



Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Веремей Е.И.

Введение в задачи исследования и проектирования цифровых систем

Лекции 6 — 9

**Раздел 2. Вопросы анализа дискретных
процессов и систем**

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей

$$f = \{f[n]\} \quad f[n] = f[n + mN], m \in N^1$$

$$f_k = \{f_k[n]\}, \omega_k = \frac{2\pi}{N}k,$$

$$f_k[n] = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\omega_k n}$$

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Коэффициенты конечного
ряда
Фурье

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

$$A[k] = |F[k]|$$

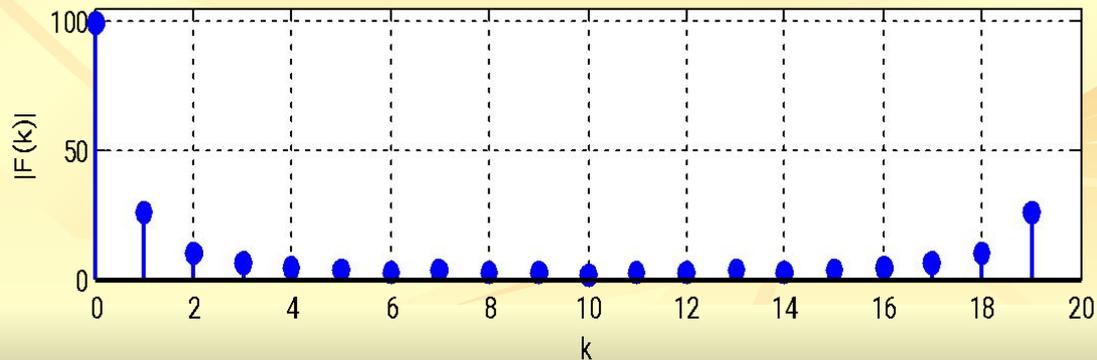
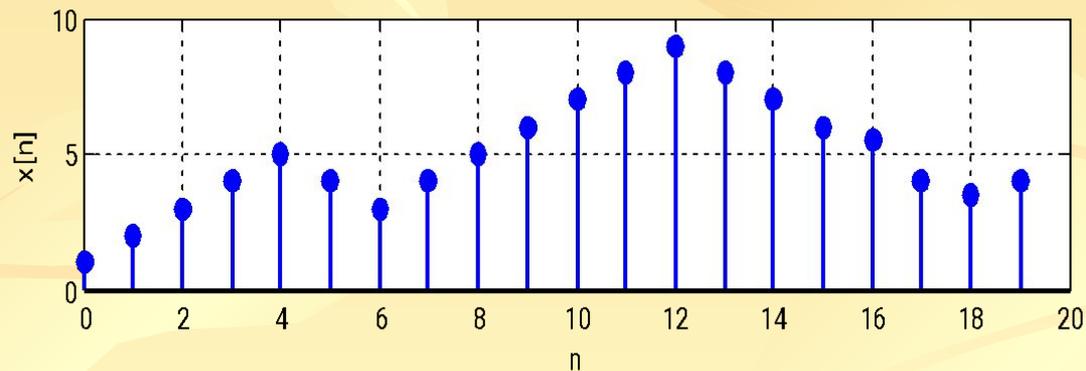
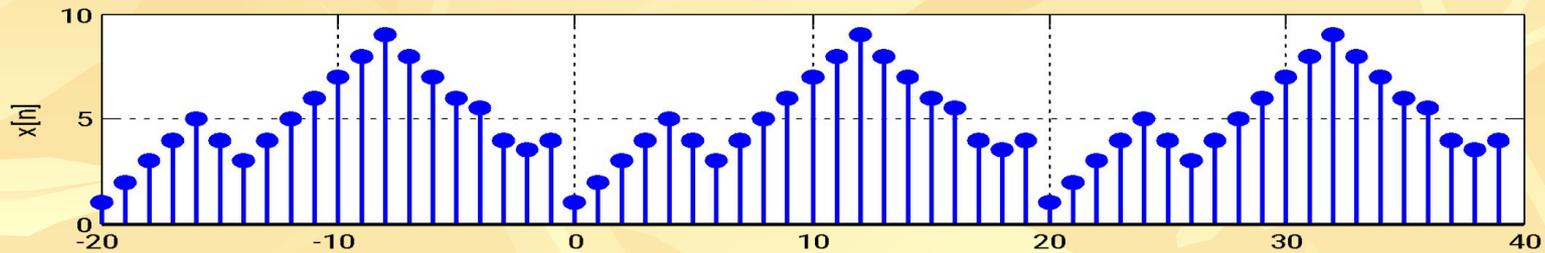
$$\varphi[k] = \arg F[k]$$

$F = \{F[k]\}, k = 0, N - 1$
Комплексный спектр
периодической
последовательности

$A = \{A[k]\}, k = 0, N - 1$
Амплитудный спектр
периодической
последовательности

$\varphi = \{\varphi[k]\}, k = 0, N - 1$
Фазовый спектр
периодической
последовательности

1. Ряды и преобразование Фурье для числовых последовательностей



1. Ряды и преобразование Фурье

$$f = \{f[n]\} \quad n \in N^1 \quad \text{Произвольная последовательность}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |f[n]| = Q_x < \infty$$

Условие абсолютной суммируемости

$$F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f[n]e^{-j\omega n}$$

Дискретное по времени преобразование Фурье (ДВПФ) последовательности $\{f[n]\}$

$$F(j\omega) = F(e^{j\omega})$$

Комплексная частотная (спектральная) характеристика (КЧХ) последовательности f

$$A(\omega) = |F(e^{j\omega})|$$

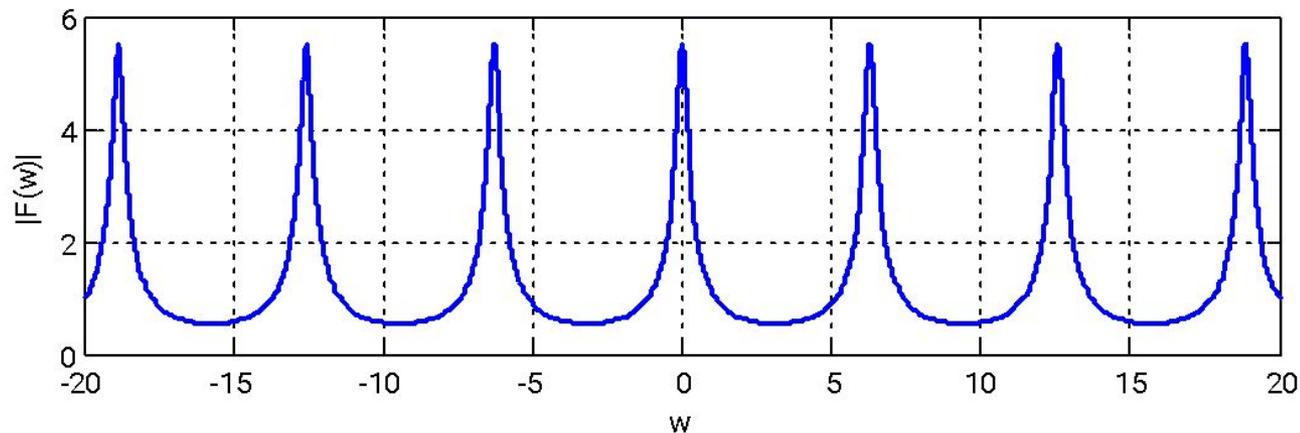
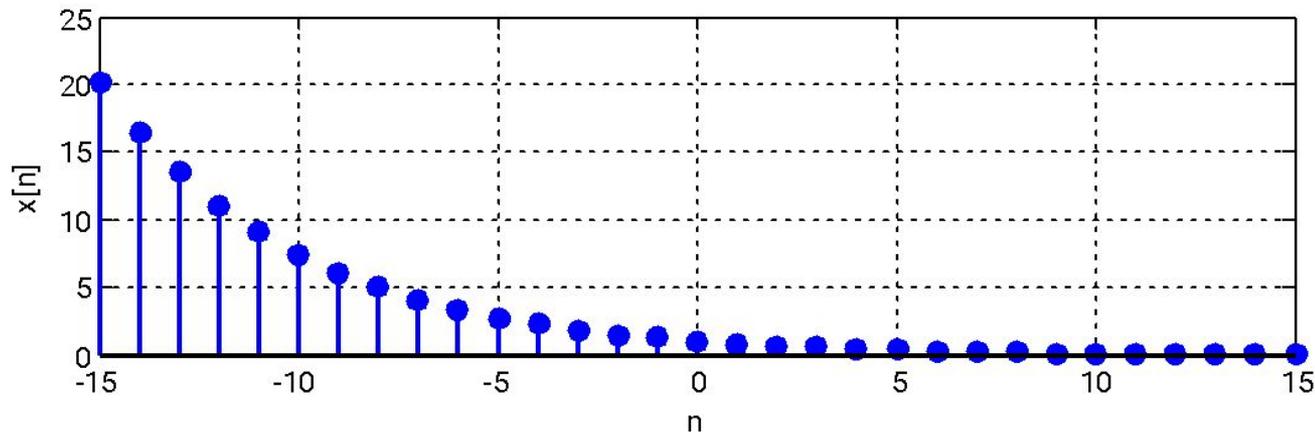
Амплитудная частотная (спектральная) характеристика (АЧХ) последовательности f

$$\varphi(\omega) = \arg(F(e^{j\omega}))$$

Фазовая частотная (спектральная) характеристика (АЧХ) последовательности f

$$f_e[n] = \begin{cases} e^{-\alpha n}, & \text{если } n \geq 0; \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases} \quad \alpha > 0$$

1. Ряды и преобразование Фурье



1. Ряды и преобразование Фурье

$$f = \{f[n]\} \quad n \in \mathbb{N}^1$$

Произвольная
последовательность

$$F(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow A(\omega), \varphi(\omega)$$

Прямое ДВПФ
для $\{f[n]\}$

$$1. F(e^{-j\omega}) \Rightarrow A(-\omega) = A(\omega) \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$$

$$2. F(e^{j(\omega+2\pi k)}) = F(e^{j\omega}) \quad \forall k \in \mathbb{N}^1$$

$$3. F(e^{j\gamma}) \Rightarrow F(e^{-j\omega}) \quad \forall \omega \in [0, \pi], \gamma = 2\pi - \omega$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(j\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Обратное ДВПФ для $\{f[n]\}$

2. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$f = \{f[n]\} = \{f_n\} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Конечная
последовательность

Два варианта превращения в бесконечную
последовательность:

$$n \in \mathbb{Z}$$

а) Периодическая последовательность $f_p = \{f_p[n]\} = \{f_{pn}\} \quad f_p[n] = f[n] \quad f_p[n] = f_p[n + mN]$

б) последовательность, дополненная нулями $f_i = \{f_i[n]\} = \{f_{in}\} \quad f_i[n] = \begin{cases} f[n], & \text{если } n = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0, & \text{если } n < 0 \text{ или } n > N-1. \end{cases}$

Прямое ДПФ:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$

Обратное ДПФ:

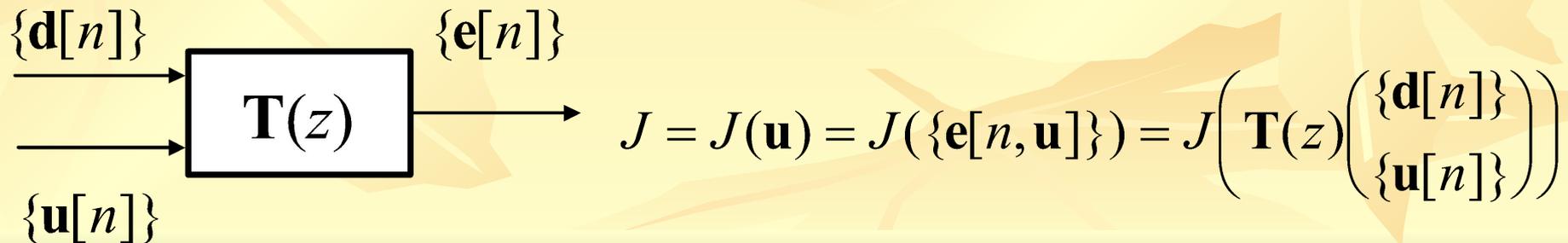
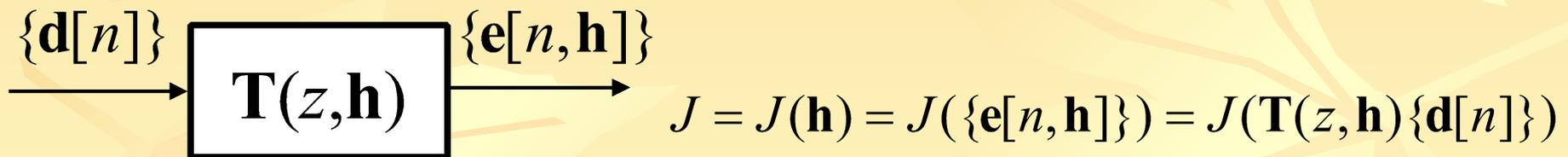
$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}$$

5. Понятие качества функционирования ЦС Три варианта варьируемых элементов в DLT системах:

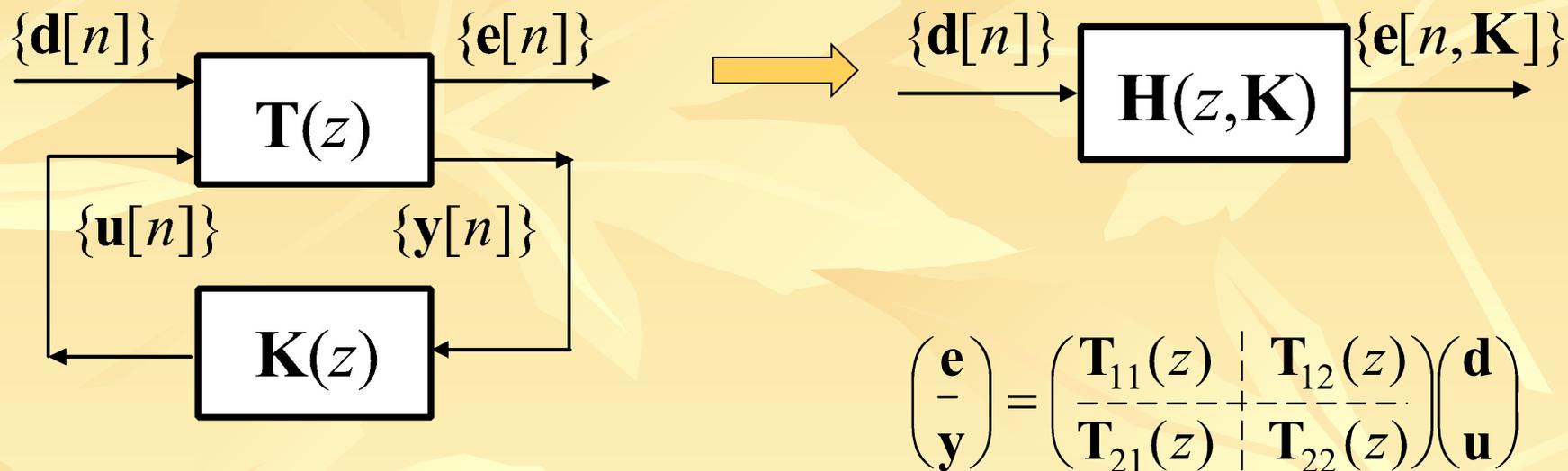
1. Конечные наборы настраиваемых параметров $\mathbf{h} \in E^p$

2. Входные дискретные сигналы $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}[n]\}$ $n \in [n_1, n_2]$

3. Передаточные матрицы регуляторов $\mathbf{K}(z)$



5. Понятие качества функционирования ЦС



$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z, \mathbf{K})\mathbf{d}, \quad \mathbf{H}(s, \mathbf{K}) = \mathbf{T}_{11}(s) + \mathbf{T}_{12}(s)\mathbf{K}(s)[\mathbf{E} - \mathbf{T}_{22}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1}\mathbf{T}_{21}(s)$$

$$J = J(\mathbf{u}) = J(\{\mathbf{e}[n, \mathbf{K}]\}) = J(\mathbf{H}(z, \mathbf{K})\{\mathbf{d}[n]\})$$

5. Понятие качества функционирования ЦС

Классические функционалы качества

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{F}(n, \mathbf{x}[n]) \quad \mathbf{x} = \{\xi[n]\} \quad \xi[0] = \xi_0$$

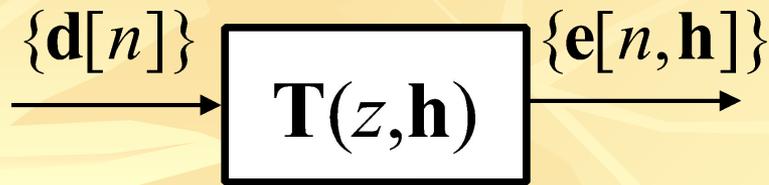
$$\beta = \{\beta[n]\} \quad \beta[n] = \eta[n] - \xi[n] \quad \mathbf{x} = \{\eta[n]\} \quad \eta[0] = \eta_0$$

$$T_p = \inf \{n_m : \beta[n] \in M(\mathbf{0}, \Delta), \forall n \geq n_m\}$$

$$J_m = \frac{\rho_m - \rho_0}{\rho_0} \quad \rho_m = \max_{n \in [0, \infty)} \|\beta[n]\| \quad N_k \longrightarrow \rho[n] \geq \rho_0$$

$$J_p = \sum_{n=0}^{T_p} (\eta[n] - \xi[n])' \mathbf{R} (\eta[n] - \xi[n])$$

5. Понятие качества функционирования ДС Функционалы качества как нормы выходных сигналов



Пространство l_2 :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon[n]|^2 < \infty \quad \|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varepsilon[n]|^2}$$

Пространство m :

$$|\varepsilon[n]| \leq c_e$$

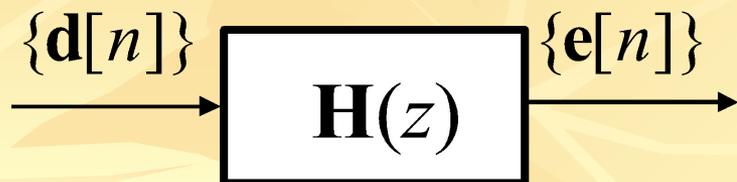
$$\|\varepsilon\|_{\infty} = \sup_{n \in N^1} |\varepsilon[n]|$$

$$\tilde{e}[n] = \sqrt{\mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n]} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}\|_2 = \|\tilde{e}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{e}[n]|^2} \quad \|\mathbf{e}\|_{\infty} = \|\tilde{e}\|_{\infty} = \sup_{n \in N^1} |e[n]|$$

$$J_2 = J_2(\mathbf{h}) = \|\mathbf{e}\|_2 = \|\{\mathbf{e}[n, \mathbf{h}]\}\|_2 = \|\mathbf{T}(z, \mathbf{h})\{d[n]\}\|_2$$

$$J_{\infty} = J_{\infty}(\mathbf{h}) = \|\mathbf{e}\|_{\infty} = \|\{\mathbf{e}[n, \mathbf{h}]\}\|_{\infty} = \|\mathbf{T}(z, \mathbf{h})\{d[n]\}\|_{\infty}$$

5. Понятие качества функционирования ДС Функционалы качества как нормы передаточных матриц



$$\|\varepsilon\|_2 = \sqrt{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]} \quad S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]$$

$$E(z) = Z\{\varepsilon[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon[n]z^{-n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} E(z) \frac{z^n}{z} dz$$

Дискретный аналог теоремы Парсеваля:

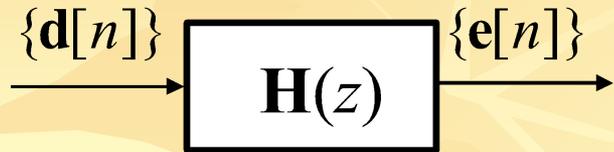
$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} E(z)E(z^{-1}) \frac{1}{z} dz \quad S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}(z)\mathbf{d}, \quad \|\mathbf{e}\|_2^2 = \|\tilde{\mathbf{e}}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{e}}^2[n] \quad \mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \mathbf{E}(z)z^n \frac{1}{z} dz$$

5. Понятие качества функционирования ДС

Функционалы качества как нормы передаточных матриц

Теорема Парсеваля для векторных сигналов:



$$\|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \mathbf{E}'(z^{-1}) \cdot \mathbf{E}(z) \frac{1}{z} dz.$$

$$\mathbf{E}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{D}(z) \quad \mathbf{D}(z) \cdot \mathbf{D}'(z^{-1}) \equiv \mathbf{I}_{m_s \times m_s}$$

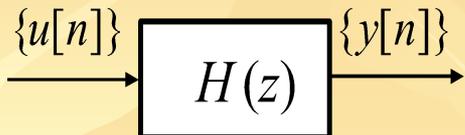
$$\|\mathbf{e}\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}'[n]\mathbf{e}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \text{tr}[\mathbf{H}(z)\mathbf{H}'(z^{-1})] \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \text{tr}[\mathbf{H}'(z^{-1})\mathbf{H}(z)] \frac{1}{z} dz$$

Нормы передаточных матриц по пространствам H_2 и H_{∞}

$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \text{tr}[\mathbf{H}'(z^{-1})\mathbf{H}(z)] \frac{1}{z} dz \quad \|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr}[\mathbf{H}'(e^{-j\omega})\mathbf{H}(e^{j\omega})] d\omega$$

$$\|\mathbf{H}\|_{\infty} = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \bar{\sigma}[\mathbf{H}(e^{j\omega})]$$

5. Понятие качества функционирования ДС Функционалы качества как нормы передаточных матриц



$$\|H\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad \|H\|_{\infty}^2 = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |H(e^{j\omega})|^2$$

$$\|H\|_2 = 0.3569$$

$$\|H\|_{\infty} = 0.5738$$

$$x_1[n+1] = -0.04886x_1[n] + 0.4040x_2[n] + 0.2306x_3[n] - 0.4326u[n],$$

$$x_2[n+1] = 0.06819x_1[n] + 0.3540x_2[n] - 0.4081x_3[n],$$

$$x_3[n+1] = -0.4602x_1[n] - 0.08946x_2[n] - 0.03682x_3[n] + 0.1253u[n],$$

$$y[n] = 0.2877x_1[n] - 1.146x_2[n] + 1.191x_3[n].$$

$$H(z) = \frac{0.02482 z^2 + 0.3317 z + 0.004783}{z^3 - 0.2684 z^2 + 0.01354 z - 0.1155}$$

$$z_{1,2} = -0.158 \pm 0.416j$$

$$z_3 = 0.584$$

