Уральский федеральный университет

Дифференциальные уравнения и ряды

Лекция 9

Тема 3. Ряды

§1. Числовые ряды: основные понятия

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots = \{a_n\}$, где a_n – действительные или комплексные числа.

Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **числовым рядом**,

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ – члены ряда,

a_n – общий член ряда.

Сумма первых n членов ряда называется n-й ***частичной суммой*** ряда и обозначается S_n, т.е.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Если последовательность частичных сумм ряда $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел S при $n \to \infty$, то ряд называется ***сходящимся***, число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют ***суммой ряда***.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то говорят, что ряд ***расходится***. Такой ряд суммы не имеет.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \ldots + a q^{n-1} + \ldots, \quad (a \neq 0).$$

Исследуем ряд на сходимость по определению.

Если $q \neq 1$, то члены ряда образуют геометрическую прогрессию, поэтому сумма первых n членов находится по формуле:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

1. Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$,

следовательно, ряд сходится и его сумма $S = a/(1-q)$.

2. Если $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.

Уральский федеральный университет

3. Если $q = 1$, то ряд примет вид: $a + a + a + \ldots$

В этом случае $S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, ряд расходится.

4. Если $q = -1$, то ряд примет вид: $a - a + a - \ldots$

В этом случае $S_n = 0$ при четном n и $S_n = a$ при нечетном n, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует и ряд расходится.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a q^n$ сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

Исследуем ряд на сходимость по определению.

Сначала преобразуем общий член ряда

$$a_n=\frac{1}{n^2-1}=\frac{A}{n-1}+\frac{B}{n+1}\Rightarrow=\frac{A(n+1)+B(n-1)}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow A(n+1)+B(n-1)=1.$$

$$\begin{array}{l} n^1: A+B=0 \\ n^0: A-B=1 \end{array}\Rightarrow\begin{cases}A=1/2;\\ B=-1/2.\end{cases}$$

Таким образом, $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$.

Составим n-ую частичную сумму ряда:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left[1-\cancel{\frac{1}{3}}\right]}_{k=2} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\right]}_{k=3} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right]}_{k=4} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{6}}\right]}_{k=5} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{n-3}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}\right]}_{k=n-2} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n}}\right]}_{k=n-1} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\right]}_{k=n} + \underbrace{\left[\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\right]}_{k=n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Таким образом, $S_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$

Теперь вычисляем предел частичной суммы ряда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] = \frac{3}{4}.$$

$0 \quad 0$

Предел равен конечному числу, следовательно, данный ряд сходится по определению и его сумма $S = 3/4$.

Свойства числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\,a_1 + c\,a_2 + c\,a_3 + \ldots + c\,a_n + \ldots$$

также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S_a и S_b, то сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ и их суммы соответственно равны $S_a \pm S_b$.

3. Если к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то исходный ряд и полученный ряд сходятся или расходятся одновременно.

Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n-м ***остатком ряда***. Он получается из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ путем отбрасывания n первых его членов.

Из 3 свойства следует, что если исходный ряд сходится, то при $n \to \infty$ его остаток стремится к нулю.

§2. Признаки сходимости числовых рядов

Установить сходимость или расходимость ряда по определению (путем вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$) во многих случаях является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда используют специальные ***признаки сходимости***.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости).

Если ряд сходится, то предел его общего члена при $n \to \infty$ равен нулю.

Доказательство.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Тогда, учитывая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда).

Если предел n-го члена ряда отличен от нуля или не существует, то ряд расходится.

Замечание. Теорема 1 дает необходимое условие сходимости ряда, но не достаточное, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то из этого не следует, что ряд сходится.

В качестве **примера (1)** рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

называемый ***гармоническим***.

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

Однако этот ряд является расходящимся (докажем это).

Запишем сумму первых $2n$ и n членов ряда:

$$S_{2n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n};$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Найдем разность $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$, в которой каждое слагаемое заменим наименьшим, равным $1/(2n)$.

Получим $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Теперь предположим, что ряд сходится, тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Переходя к пределу в неравенстве, получим, что $S - S > 1/2$, или $0 > 1/2$.

Пришли к противоречию, следовательно предположение о сходимости ряда неверно, т.е. гармонический ряд расходится.

Пример 2. Записать общий член ряда

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{3}\right)^3+\ldots,$$

указать краткую запись для ряда и исследовать его на сходимость.

Решение.

На основании первых трех элементов определяем закономерность и видим, что $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Поэтому в краткой записи ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Вычислим предел общего члена ряда:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0.$$

Общий член ряда не стремится к 0, следовательно, по достаточному условию расходимости, данный ряд расходится.

Замечания

1. Предел вычислен на основании второго замечательного предела.

2. Достаточное условие расходимости еще называют критерием расходимости. Поэтому при решении задач ответ можно формулировать в виде: ряд расходится по критерию расходимости.

Достаточные признаки сходимости

Рассмотрим некоторые достаточные признаки сходимости для ***знакоположительных*** рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами (ряд с отрицательными членами превращается в знакоположительный путем умножения на (-1), что, согласно свойствам рядов, не влияет на сходимость ряда).

Теорема 2 (признак сравнения).

Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Если для всех n выполняется неравенство $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(Суть признака: из сходимости большего ряда следует сходимость меньшего ряда, а из расходимости меньшего ряда следует расходимость большего ряда.)

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n}}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Поэтому ряд может как сходиться, так и расходиться.

Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится (см. пример 1).

Обозначим $a_n = \frac{1}{n \cdot 3^n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ и сравним a_n и b_n:

$$\forall n:\ 3^n > 1 \Rightarrow \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{n} \Rightarrow a_n < b_n.$$

В этом случае теорема 2 не применима, т.к. из расходимости большего ряда не следует расходимость меньшего ряда. И нужно искать другой ряд для сравнения.

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, который сходится (см. §1, пример 1).

Обозначим $b_n = \frac{1}{3^n}$ и сравним a_n и b_n:

$$\forall n > 1:\quad \frac{1}{n\cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} \Rightarrow a_n < b_n.$$

Следовательно, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}$ тоже сходится.

Теорема 3 (предельный признак сравнения).

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – ряды с положительными членами и существует конечный, отличный от нуля предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$ то ряды одновременно сходятся или расходятся.

Замечание. Здесь важно, что $k \neq 0$ и $k \neq \infty$.

Если при вычислении предела возникает одно из этих значений, значит, нужно либо подбирать другой ряд для сравнения, либо использовать другой признак сходимости.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$.

Решение.

Очевидно, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ при $n\to\infty$. $a_n = \sin\frac{\pi}{2n} \sim \frac{\pi}{2n}$

Поэтому для сравнения возьмем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и используем предельный признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n} \div \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2n}\cdot n\right) = \frac{\pi}{2} = k.$$

Значение k конечное и не нулевое, поэтому, по предельному признаку сравнения, оба ряда ведут себя одинаково.

Т.к. гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Теорема 4 (признак Даламбера).

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k.$

Тогда ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$.

Замечание

При $k = 1$ признак Даламбера ответа о сходимости не дает. Нужно применить другой признак.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(n+1)!}$.

Решение.

Здесь сложно оценить предел общего члена ряда, поэтому используем достаточный признак сходимости.

По условию $a_n = \dfrac{n^n}{(n+1)!}$, тогда $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}$.

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!} \div \frac{n^n}{(n+1)!} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot n^n} =$$

$$= \left[(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n+1)! \cdot (n+2) \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!} \cdot (n+2)} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{e} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)}{(n+2)}}_{1} = e > 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера, ряд расходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши).

Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k.$

Тогда ряд сходится при $k < 1$ и расходится при $k > 1$.

Замечание

Как и в случае признака Даламбера, данный признак при $k = 1$ ответа о сходимости не дает.

Пример 6. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$.

Решение.

Исследуем по радикальному признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{(n+1)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

По радикальному признаку Коши, данный ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши).

Пусть члены знакоположительного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ являются значениями некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$,…, $a_n = f(n)$,... Тогда

- если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) если $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Пример 7. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Доказательство.

Воспользуемся интегральным признаком Коши.

Составим соответствующий несобственный интеграл I рода $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$ и вычислим его.

Если $\alpha \neq 1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right|_1^b =$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to+\infty}(b^{-\alpha+1}-1) = \left[\begin{array}{ll} b^{-\alpha+1}\to 0, & \text{если } \alpha > 1 \\ b^{-\alpha+1}\to +\infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1; \\ +\infty, & \text{при } \alpha < 1. \end{array}\right.$$

Таким образом, интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$.

Рассмотрим случай когда α = 1:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\ln b=+\infty\ \Rightarrow$$

интеграл расходится.

Согласно интегральному признаку Коши, из сходимости интеграла следует сходимость ряда, а из расходимости – расходимость ряда.

Поэтому ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Замечание.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ называют обобщенным гармоническим рядом и часто используют в признаках сравнения.

Уральский федеральный университет

Задание для самоконтроля

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)}$,

используя интегральный признак Коши.