Лекция 2. Сильный взрыв в воздухе

Владимир Павлович Крайнов,
кафедра теоретической физики МФТИ, 10.09.2016

- Рассмотрим сначала, как распространяется фронт ударной волны. Радиус фронта R является функцией энергии взрыва E, времени t и невозмущенной плотности ρ_1 воздуха Зависимостью радиуса от атмосферного давления p_1 пренебрегаем, так как оно мало по сравнению с давлением p_2 с внутренней поверхности фронта. Ниже мы покажем, что для плотности воздуха это не так: плотность ρ_2 с внутренней поверхности фронта, хотя и больше ρ_1, но имеет тот же порядок величины, что и ρ_1.

- Из соображений размерности получим
- (1)

$$R(t) = C\left(\frac{Et^2}{\rho_1}\right)^{1/5}.$$

- При численном решении для воздуха коэффициент в этой зависимости равен C = 1.033 (газ двухатомных молекул).
- Для скорости фронта ударной волны получаем
- (2)

$$u = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5}\frac{R}{t} \propto t^{-3/5}$$

(она, естественно, убывает со временем).

Мощность этого взрыва – 1 мегатонна тротилового эквивалента: $E = 4.18 \cdot 10^{15}$ Дж. Это соответствует преобразованию в энергию 47 г урана-235 ($E = Mc^2$)

Граничные условия на фронте ударной волны

- На фронте ударной волны непрерывна плотность потока газа, давление и плотность потока энергии. Запишем эти три условия в системе координат, где фронт волны покоится (1 – снаружи фронта, 2 – внутри; ε - внутренняя энергия единицы массы):
- (3)

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2;$$

$$p_1 + \rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2;$$

$$\rho_1 V_1 \left(\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} \right) = \rho_2 V_2 \left(\varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2} \right).$$

- Для двухатомного газа (воздух) внутренняя энергия равна

$$\varepsilon = c_v T = \left(5/2\right)T = 5P/2\rho$$

- (здесь мы воспользовались уравнением Клапейрона для идеального газа). Таким образом, систему (3) можно переписать в виде
- (4)

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2;$$

$$\rho_1 V_1^2 = p_2 + \rho_2 V_2^2;$$

$$\frac{V_1^2}{2} = \frac{7p_2}{2\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}.$$

- Исключая давление из системы (4), получим

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2;$$

$$V_1^2 = \frac{7\rho_1}{\rho_2} V_1^2 - 6V_2^2.$$

- Исключая отношение скоростей из этой системы, находим уравнение для отношения плотностей:

$$1 = 7\frac{\rho_1}{\rho_2} - 6\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2. \qquad \rho_2 = 6\rho_1$$

- *Сильная ударная волна сжимает воздух в 6 раз!*

- Определим из (4) скорость газа сразу за фронтом в лабораторной системе координат. Переход к ней осуществляем в соответствии со скоростью фронта (2):
- (5)

$$V_1^{lab} = V_1 + \frac{2R}{5t} = 0;$$

$$V_2^{lab} = V_2 + \frac{2R}{5t} = \frac{1}{6}V_1 + \frac{2R}{5t} = -\frac{R}{15t} + \frac{2R}{5t} = \frac{R}{3t}.$$

- Разумеется скорость частиц газа за фронтом в лабораторной системе V_2^{lab}
- меньше скорости фронта: частицы газа не могут обогнать фронт.

- Определим также давление сразу за фронтом ударной волны, исходя из системы (4):
- (5)

$$p_2 = \rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2 = 5\rho_2 V_2^2 = \rho_2 \frac{R^2}{45t^2}$$

- Далее обратимся к решению уравнений движения для внутренней области взрыва. Методика решения основана на введении автомодельной переменной, что делается в большинстве задач гидродинамики с малым числом параметров.

Автомодельные переменные

- Введем *автомодельную переменную* ,

$$\xi = r / R(t)$$

- где радиус фронта ударной волны $\boxed{R(t)}$ определяется соотношением (1) (с коэффициентом пропорциональности, равным единице). Плотность воздуха внутри области взрыва ищем в виде

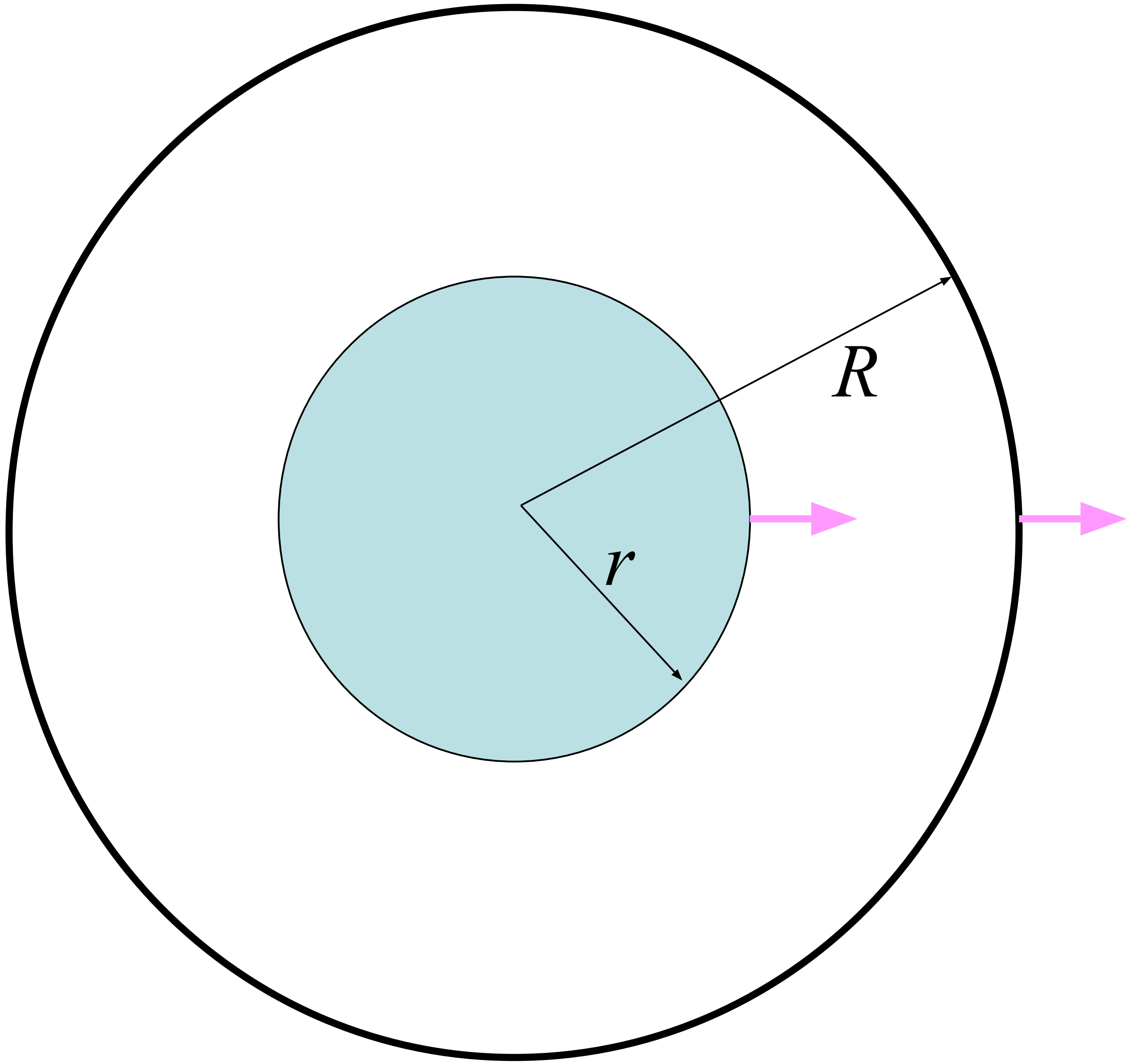
$$\rho = \rho_2 G(\xi).$$

- Скорость воздуха внутри области взрыва в соответствии с (2) ищем в виде $V = \frac{r}{t} A(\xi)$, а давление - $\frac{p}{\rho} = \frac{r^2}{t^2} Z(\xi)$

Баланс энергии

- Полная энергия газа внутри ограниченной ударной волной сферы постоянна. Вследствие автомодельности будет постоянна и полная энергия внутри любой сферы меньшего радиуса $r < R$, которая расширяется со временем по тому же закону, что и определяемая формулой (2):
- $$u(R) = \frac{2}{5}\frac{R}{t}$$
- Радиальная скорость перемещения точек этой сферы в соответствии с (2) равна

$$u(r) = \frac{2r}{5t}.$$



R
r

- За время dt через единицу сферической поверхности с этим радиусом проходит наружу энергия газа, равная (см. (3))
- (7)

$$dQ = \rho V\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right)dt \quad \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2}\right]$$

- Отметим, что здесь фигурирует скорость газа V в лабораторной системе координат. Поток энергии включает и слагаемое с давлением, соответствующее совершаемой работе, так как давление и плотность изменяются при переходе через границу сферы радиуса r, как это было ранее для фронта ударной волны (см. (3)).

- С другой стороны, за это же время указанная поверхность расширяется на расстояние

$$dr = u(r)dt = \frac{2r}{5t}dt.$$

- Энергия движущегося газа, заключенная в этой области, равна
- (8)

$$\boxed{dQ' = \rho\left(\varepsilon + \frac{V^2}{2}\right)dr}$$

- Она не содержит члена с работой, в отличие от (7). Приравнивая (7) и (8) друг другу, находим уравнение баланса энергии:

$$V\left(\frac{7p}{2\rho}+\frac{1}{2}V^2\right)=\frac{2r}{5t}\left(\frac{5p}{2\rho}+\frac{1}{2}V^2\right).$$

- Подставляя автомодельные зависимости, приведенные выше, перепишем это уравнение в виде

$$A\left(\frac{7}{2}Z+\frac{1}{2}A^2\right)=\frac{2}{5}\left(\frac{5}{2}Z+\frac{1}{2}A^2\right).$$

- Отсюда находим
- (9)

$$\boxed{Z=\frac{A^2\left(2/5-A\right)}{7A-2}.}$$

- На малых расстояниях $r << R$ плотность (при фиксированном времени) стремится к нулю, а давление конечно (мы увидим это ниже из решения). Следовательно, величина

$$Z(\xi) = \frac{pt^2}{\rho r^2} \to \infty$$

- Из (9) тогда следует, что $A \to 2/7.$
- Для скорости газа получим
- (10) $$V = \frac{2r}{7t}; \quad r << R.$$

Если $r \to R$

- то согласно (5) скорость газа в лабораторной системе координат равна

$$V(R) = \frac{R}{3t}, \quad r = R$$

- Видно, что расхождение между этой скоростью газа и скоростью газа в окрестности точки взрыва

$$V(r) = \frac{2r}{7t}; \quad r << R.$$

- невелико. Это оправдывает сделанное выше приближение для скорости газа.

Уравнение непрерывности

- Обратимся теперь к уравнению непрерывности (в сферической системе координат) $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\mathbf{V}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho V\right)}{\partial r}+\frac{2\rho V}{r}=0.$$
- Подставляя выражение (10) для скорости газа и автомодельное выражение для плотности $\rho=\rho_2 G(\xi)$
- перепишем это уравнение в виде

$$\xi\frac{dG}{d\xi}=\frac{15}{2}G.$$

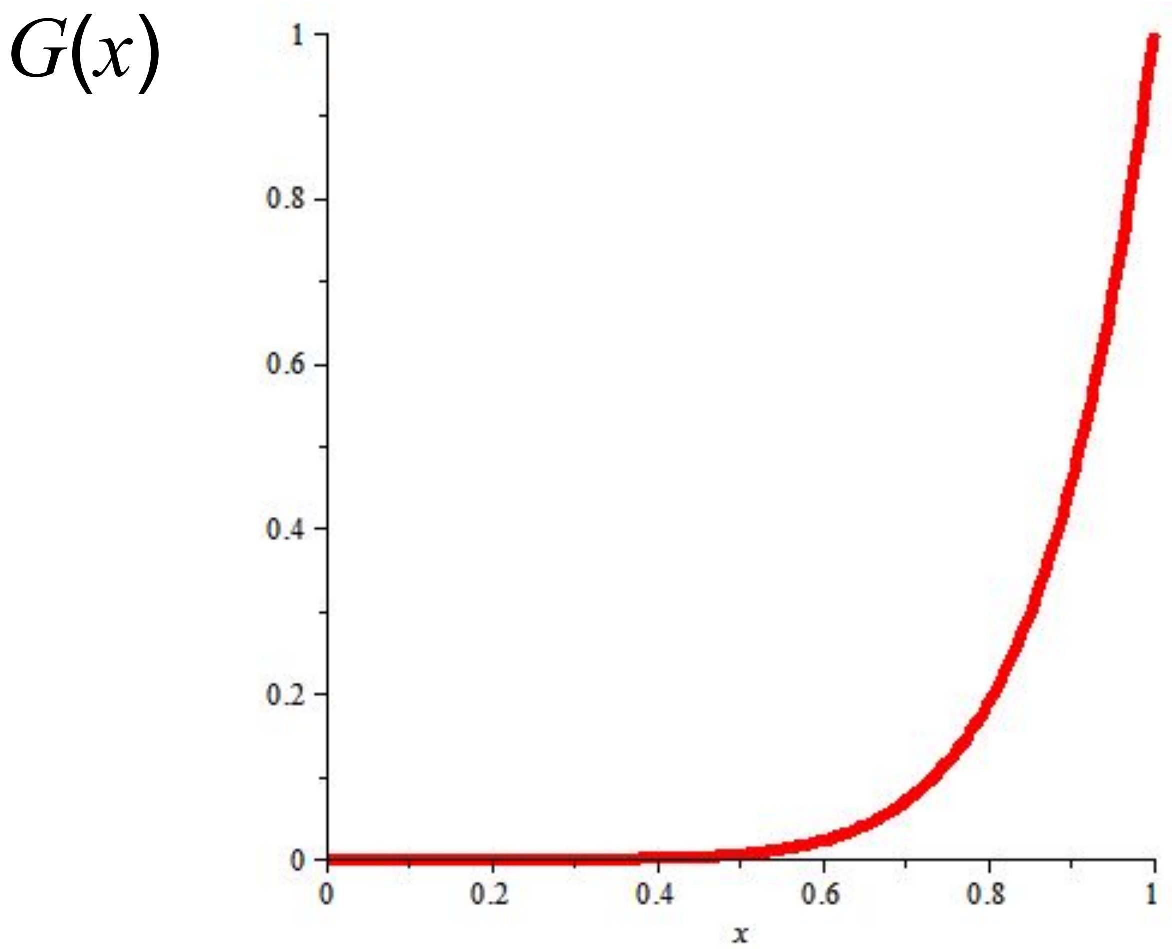
- Отсюда

$$G = \xi^{15/2}$$

- (константа пропорциональности выбрана так, чтобы плотность газа на внутренней поверхности фронта ударной волны равнялась ρ_2). Таким образом, плотность газа внутри области взрыва равна

$$\rho(r,t) = \rho_2 \left(\frac{r}{R(t)} \right)^{15/2} = \frac{6\rho_1^{5/2} r^{15/2}}{E^{3/2} t^3}.$$

- Видно, что ввиду очень резкой зависимости от расстояния r практически внутри области взрыва вещество газа отсутствует, а весь газ концентрируется вблизи области фронта ударной волны. Резкая функция $G(x) = x^{15/2}$ представлена на рисунке.



Зависимость плотности воздуха
от расстояния до центра взрыва

Давление в области взрыва

- Давление воздуха выражалось через безразмерную автомодельную переменную соотношением

$$\frac{p}{\rho} = \frac{r^2}{t^2} Z(\xi)$$

- На фронте ударной волны давление согласно (5) равно

$$p_2(t) = \rho_2 \frac{R^2}{45t^2}; \quad Z(1) = \frac{1}{45}.$$

- Для определения давления воспользуемся уравнением Навье-Стокса, записав его в сферической системе координат (в отсутствие вязкости ввиду больших чисел Рейнольдса):
- (11) $$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial r}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}$$
- Подставляем в это уравнение величины, выраженные через автомодельную переменную $\xi = r / R(t)$:

$$\rho = \rho_2 \xi^{15/2}; \quad V = 2r / 7t; \quad p = \rho_2 r^2 Z\left(\xi\right) / t^2$$

- Тогда все слагаемые в (11) содержат r/t^2

- Получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\xi \frac{dZ}{d\xi} + \frac{19}{2} Z = \frac{10}{49}.$$

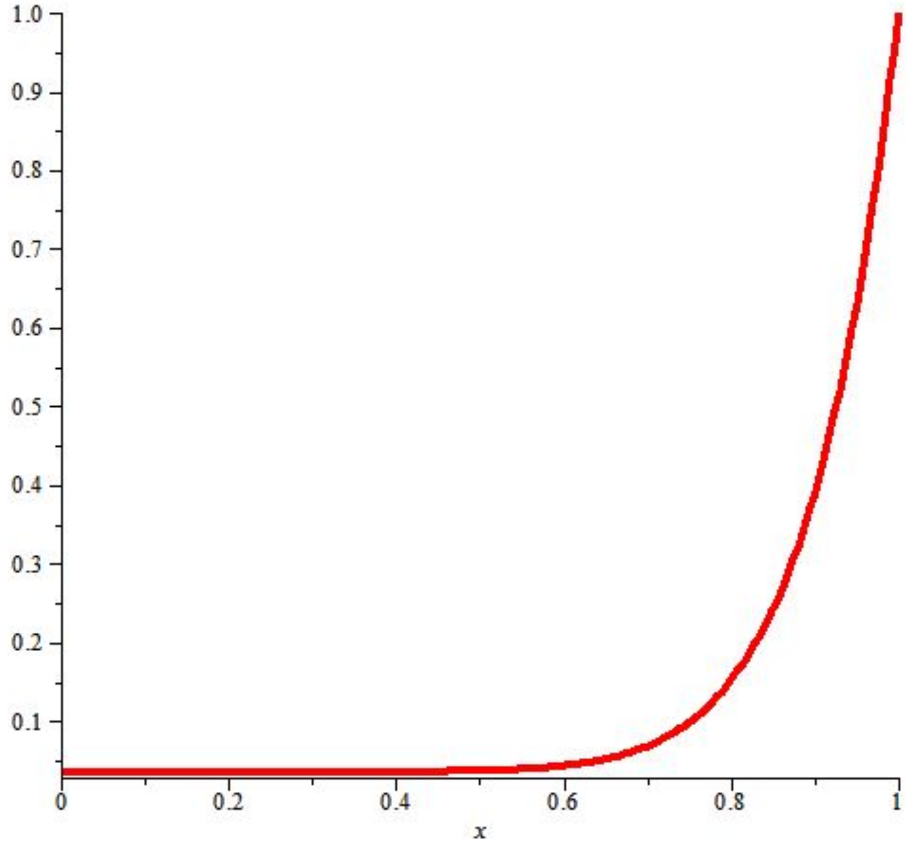
- Его решение при условии $Z(1) = 1/45$ имеет вид

$$Z(\xi) = \frac{1}{45} \xi^{-19/2} + \frac{20}{19 \cdot 49} \left(1 - \xi^{-19/2}\right).$$

- Отношение давления внутри области взрыва к давлению на фронте ударной волны равно

$$\frac{p(r,t)}{p_2(t)} = 0.036 + 0.964 \xi^{19/2}$$

$$\frac{p(r,t)}{p_2(t)}$$



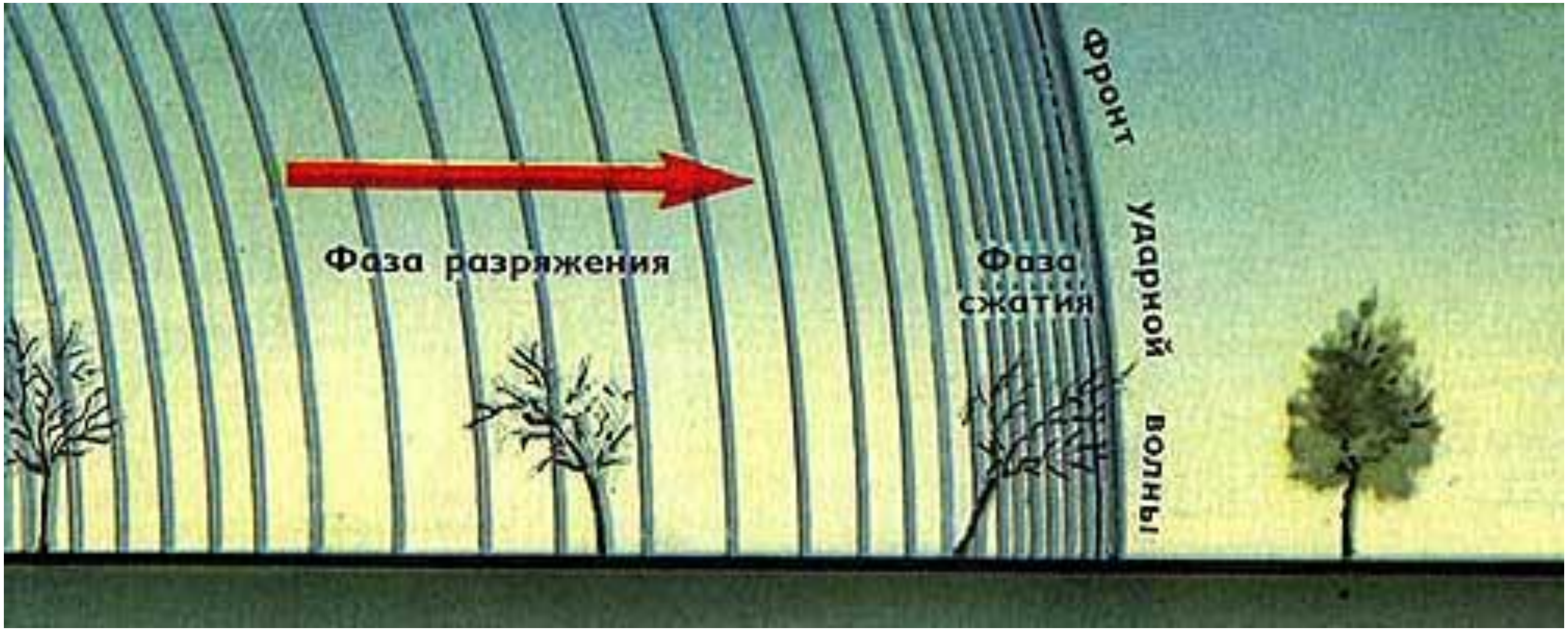
Из этого рисунка видно, что давление в большей части области внутри взрыва достаточно мало, не зависит от радиальной координаты r (в данный момент времени) и лишь вблизи фронта резко возрастает.


Изменение давления во фронте ударной волны
с увеличением расстояния от центра взрыва.
(Для наземного ЯВ мощностью 1 Мт)
10
2
0.8
0.5
0.35
0.25
0.2
DOMINATING.RU

давление

Фаза разрежения внутри области взрыва

- Перед фронтом ударной волны давление в воздухе равно атмосферному давлению. С приходом фронта ударной волны в данную точку пространства давление резко (скачком) увеличивается и достигает максимального, затем, по мере удаления фронта волны, давление постепенно снижается и через некоторый промежуток времени становится равным атмосферному. Образовавшийся слой сжатого воздуха называют *фазой сжатия*. Ударная волна как поршень тянет за собой воздух. Сзади образуется зона разрежения, давление становится ниже атмосферного и воздух начинает двигаться в направлении, противоположном распространению ударной волны, то есть к центру взрыва. Зона разрежения обсуждается детально в следующей лекции.


Фаза разряжения
Фаза сжатия
Фронт ударной волны


Направление движения ударной волны
Избыточное давление во фронте
Давление в ударной волне
Атмосферное давление
Фронт ударной волны
Фаза разрежения
Фаза сжатия

Спасибо за внимание