

# \* Электромагнетизм

Кузнецов Сергей Иванович доцент кафедры ОФ ЕНМФ ТПУ

Тема 12

# Циркуляция вектора магнитной индукции



Тема 12.

# Циркуляция вектора магнитной индукции

12.1. Теорема о циркуляции

12.2. Магнитное поле соленоида

12.3. Магнитное поле тороида

12.4. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

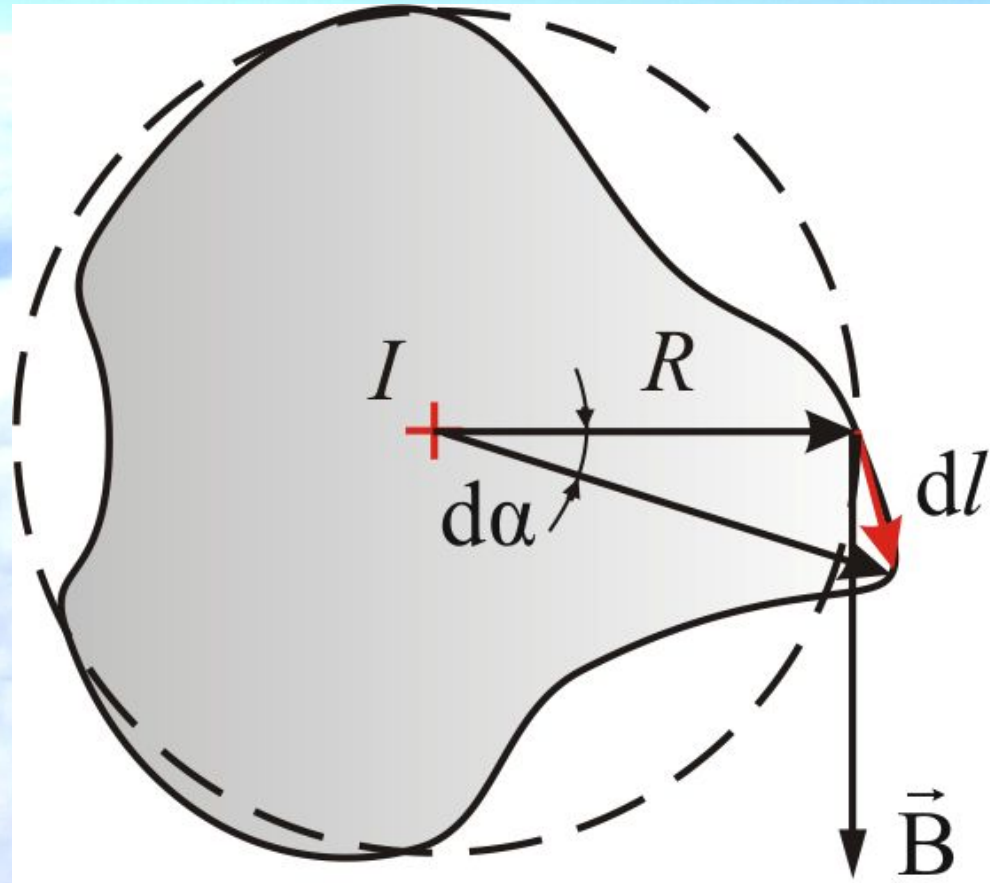
12.5. Эффект Холла

## 12.6. Циркуляция вектора магнитной индукции

Возьмем контур  $l$  охватывающий прямой ток  $I$ , и вычислим для него циркуляцию вектора магнитной индукции  $\vec{B}$

т.е.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



- Вначале рассмотрим случай, когда контур лежит в плоскости перпендикулярно потоку (ток  $I$  направлен за чертеж). В каждой точке контура вектор  $\vec{B}$  направлен по касательной к окружности, проходящей через эту точку  $\vec{B}$
- Воспользуемся свойствами скалярного произведения векторов:

$$B_l dl = B dl_B,$$

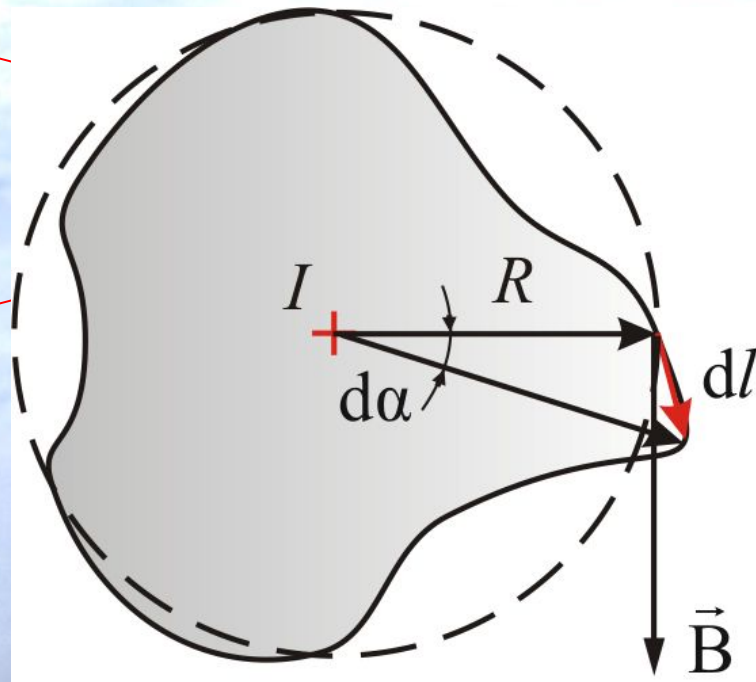
- где  $dl_B$  – проекция  $dl$  на вектор  $\vec{B}$   
 $dl_B = R d\alpha$  где  $R$  – расстояние от тока  $I$  до  $dl$ .
- Тогда

$$B_l dl = B dl_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\alpha = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi}$$

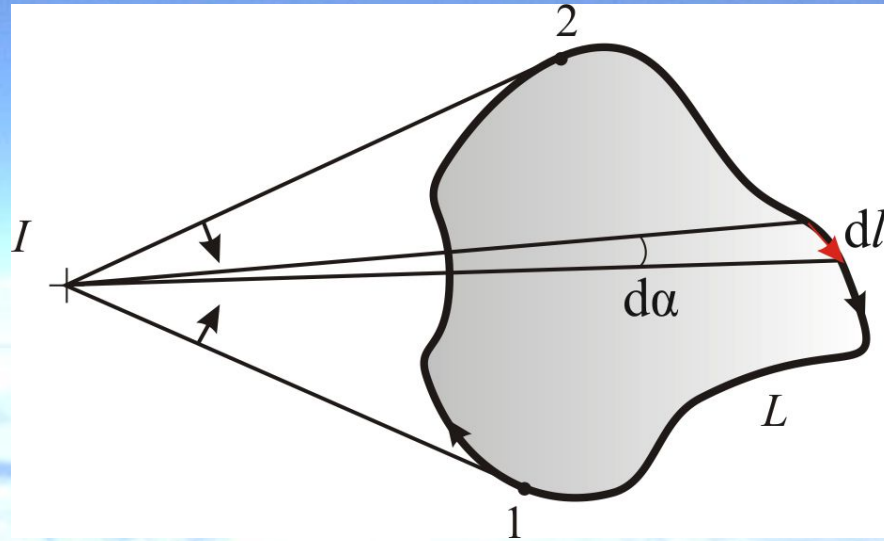
$$\oint B_l \, dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = \mu_0 I,$$

- Теорема о циркуляции вектора  $\vec{B}$ :  
 циркуляция вектора магнитной индукции  
 равна току, охваченному контуром,  
 умноженному на магнитную постоянную:

$$\oint B_l \, dl = \mu_0 I$$



- Иначе обстоит дело, **если ток не охватывается контуром**



- В этом случае при обходе радиальная прямая поворачивается сначала в одном направлении (1–2), а потом в другом (2–1). Поэтому  $\oint d\alpha = 0$ , и следовательно, в этом случае

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 0$$

- Итак,  $\oint B_l \, dl = \mu_0 I,$

где  $I$  – ток, охваченный контуром  $L$ .

- *Эта формула справедлива и для тока произвольной формы, и для контура произвольной формы.*



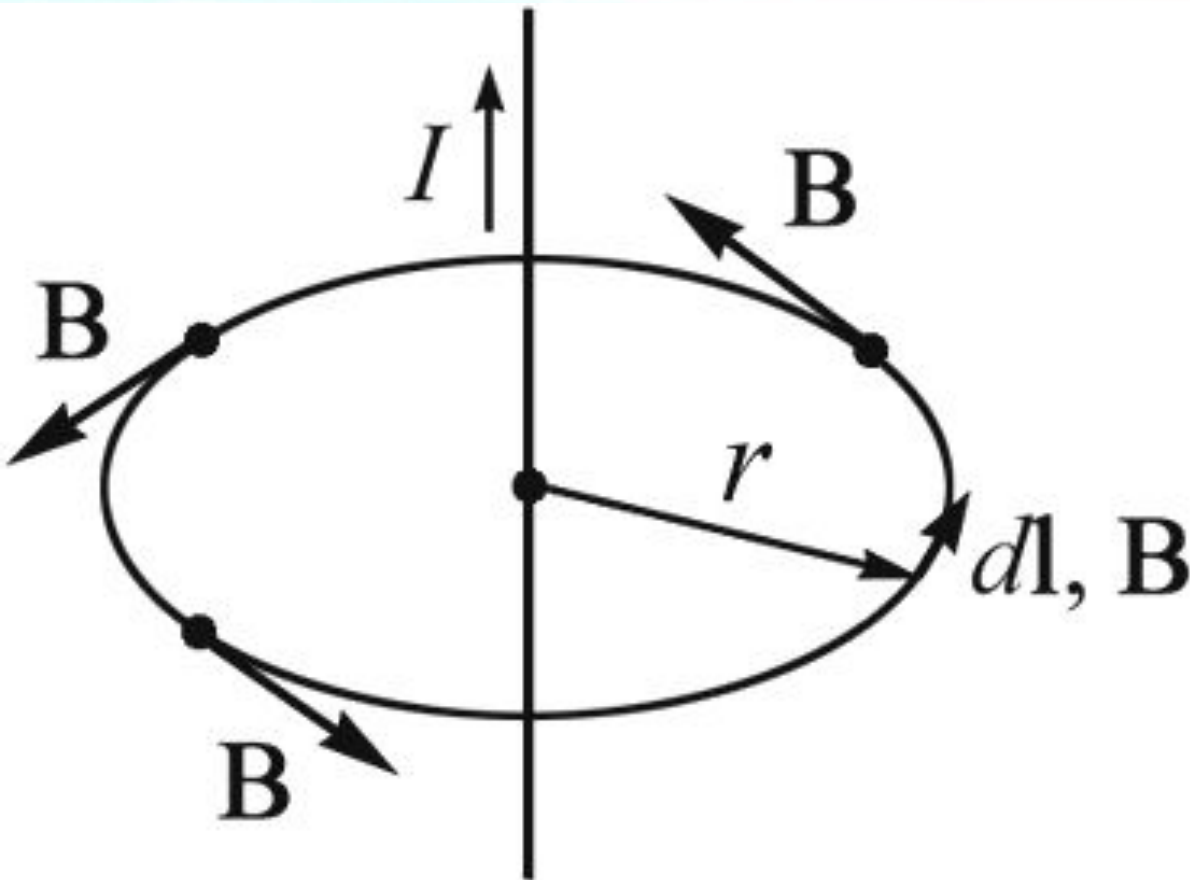
- Если контур охватывает несколько токов, то

- $$\oint B_l dl = \mu\mu_0 \sum I_i, \quad (2.6.3)$$

- т.е. циркуляция вектора  $\vec{B}$  равна алгебраической сумме токов, охваченных контуром произвольной формы.

• Теорема о циркуляции вектора  
индукции магнитного поля  $\oint \mathbf{B}, d\mathbf{l} = \mu_0 I$

позволяет легко рассчитать величину  $\mathbf{B}$   
от бесконечного проводника с током :



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Получить  
самостоятельно

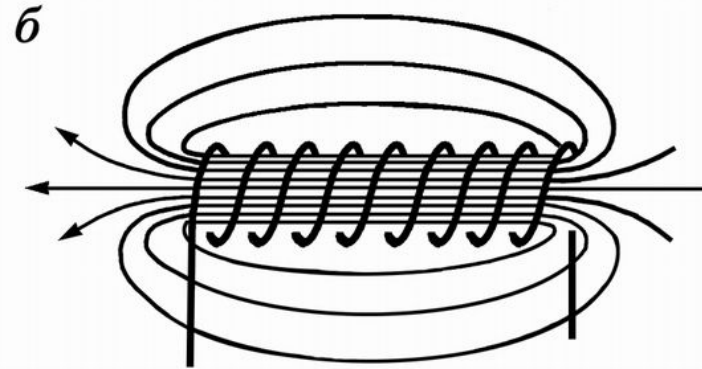
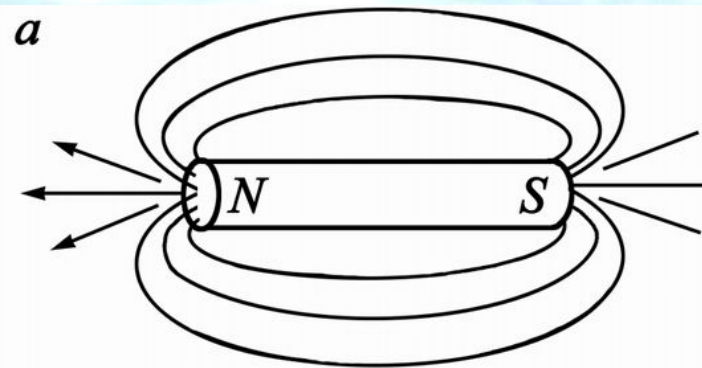
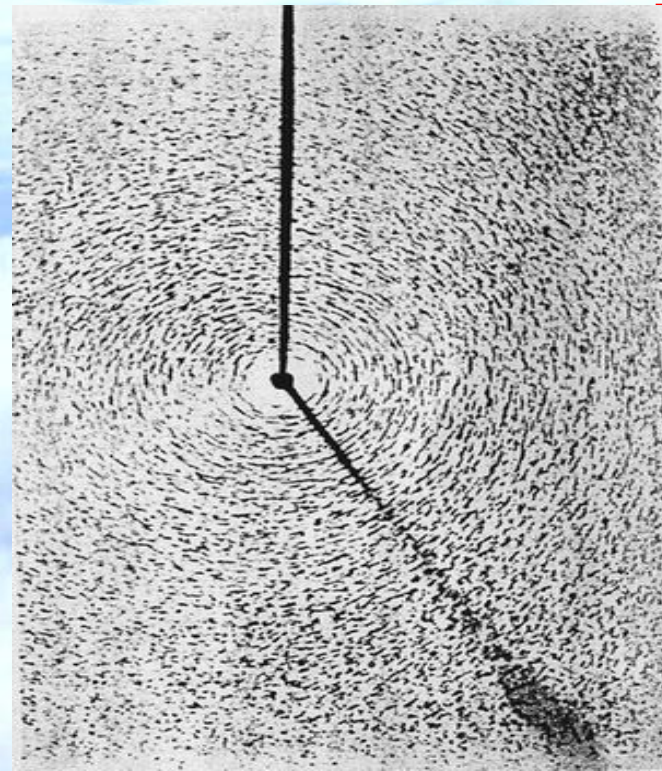
- Итак, циркуляция вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  отлична от нуля, если контур охватывает ток
- Сравните с циркуляцией вектора  $\vec{E}$  :

$$\oint E_l dl = 0$$

- Магнитные поля, мы уже говорили, называют ***вихревыми*** или ***соленоидальными***.
- Магнитному полю нельзя приписывать потенциал, как электрическому полю. Этот потенциал не был бы однозначным: после каждого обхода по контуру он получал бы приращение  $\mu_0 I$ .

- Линии напряженности *электрического поля* начинаются и заканчиваются на зарядах.
- А *магнитных зарядов* в природе нет. Опыт показывает, что линии  $\vec{B}$  всегда замкнуты (см. рис.)
- Поэтому **теорема Гаусса** для вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  записывается так:

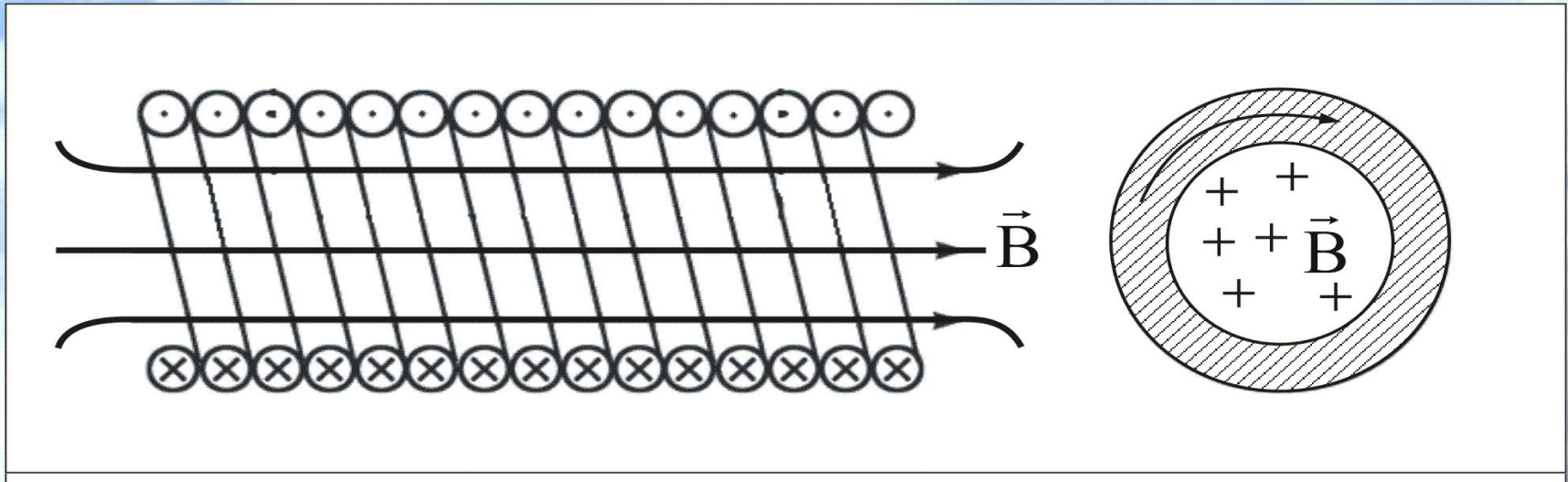
$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$



## 2.7. Магнитное поле соленооида

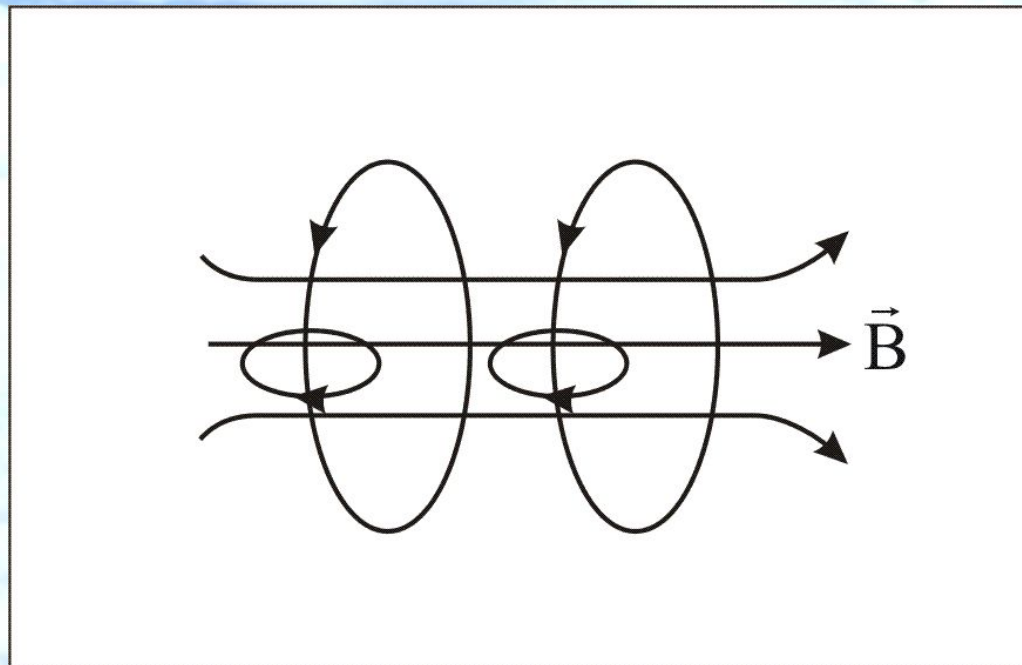
- Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$   
( $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum I_i$ ) для вычисления простейшего магнитного поля

– бесконечно **длинного соленооида**, представляющего собой тонкий провод, намотанный плотно виток к витку на цилиндрический каркас



- Соленоид можно представить в виде системы одинаковых **круговых токов с общей прямой осью**.
- Бесконечно длинный соленоид симметричен любой, перпендикулярной к его оси плоскости.
- Взятые попарно (рис. 2.12), симметричные относительно такой плоскости витки создают поле, в котором вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости витка, т.е. **линии магнитной индукции имеют направление параллельное оси соленоида внутри и вне его**.

• Рис. 2.12



- Из параллельности вектора  $\vec{B}$  оси соленооида вытекает, что поле как внутри, так и вне соленооида должно быть однородным.
- Возьмём воображаемый прямоугольный контур 1–2–3–4–1 и разместим его в соленооиде, как показано на рис. 2.13.

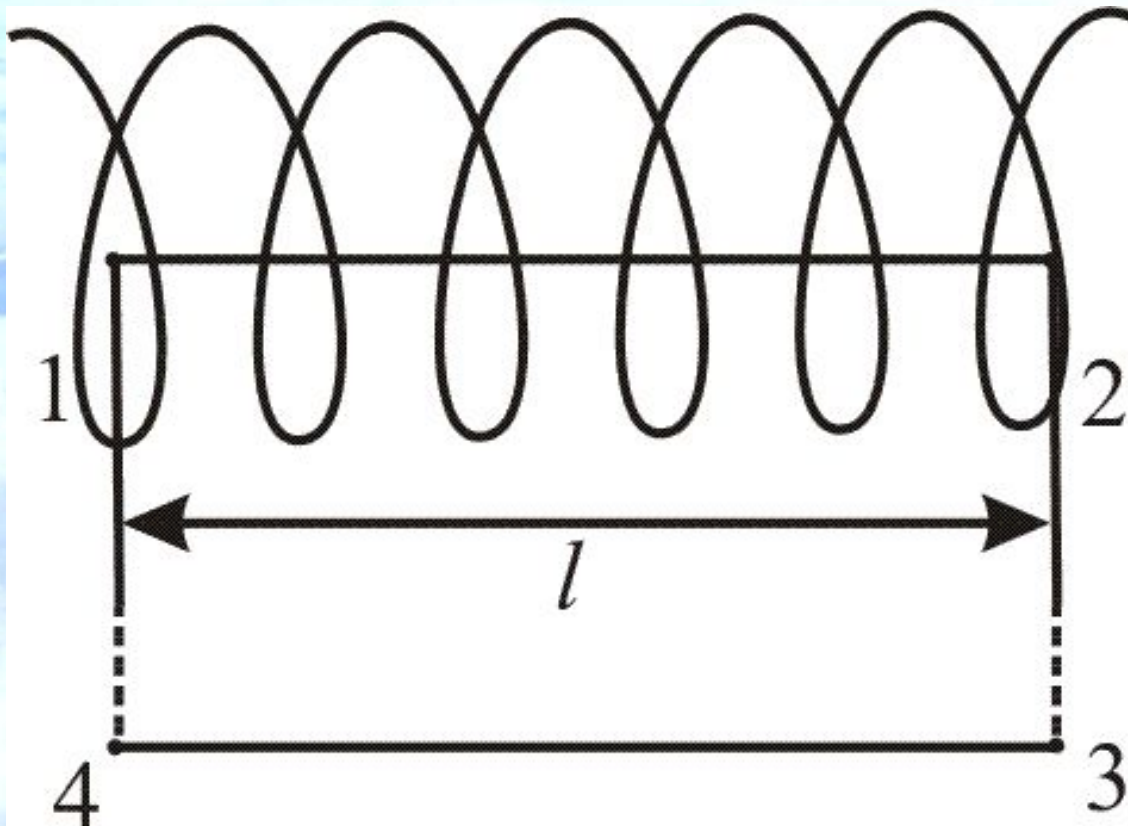
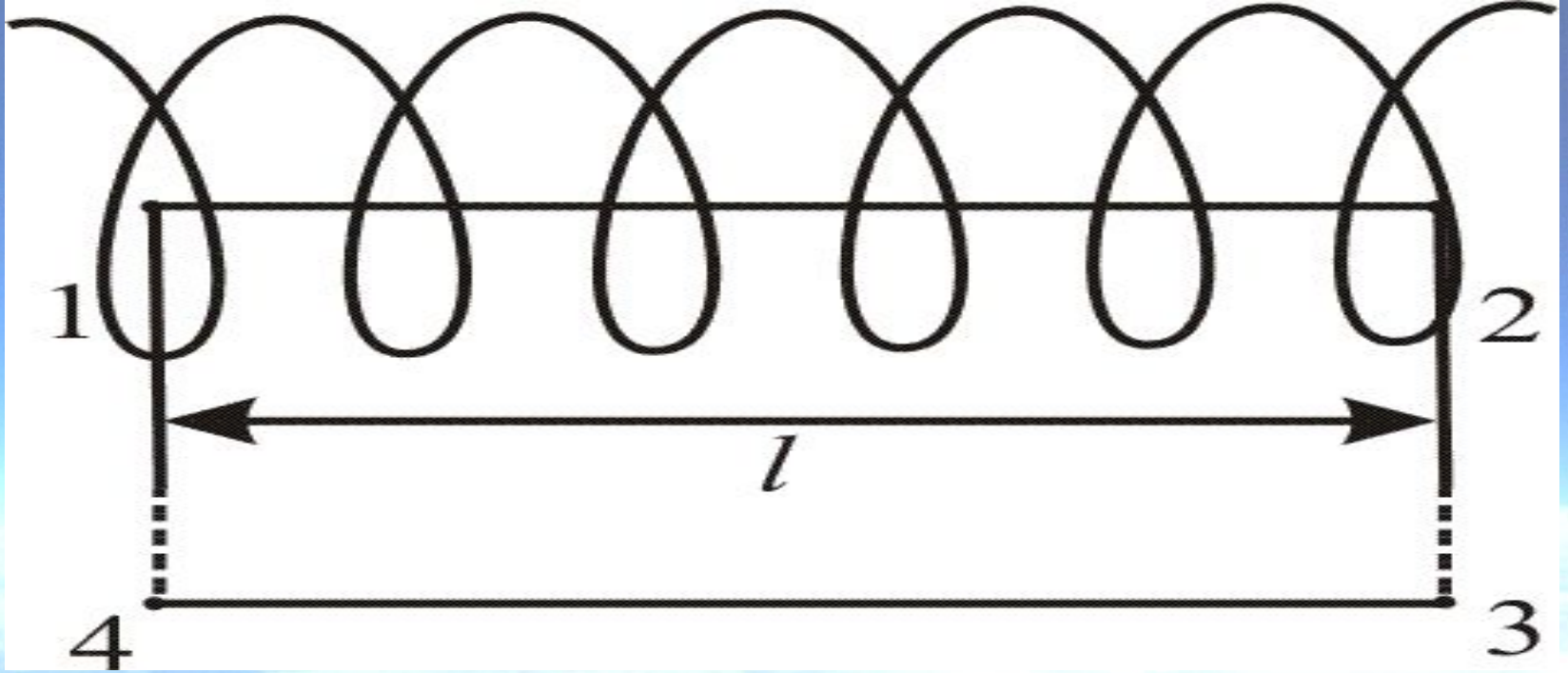


Рис. 2.13



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}.$$

- Второй и четвёртый интегралы равны нулю, т.к. вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен направлению обхода, т.е.

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



- Возьмём участок 3–4 – на большом расстоянии от соленоида, где поле стремится к нулю; и пренебрежём третьим интегралом, тогда

$$\oint B_l dl = \int_1^2 B_l dl = \mu\mu_0 \sum I_i,$$

- где  $B_l = B$  – магнитная индукция на участке 1–2 – внутри соленоида,  $\mu$  – магнитная проницаемость вещества.
- Если отрезок 1–2 внутри соленоида, контур охватывает ток:  $nIl = \sum I_i,$
- где  $n$  – число витков на единицу длины,  $I$  – ток в соленоиде (в проводнике).

- **магнитная индукция внутри соленоида**

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

- **Вне соленоида:**

- $\sum I_i = 0$  и  $\oint B_l dl = Bl = 0$ , т.е.  $B = 0$

- Бесконечно длинный соленоид аналогичен плоскому конденсатору – и тут, и там поле однородно и сосредоточено внутри.

- Произведение  $nI$  – называется **число ампер витков на метр**.

- **У конца полубесконечного соленоида**, на его оси магнитная индукция равна:

$$B = \frac{1}{2} \mu\mu_0 nI. \quad (2.7.2)$$

Если же **катушка короткая**, что обычно и бывает на практике, то магнитная индукция в любой точке  $A$ , лежащей на оси соленоида, направлена вдоль оси (по прав. буравчика) и численно равна алгебраической сумме индукций магнитных полей создаваемых в точке  $A$  всеми витками. В этом случае имеем:

**В точке, лежащей на середине оси конечного соленоида магнитное поле будет максимальным:**

$$B_{\max} = \mu_0 \mu n I \frac{L}{\sqrt{4R^2 + L^2}}, \quad (2.7.3)$$

где  $L$  – длина соленоида,  $R$  – диаметр витков.

- **В произвольной точке** конечного соленоида (рис. 2.14) магнитную индукцию можно найти по формуле

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \mu n I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

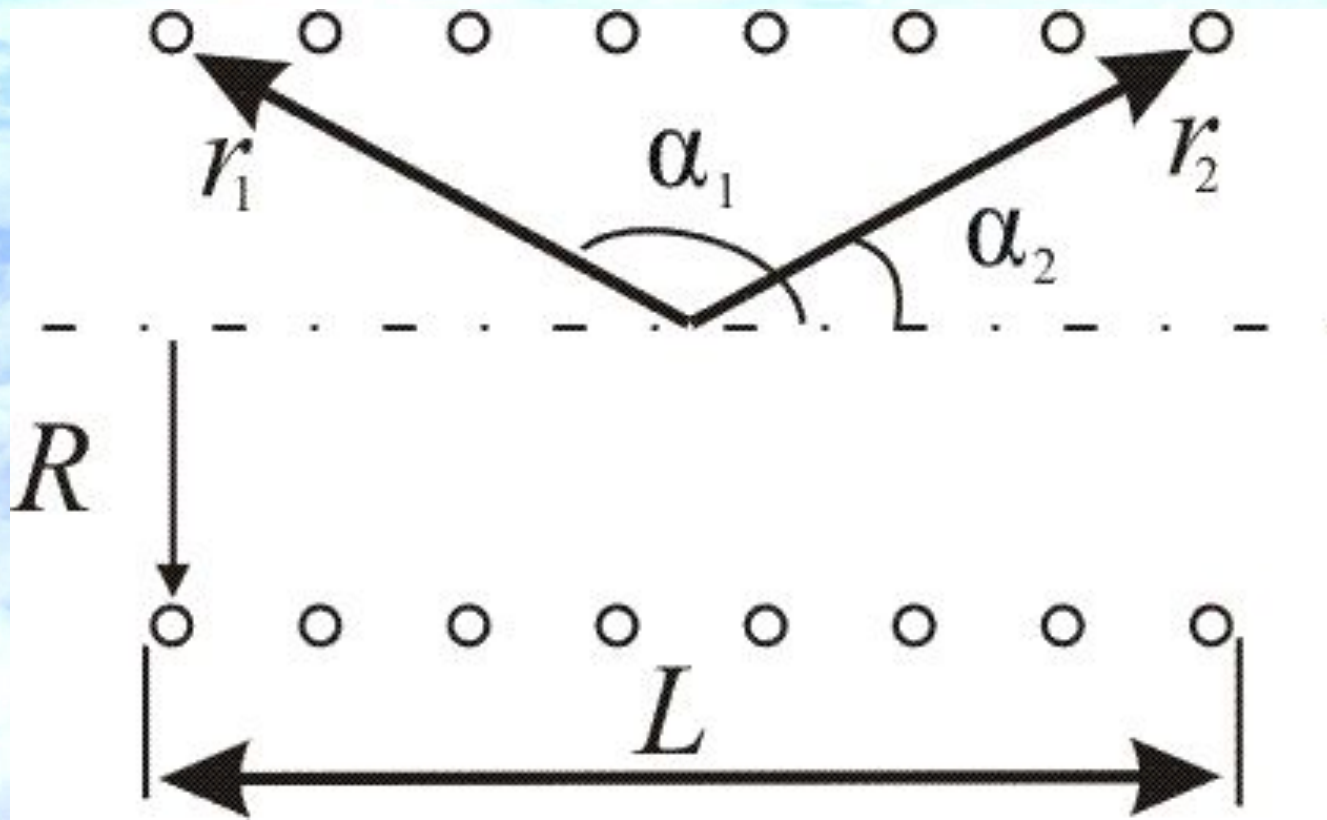
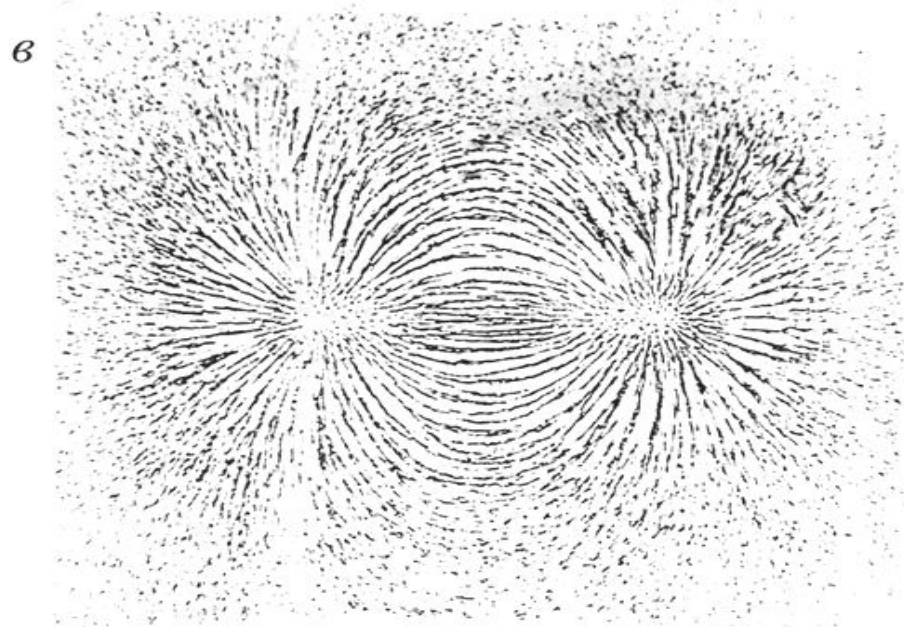
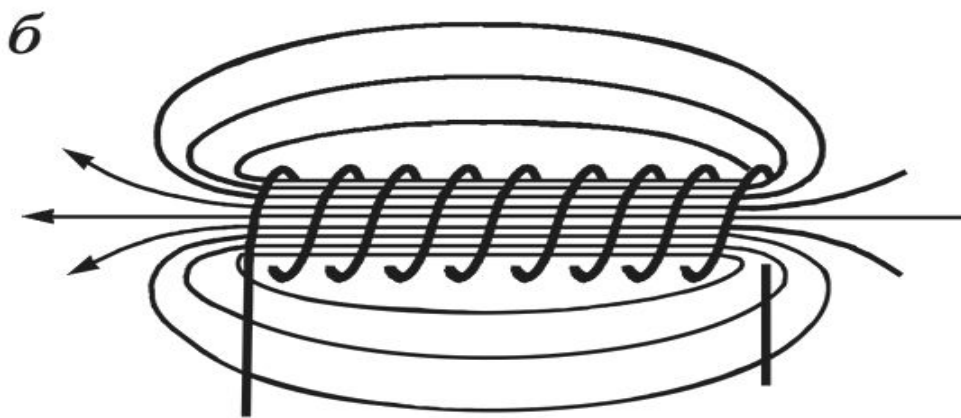
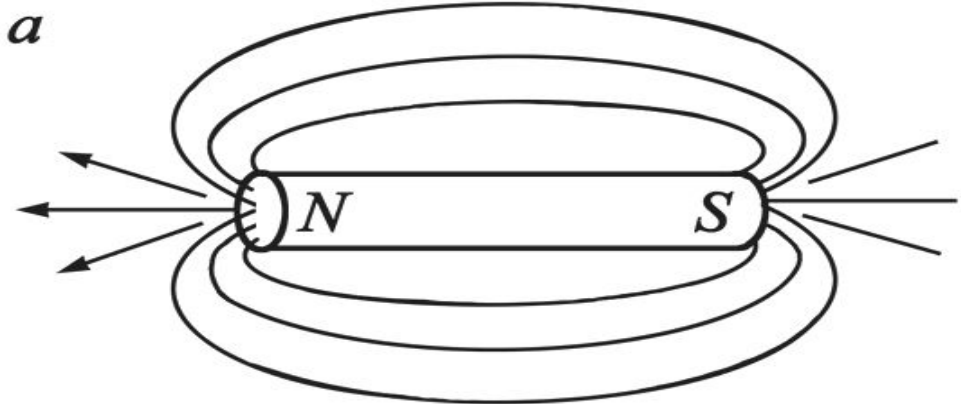


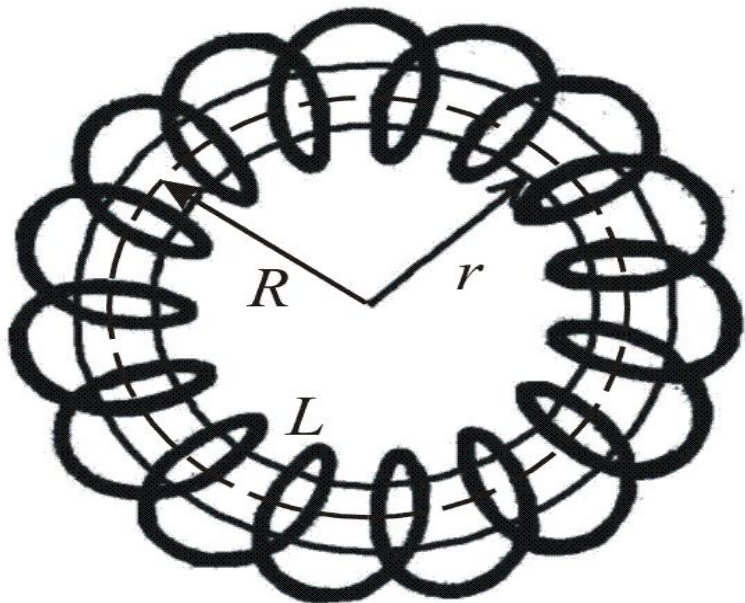
Рис. 2.14

- На рис. 2.15 изображены силовые линии магнитного поля  $B$ : а) металлического стержня; б) соленоида; в) железные опилки, рассыпанные на листе бумаги, помещенной над магнитом, стремятся вытянуться вдоль силовых линий; г) магнитные полюсы соленоида.



## 2.8. Магнитное поле тороида

- **Тороид** представляет собой тонкий провод, плотно (виток к витку) намотанный на каркас в форме тора (бублика) (рис. 2.16).
- Возьмём контур  $L$  в виде окружности радиуса  $r$ , центр которого совпадает с центром тора  $R$ .
- В силу симметрии, вектор  $\vec{B}$  в каждом токе направлен по касательной к контуру.



Следовательно,

$$\oint_L B_l dl = B 2\pi r = Bl, \quad (2.8.1)$$

где  $l = 2\pi r$  – длина контура

Рис. 2.16

- Если контур проходит внутри тороида, он охватывает ток  $2\pi RnI$  ( $n$  – число витков на единицу длины).
- Тогда, в соответствии с *теоремой о циркуляции вектора*  $\vec{B}$ , можно записать:

$$B2\pi r = 2\pi RnI\mu\mu_0$$

- Отсюда следует, что

- **внутри тора**

$$B = \mu\mu_0 nI \frac{R}{r}$$

- Контур вне тороида токов не охватывает, поэтому **вне тороида**

$$B = 0$$

- Для тороида, где радиус тора намного больше радиуса витка, отношение  $R / r \approx 1$ , тогда **магнитное поле тора  $B$**  можно рассчитать по формуле:

$$B = \mu\mu_0 nI.$$

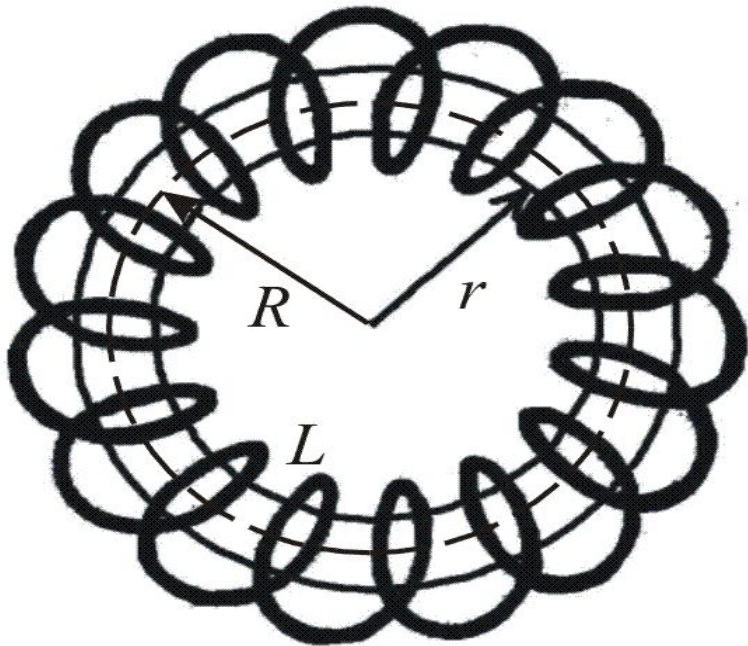
- *В тороиде магнитное поле однородно*

*в центре, т.е. по*

*длине*

*его в*

*различно*





# Движение проводника в магнитном поле

ЭДС



# *Работа силы Ампера:*

$$dA = F_A \cdot dx = IBl \cdot dx$$

За счет чего выполняется работа?!



# *Работа силы Ампера:*

$$dA = I \cdot (B \cdot l dx \cos \alpha)$$

$$dA = I \cdot d\Phi$$

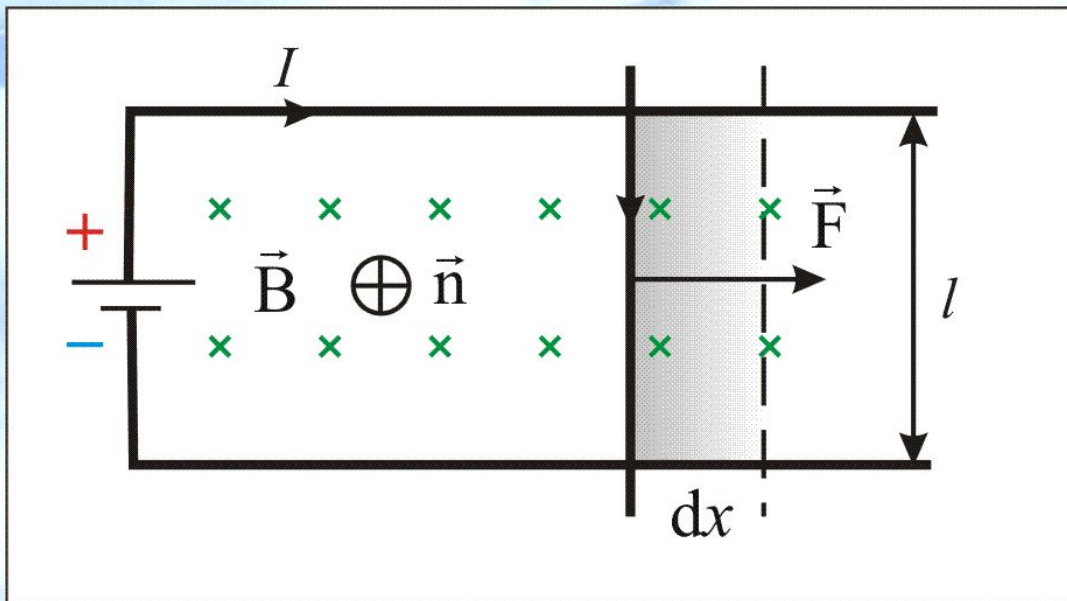
# Работа силы Ампера определяется двумя факторами:

1 - величина тока в проводнике, 2 - величина магнитного потока

## 2.9. Работа по перемещению

### проводника с током в магнитном поле

- Рассмотрим контур с током, образованный неподвижными проводами и скользящей по ним подвижной перемычкой длиной  $l$
- Этот контур находится во внешнем однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном к плоскости контура. При показанном на рисунке направлении тока  $I$ , вектор  $\vec{B}$  сонаправлен с  $\vec{n}$ .



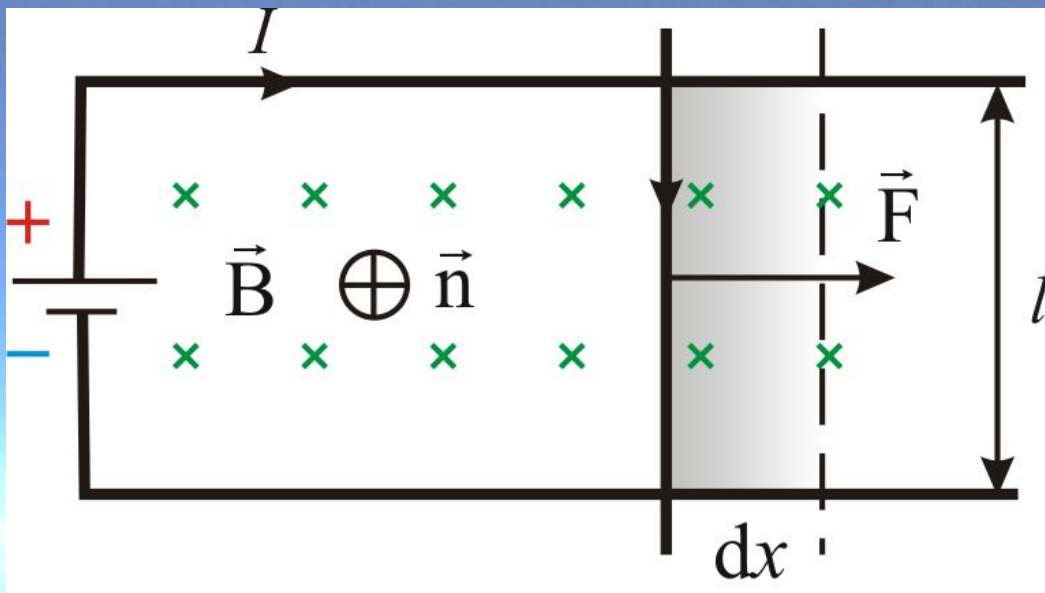


Рис. 2.17

На элемент тока  $I$  (подвижный провод) длиной  $l$  действует **сила Ампера**, направленная вправо:

$$F = IlB.$$

Пусть проводник  $l$  переместится параллельно самому себе на расстояние  $dx$ . При этом совершится работа:

$$dA = F dx = IB l dx = IB dS = Id\Phi.$$

• Итак,

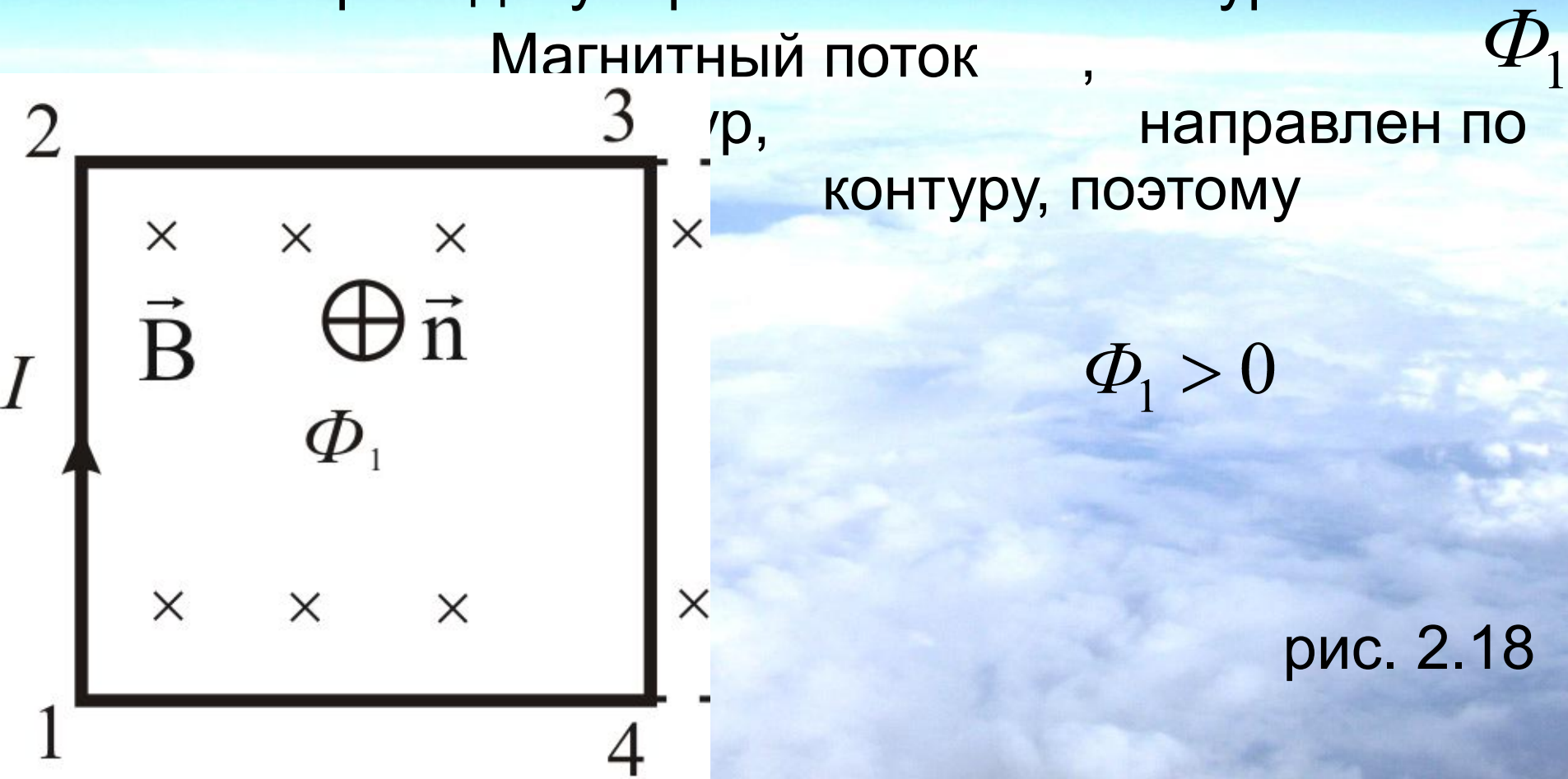
$$dA = Id\Phi. \quad (2.9.1)$$

- **Работа, совершаемая проводником с током при перемещении, численно равна произведению тока на магнитный поток, пересечённый этим проводником.**
- *Формула остаётся справедливой, если проводник любой формы движется под любым углом к линиям вектора магнитной индукции.*

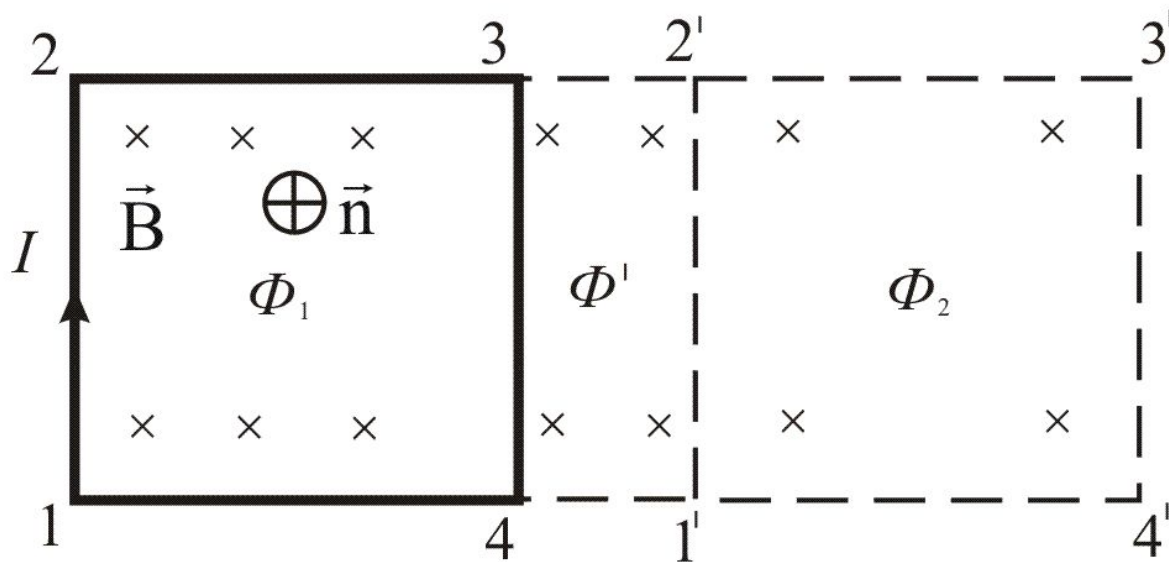


• **Выведем выражение для работы по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле.**

• Рассмотрим прямоугольный контур с током 1-2-3-4-1 (рис. 2.18). Магнитное поле направлено от нас перпендикулярно плоскости контура.



- Переместим этот контур параллельно самому себе в новое положение 1'-2'-3'-4'-1'. Магнитное поле в общем случае может быть неоднородным и новый контур будет пронизан магнитным потоком  $\Phi_2$ .
- Площадка 4-3-2'-1'-4, расположенная между старым и новым контуром, пронизывается потоком  $\Phi'$ .



- Полная работа по перемещению контура в магнитном поле равна алгебраической сумме работ, совершаемых при перемещении каждой из четырех сторон контура:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41},$$

- Где  $A_{23}$ ,  $A_{41}$  равны нулю, т.к. эти стороны не пересекают магнитного потока, при своём перемещении (очерчивают нулевую площадку).

$$A_{34} = I(\Phi' + \Phi_2)$$

- Провод 1–2 перерезает поток ( $\Phi_1 + \Phi'$ ), но движется против сил действия магнитного поля.

$$A_{12} = -I(\Phi_1 + \Phi')$$

- Тогда **общая работа по перемещению контура:**

- $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$ , или  $A = I\Delta\Phi$ ,

- Здесь  $\Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi$  – это изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

- *Работа, совершаемая при перемещении замкнутого контура с током в магнитном поле, равна произведению величины тока на изменение магнитного потока, сцепленного с этим контуром.*

- $$dA = Id\Phi. \quad (2.9.5)$$

- Выражения (2.9.1) и (2.9.5) внешне тождественны, но *физический смысл* величины  $d\Phi$  различен.

- Соотношение (2.9.5), выведенное нами для простейшего случая, остаётся справедливым для контура любой формы в произвольном магнитном поле.
- Более того, если контур неподвижен, а меняется  $\vec{B}$ , то при изменении магнитного потока в контуре на величину  $d\Phi$ , магнитное поле совершает ту же работу

$$dA = Id\Phi.$$

## 2.10. Эффект Холла

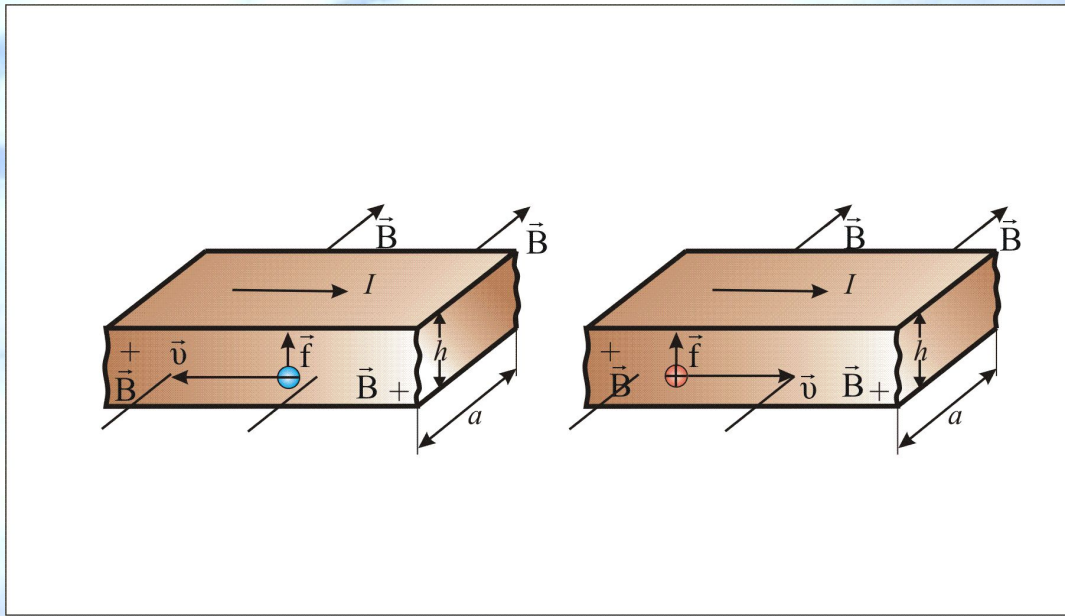
- Одним из проявлений магнитной составляющей силы Лоренца в веществе служит эффект, обнаруженный в 1879 г. американским физиком Э.Г. Холлом (1855–1938).
- **Эффект Холла состоит в возникновении на боковых гранях проводника с током, помещенного в поперечное магнитное поле, разности потенциалов, пропорциональной величине тока  $I$  и индукции магнитного поля  $B$ .**

# Эффект Холла

Обусловлен действием Лоренцевой силы  $\vec{f}$  на свободные заряды в проводнике.

Представим себе проводник в виде плоской ленты, расположенной в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  направленной от нас (Рис. 10.9).

В случае а) верхняя часть проводника будет заряжаться отрицательно, в случае б) положительно.





- Это позволяет экспериментально определить знак носителя заряда в проводнике.
- При равной концентрации носителей заряда **обоих знаков возникает холловская разность потенциалов**, если различна подвижность, т.е. дрейфовая скорость носителей заряда.
- Подсчитаем величину холловской разности потенциалов ( $U_x$ ).
- Обозначим:  $E_x$  – напряженность электрического поля, обусловленного ЭДС Холла,  $h$  – толщина ленты проводника.

- $$U_x = E_x h. \quad (2.10.1)$$

- Перераспределение зарядов прекратится, когда сила  $qE_x$  уравновесит лоренцеву силу, т.е.  $qE_x = qvB$  или  $E_x = vB$ .

- Плотность тока  $j = nvq$ , отсюда  $v = \frac{j}{nq}$ .

- Тогда  $E_x = B \frac{j}{nq}$ .

- Подставим  $E_x$  в (2.10.1) и найдем  $U_x$ :

$$U_x = \frac{jBh}{nq} \text{ или } U_x = \frac{BhI}{nqS} = \frac{BI}{qna} = \frac{RBI}{a}, (2.10.2)$$

- Где  $R = 1 / qn$  – коэффициент Холла.

## холловская разность потенциалов

$$U_x = \frac{BI}{qna} = \frac{RBI}{a}$$

Где  $R = 1 / qn$  – коэффициент Холла.

- Исследования ЭДС Холла привели к удивительным выводам:
- Металлы могут обладать проводимостью  $p$ -типа (Zn, Cd – у них дырки более подвижные, чем электроны).
- Это металлы с чуть перекрывающимися знаками, т.е. полуметаллы.

**Из формулы 10.6.3 можно вывести число носителей заряда.**

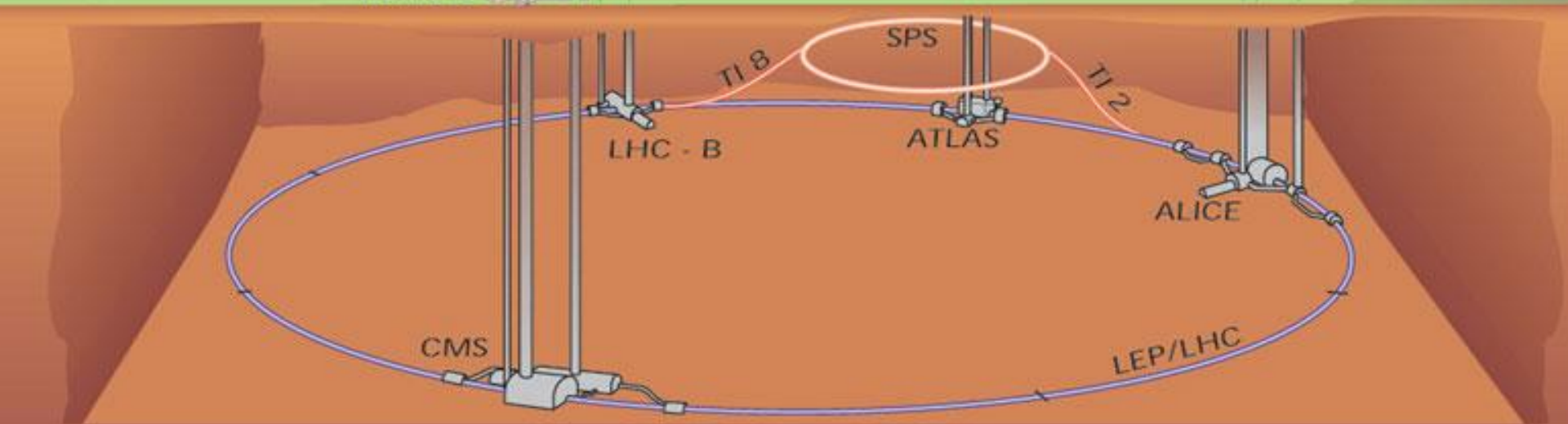
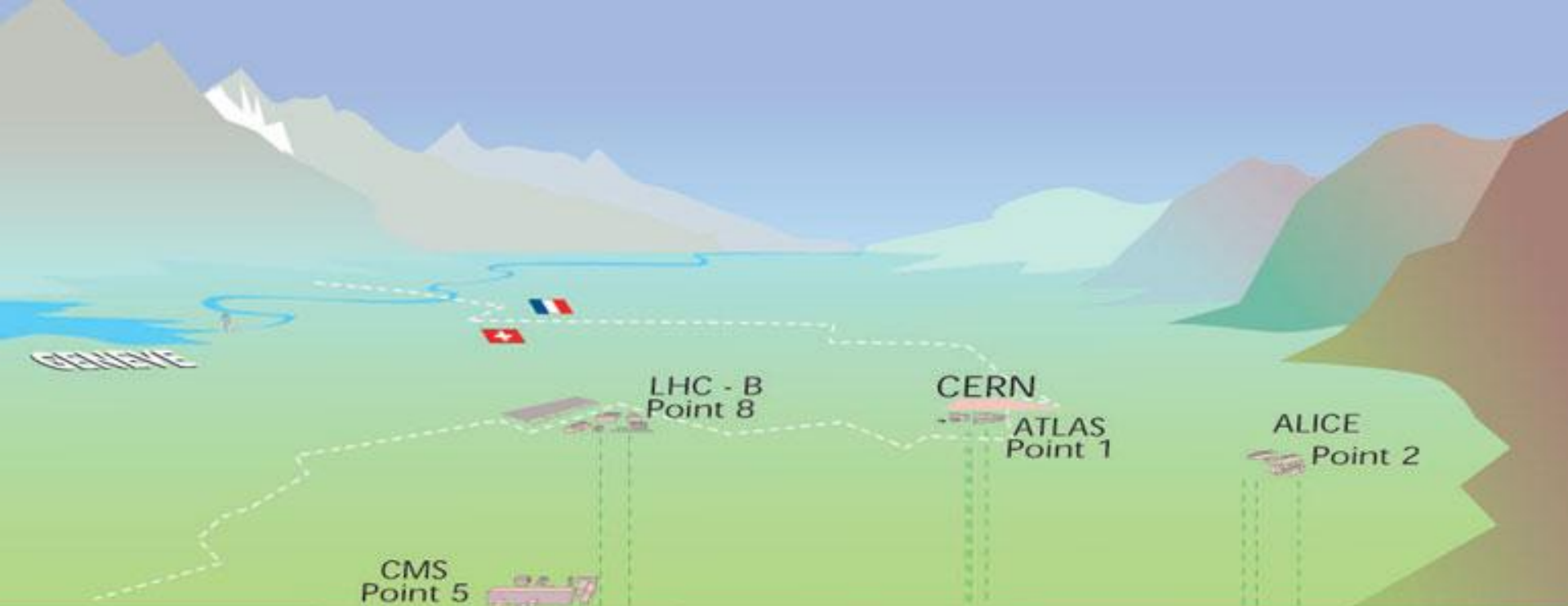
$$(10.6.4) \quad n = \frac{IB}{qaU_x}$$

**Итак, измерение Холловской разности потенциалов позволяет определить:**

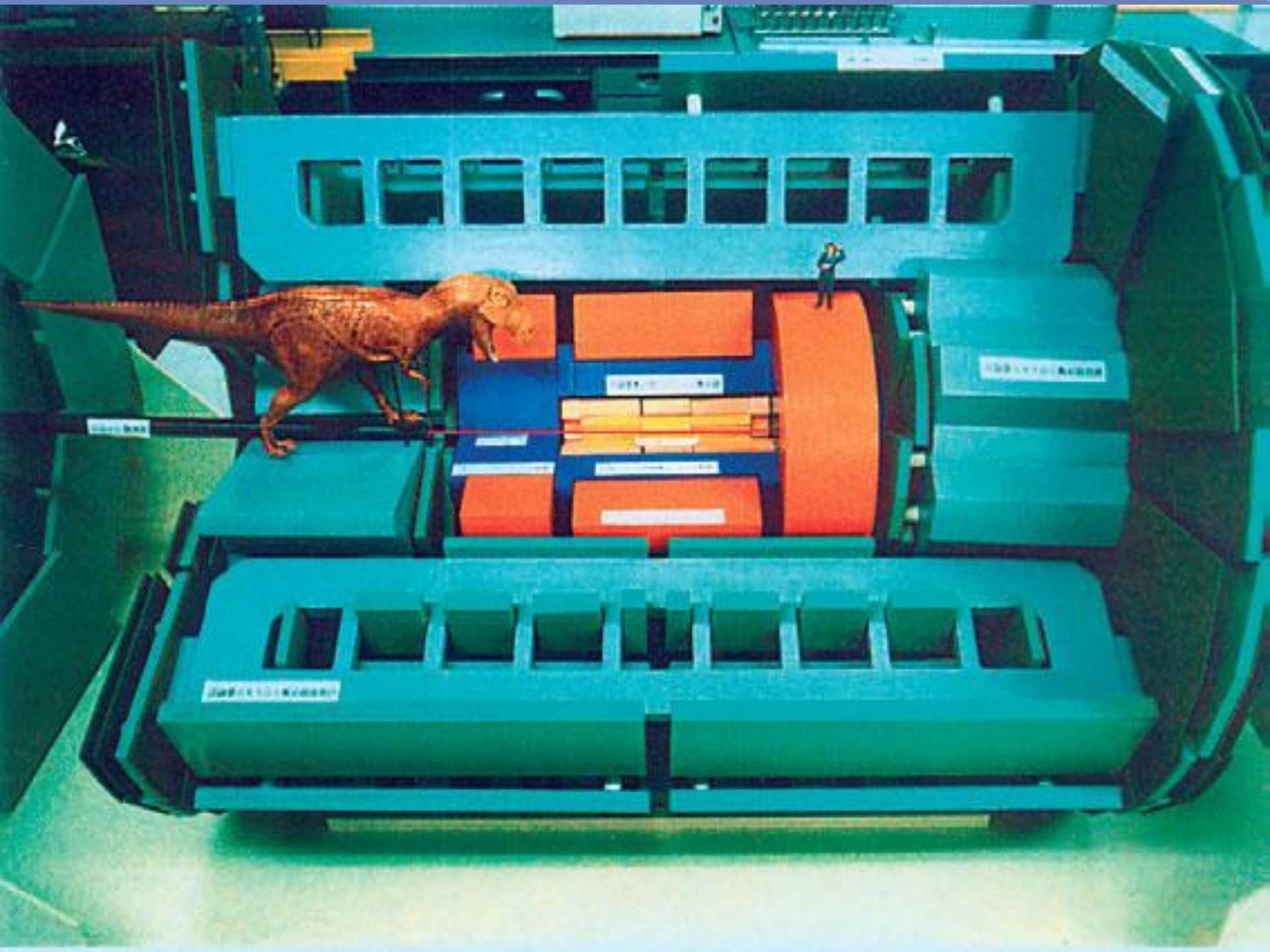
- 1) знак заряда;**
- 2) количество носителей.**

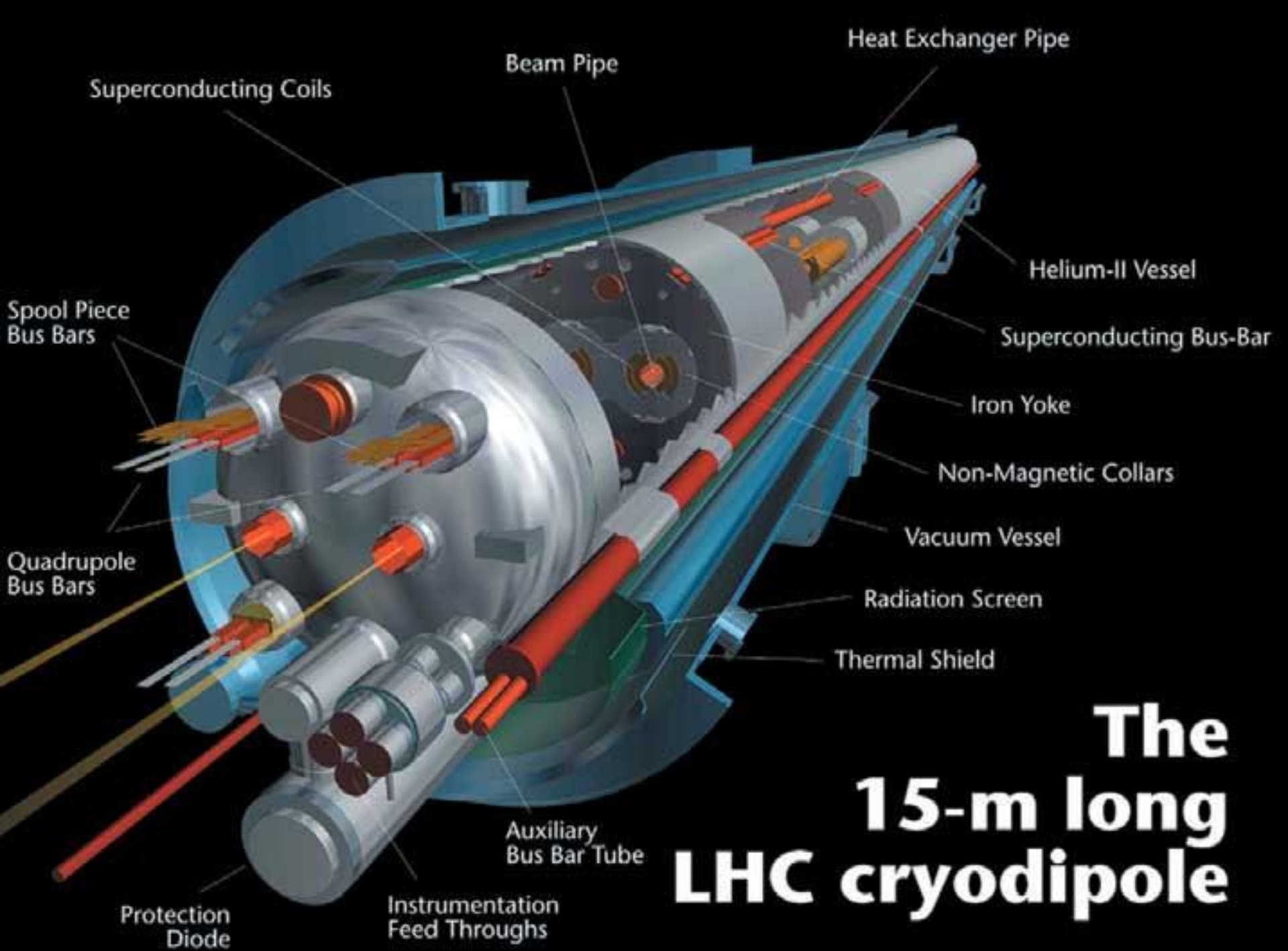
Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	$q$	Ток	$I$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	Магнитная постоянная	$\mu_0$
Диэлектрическая проницаемость	$\epsilon$	Магнитная проницаемость	$\mu$
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi = \epsilon - 1$	Магнитная восприимчивость	$i = \mu - 1$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{ q_1q_2 }{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{r}$
Силовая характеристика электрич. поля	$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$	Силовая характеристика магнитного поля	$\vec{B} = \frac{\vec{M}_{\max}}{P_m}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_k \vec{E}_k$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_k \vec{B}_k$

Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Поляризованность	$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$	Намагниченность	$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$
Емкость проводника	$C = \frac{q}{\phi}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I}$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2}$
Объемная плотность энергии	$w = \frac{ED}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$	Объемная плотность энергии	$w = \frac{BH}{2} = \frac{\mu_0 H^2}{2}$
Поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхн. $S$	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_B = \oint_S \vec{B} dS = 0$
Циркуляция вектора $\vec{E}$	$\oint_L \vec{E} dl = 0$	Циркуляция вектора $\vec{B}$	$\oint_L \vec{B} dl = \mu_0 I$









# The 15-m long LHC cryodipole

Лекция окончена!