеет одну координату. (Почти все также, как и в прямоугольной системе координат.)

Упражнение I.1

Урок 1

Назовите по одному положительному или отрицательному числу, которые не записаны на модели единичной окружности, но соответствуют каждой из узловых точек.

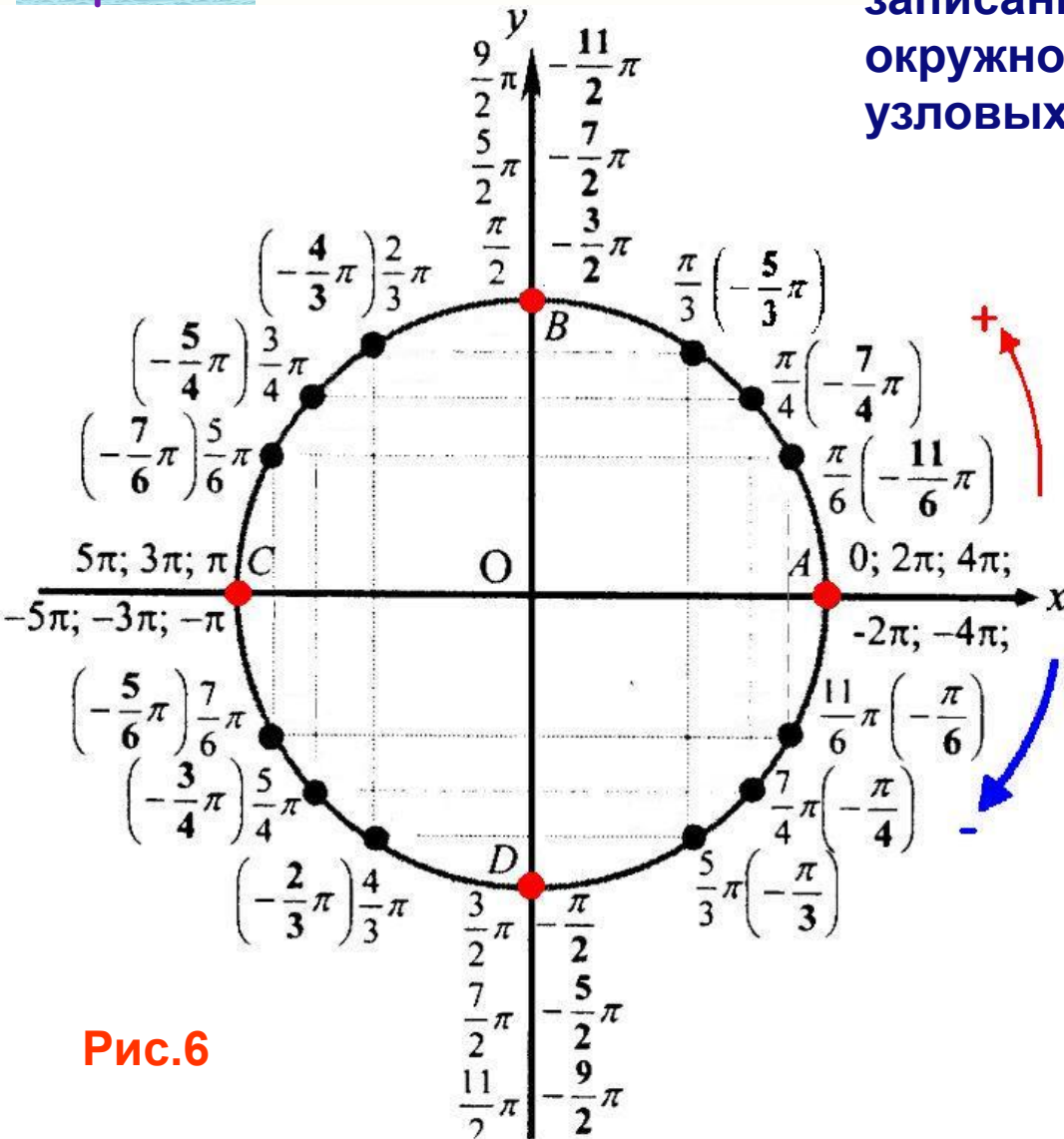


Рис.6

**Выбери
ответ:**

Точке A соответствуют числа:
 -3π ; 5π ; -4π ; 6π ;

Точке B соответствуют числа:

$\frac{7}{2}\pi$; $-\frac{15}{2}\pi$; $\frac{13}{2}\pi$; $-\frac{13}{2}\pi$;

Точке C соответствуют числа:

7π ; -6π ; 6π ; -9π ;

Точке D соответствуют числа:

$-\frac{13\pi}{2}$; $-\frac{7}{2}\pi$; $\frac{5}{2}\pi$; $\frac{15\pi}{2}$;

Упражнение I.2

Урок 1

Выберите точки на единичной окружности, соответствующие числам:

Нажмите здесь:

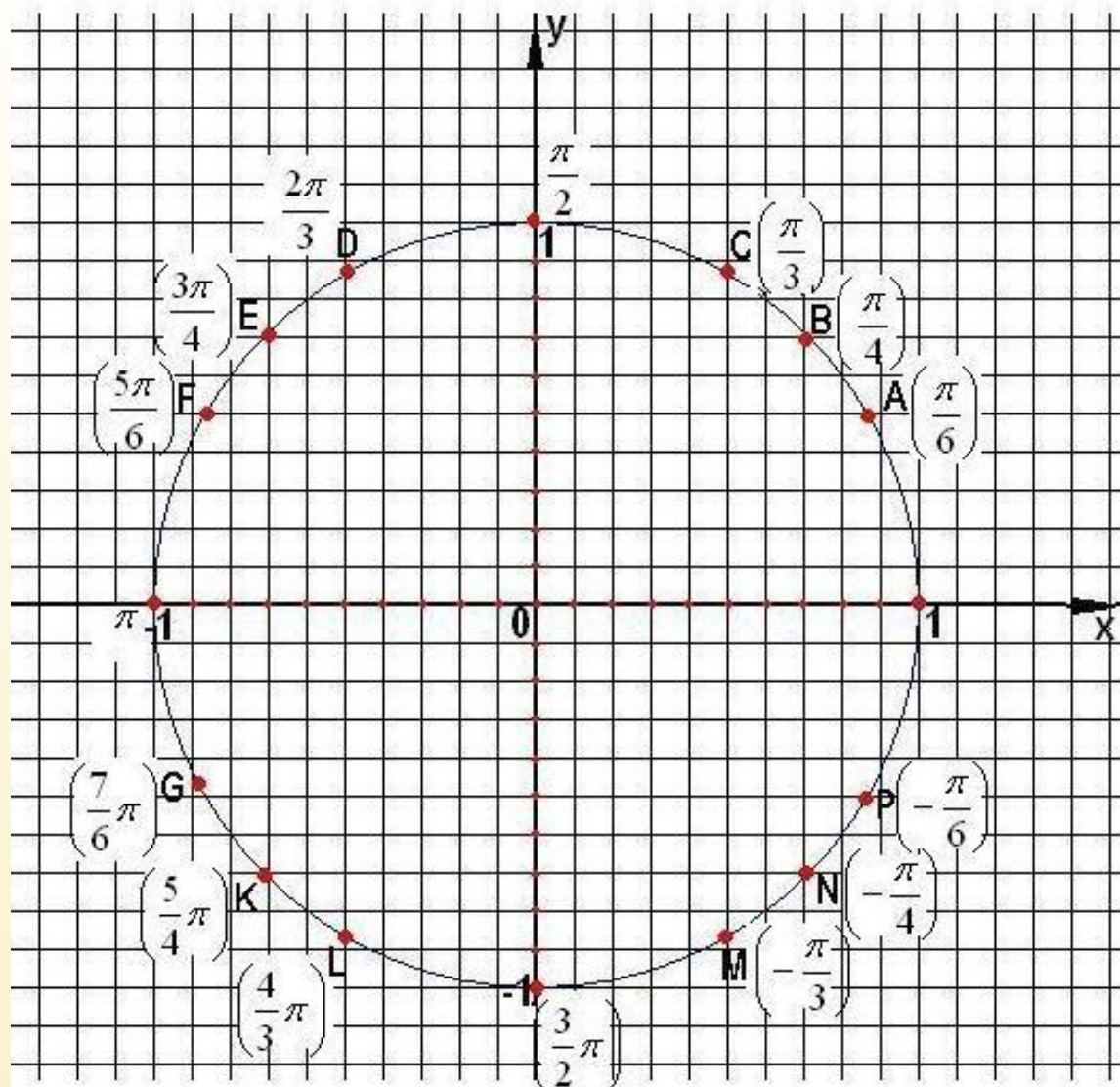


Рис.7

$\frac{\pi}{6} + 2\pi$: A F G P

$\frac{\pi}{6} - 2\pi$: A F G P

$\frac{2}{3}\pi + 2\pi$: C D L M

$\frac{5}{4}\pi + 2\pi$: B E K N

$\frac{5}{4}\pi - 6\pi$: B E K N

$2\pi - \frac{\pi}{6}$: A F G P

$4\pi - \frac{2}{3}\pi$: C D L M



Урок 2

❖ Способы записи чисел, соответствующих одной точке единичной окружности

❖ Упражнения:

❖ II.1

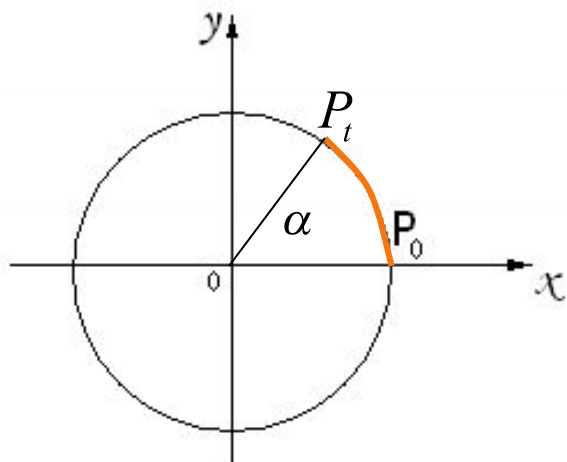
❖ II.2



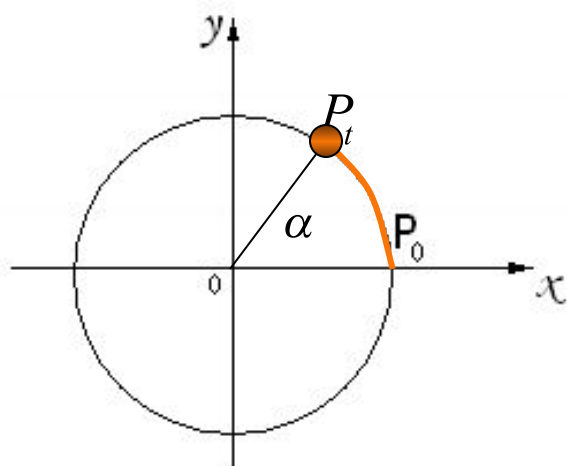
Способы записи чисел, соответствующих одной точке единичной окружности

Урок 2

Автоматический показ



На окружности дана произвольная точка P_t , которая получается поворотом точки P_0 на угол t радиан вокруг точки O .



При обходе окружности на целое число оборотов мы попадаем в исходную точку, а значит, точке окружности наравне с P_t некоторым числом t соответствует и любое число вида $t + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

В данном случае точке P_t соответствуют числа $t = \alpha + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

К упражнению II.1

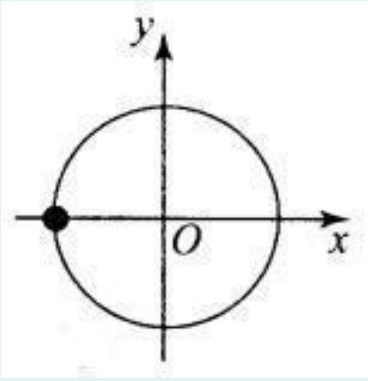


Упражнение II.1

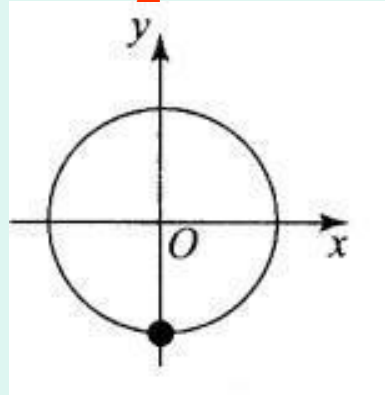
Выберите все числа, соответствующие указанным точкам единичной окружности

Урок 2

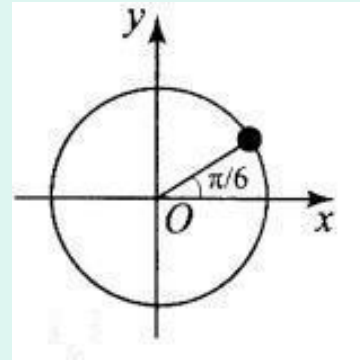
1



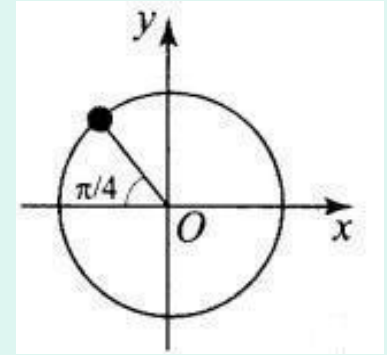
2



3



4



$$2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7}{6}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{4}\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi n - \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7}{6}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Вернуться
к упражнению к
упражнению II.к
упражнению II.1



Ошибки



**Вернуться к
упражнению II.1**



**Вернуться к
упражнению II.1**



**Вернуться к
упражнению II.1**



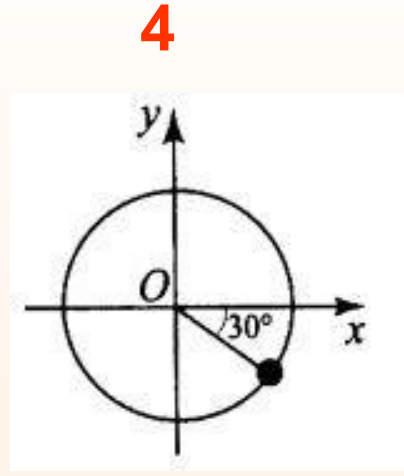
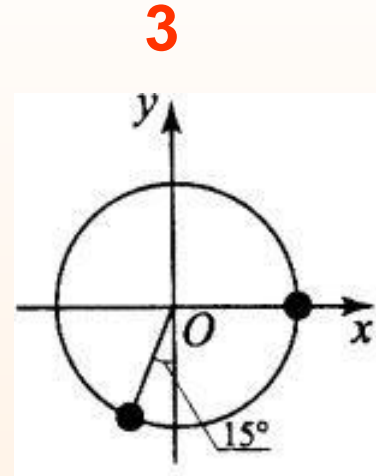
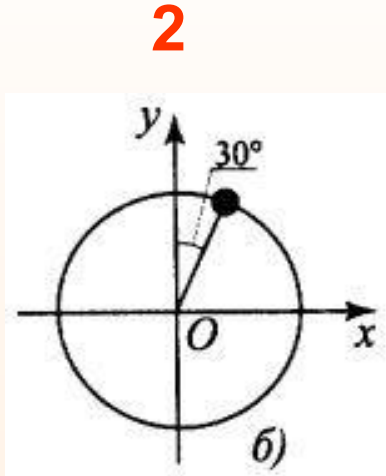
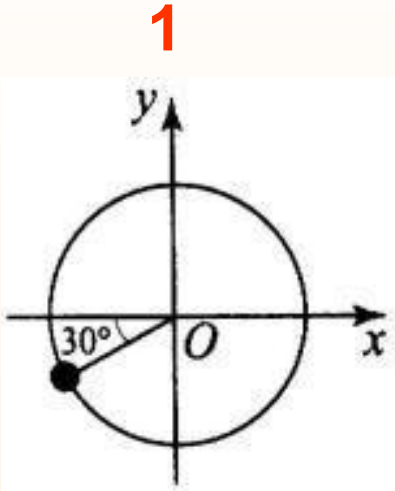
[Вернуться к упражнению II.1](#)

[К упражнению II.2](#)

Упражнение II.2

Выберите все числа, соответствующие указанным точкам единичной окружности

Урок 2



$$\frac{7}{6}\pi + \pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$-\frac{7}{6}\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{7}{6}\pi + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$-\frac{7}{12}\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi$$

$$\frac{5}{6}\pi + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$-\frac{7}{6}\pi + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

$$2\pi k - \frac{7}{6}\pi, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi$$

$$\frac{7}{12}\pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

[На урок 3](#)

[На содержание](#)

П р а в и л ь н о !



Вернуться к упражнению II.2

Ошибка!

Вернуться к упражнению II.2



Урок 3

- ❖ Отбор чисел (Метод «лепестков»)
- ❖ Пример 1
- ❖ Пример 2
- ❖ Упражнения



Отбор корней

(Метод «*лепестков*»)

Автоматический показ

Решение многих тригонометрических уравнений приводит к совокупности или системе их корней. Для грамотной записи ответа, требующей, в частности, исключения повторяющихся чисел, мы используем единичную окружность.

Пример 1

Переписать данное условие так, чтобы в них не было повторений.

Каждой серии чисел присваивается лепесток определенного цвета:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z} \quad \text{зеленый лепесток} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{розовый лепесток} \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{желтый лепесток} \end{array} \right.$$

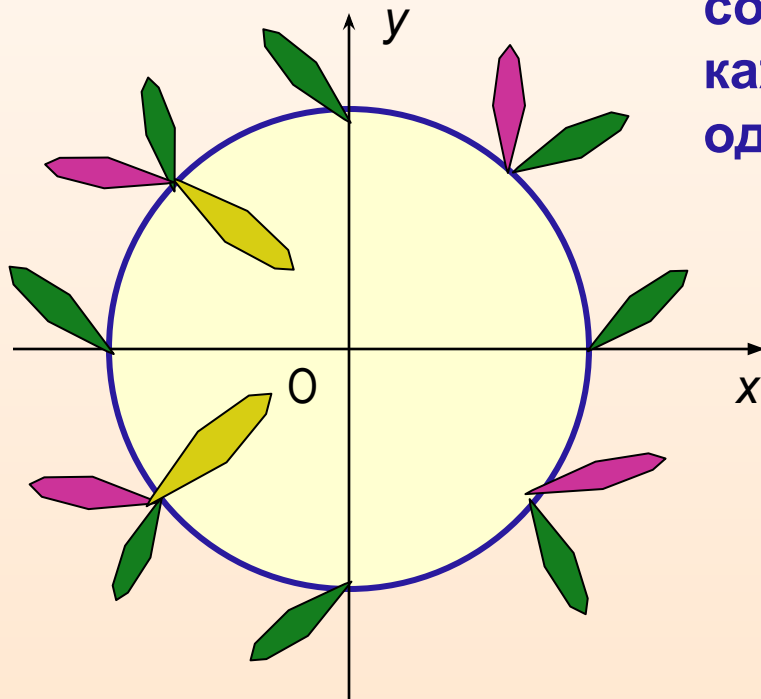


Решение

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi m}{4}, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Теперь перенесем лепестки в нужные места тригонометрической окружности

Остается только записать числа, соответствующие точкам, около каждой из которых расположен хоть один лепесток



Ответ: $\frac{\pi}{4}l, l \in \mathbb{Z}.$



Пример 2 Переписать данное условие так, чтобы в них не было повторений.

Автоматический показ

Решение

Каждой серии чисел опять присваиваем лепесток определенного цвета.

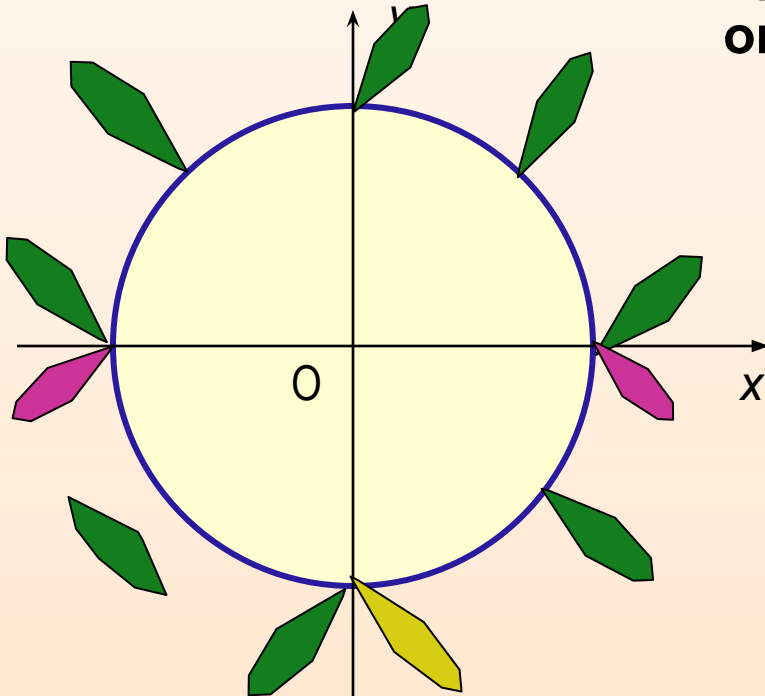
Теперь перенесем лепестки в нужные места тригонометрической окружности

Мы видим, что ни у одной точки не собрались три лепестка, поэтому запись упростить невозможно

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}l, l \in Z \\ x = \pi m, m \in Z \\ x = \frac{7\pi}{2} + 2\pi p, p \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}l, l \in Z \\ x = \pi m, m \in Z \\ x = \frac{7\pi}{2} + 2\pi p, p \in Z \end{cases}$$

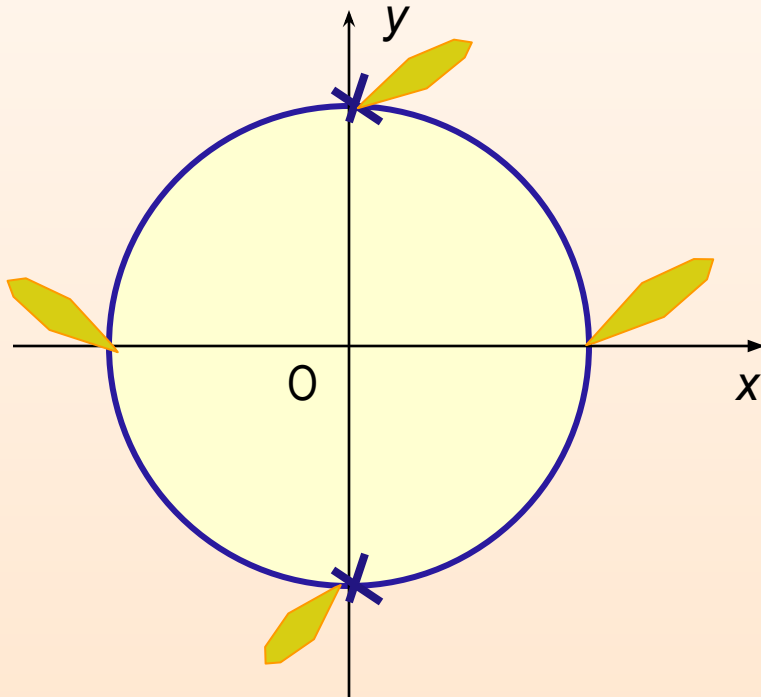


Пример 3 Запишите без повторений значения x , заданные следующими условиями.

Решение

$$\begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \times \\ x = \frac{\pi}{2} t, t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Недопустимые точки на единичной окружности будем отмечать крестиками, а точки вида $\frac{\pi}{2} t, t \in \mathbb{Z}$ выделим светлыми лепестками.



Выражение $x = \frac{\pi}{2} t, t \in \mathbb{Z}$

задает четыре точки единичной окружности, из которых только две допустимы.

Ответ: $x = \pi t, t \in \mathbb{Z}.$

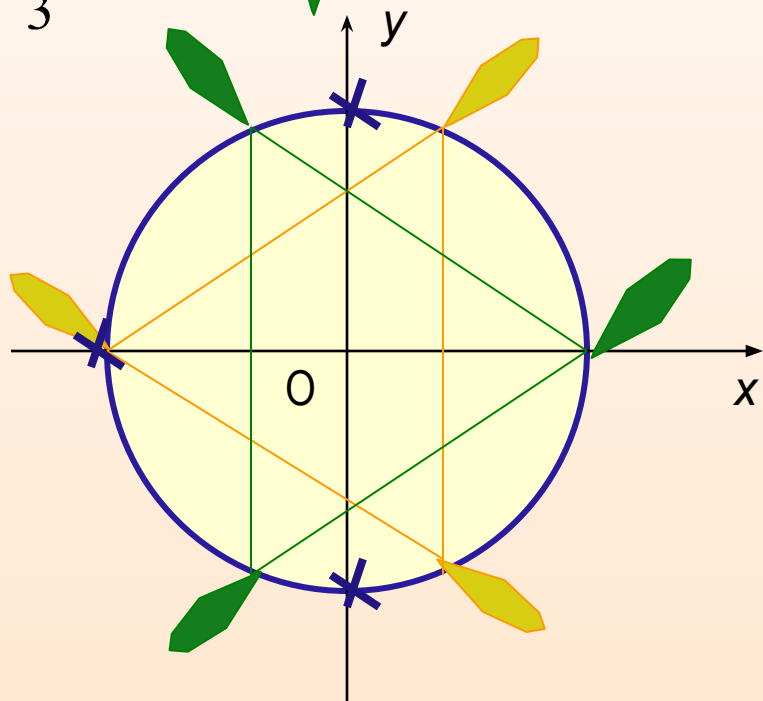


Пример 4 Запишите без повторений значения x , заданные следующими условиями.

Решение

Каждой серии чисел опять присваиваем лепесток определенного цвета, а недопустимые точки на единичной окружности будем отмечать крестиками.

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \times \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}m, m \in \mathbb{Z} \text{ (yellow)} \\ x = \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z} \text{ (green)} \end{cases}$$



Точки, у которых стоит хотя бы один лепесток, но нет запрещающего знака соответствуют числам:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Упражнения

Переписать данное условие так, чтобы в них не было повторений в заданиях 1 и 2.

$$1) \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Выбери ответ:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Выбери ответ:

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

3) Выбрать наибольшее отрицательное число.

$$3) \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi p}{5}, p \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Выбери ответ:

$$x = -\frac{4\pi}{5}, \text{ при } p = -1.$$

$$x = \pi - \frac{2\pi}{5} p, p \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{5}, \text{ при } p = -1.$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} p, p \in \mathbb{Z}$$

4) Переписать данное условие так, чтобы в них не было повторений

$$4) \begin{cases} x = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi g, g \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Выбери ответ:

Нет решения

$$x = \pi p, p \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi m}{2} + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Упражнение I,1

П р а в и л ь н о !

Упражнение I,2



Вернуться
к упражнению I,1

Ошибка!



Вернуться
к упражнению I,2

Урок 4

- ❖ **Запись промежутков**
- ❖ **Упражнения**

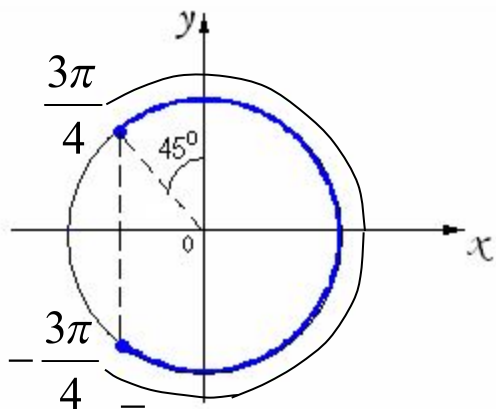


Пример

Запиши все числа, соответствующие точкам выделенной дуги (или двух дуг) на рисунке:

Решение

- ✓ Около одного из концов дуги записываем одно из чисел, соответствующих этой точке.
- ✓ Рисуем стрелку, направленную к другому концу отмеченной дуги.
- ✓ Стрелка снабжается знаком «+», если движение направлено против хода часовой стрелки, и знаком «-» минус, если оно идет по ходу часовой стрелки.
- ✓ Записываем соответствующее число около второго конца дуги.
- ✓ Записываем ответ с учетом, что каждой точке единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел.



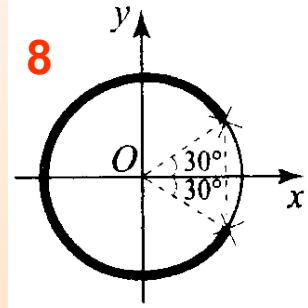
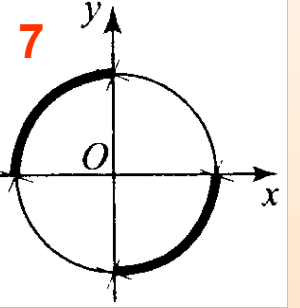
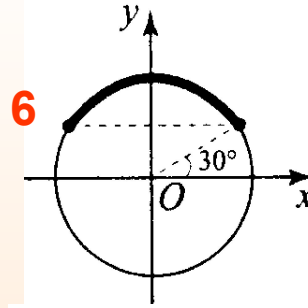
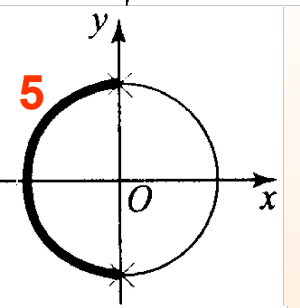
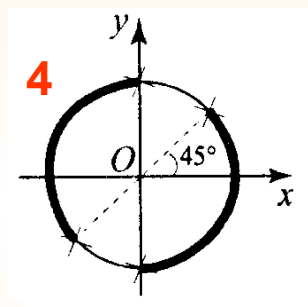
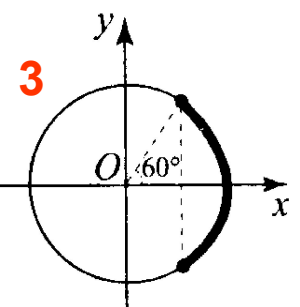
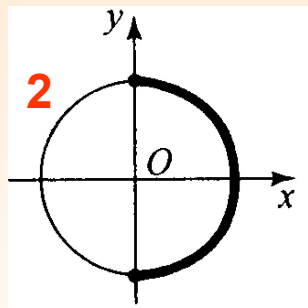
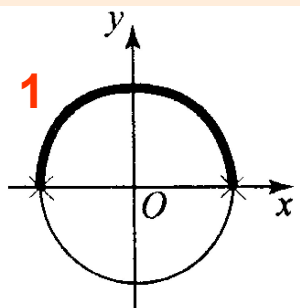
Ответ:

$$\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$



Упражнения

Поставь в соответствие числовому промежутку номер рисунка



$$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[2\pi n; \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

$$\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right]$$

- 1 2 3 4 5 6 7 8

Урок 5

- ◆ Решение тригонометрических неравенств (примеры)
- ◆ Задание

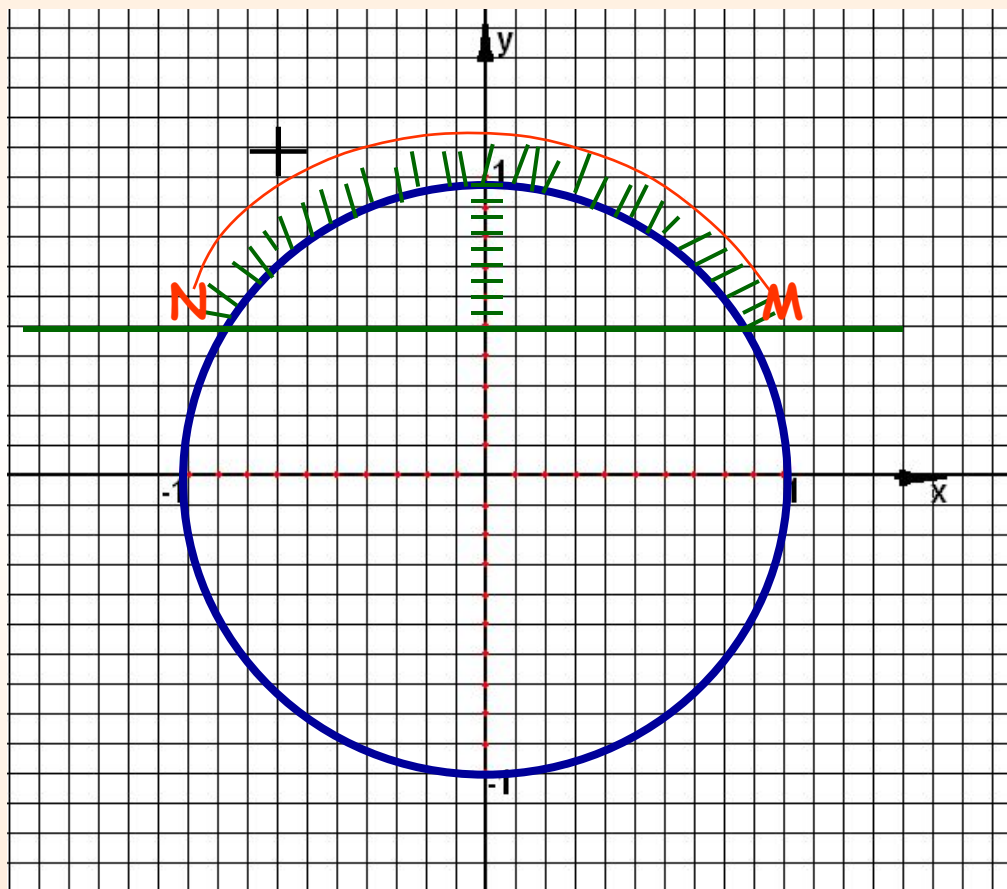


Пример

Решить неравенство:

$$\sin x > \frac{1}{2}$$

Решение



Рассмотрим единичную окружность:

- 5) Выделим дугу, которая играет роль интервала, с начальной точкой **M**, а конечной точкой **N**.
- 6) Ядро решения неравенства - $M < x < N$ - заштрихуем точки на оси y , для которых $y > \frac{1}{2}$.
- 7) Точкам **M** и **N** присваиваем имена $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ соответственно.
- 8) Вдоль заштрихованной дуги **MN** проведем стрелку в положительном направлении (против часовой стрелки).

9) Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Самостоятельная работа

Реши неравенство:

$$1) 2 \sin x + \sqrt{2} \geq 0$$

Ответ

$$2) \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ

$$3) 2 \cos x - \sqrt{3} \leq 0$$

Ответ

$$1) 2 \sin x + \sqrt{2} \geq 0$$

Ответ:

$$2\pi n - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:

$$2\pi n - \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

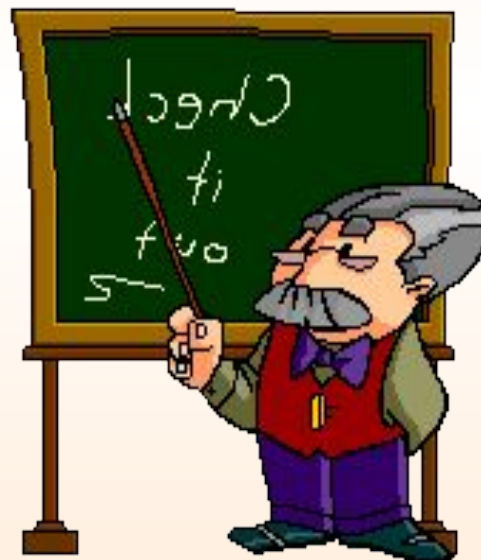
$$3) 2 \cos x - \sqrt{3} \leq 0$$

Ответ:

$$2\pi n + \frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Подведем итог

Теперь ты можешь приступать к решению заданий повышенной сложности по тригонометрии, то есть к решению тригонометрических уравнений и задач. Ведь ты теперь знаешь и умеешь



Смотри

Содержание

Урок 1 – «Отображение точек числовой прямой на точки единичной окружности»

Урок 2 – «Способ записи координаты точки единичной окружности»

Урок 3 – «Метод лепестков»

Урок 4 – «Числовые промежутки на единичной окружности»

Урок 5 – «Решение тригонометрических неравенств»



**Смотри список литературы и
других ресурсов**

Литература и другие ресурсы для самостоятельной работы

- ❖ Практикум по элементарной математике. Тригонометрия. Авторы – В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович, Москва, «Вербум – М», 2000.
- ❖ Лев Великович "Лоцман абитуриента в океане математики" <http://www.trizway.com/show.php?id=63&pg=1#a1>

(Подключись к Интернету, скопируй эту ссылку в адресную строку в обозревателе и нажми «Enter»).

- ❖ Сайт элементарной математики Дмитрия Гущина

<http://mathnet.spb.ru/>

(Подключись к Интернету, скопируй эту ссылку в адресную строку в обозревателе и нажми «Enter»).

Не упускай своих
возможностей!

Твой

На содержание