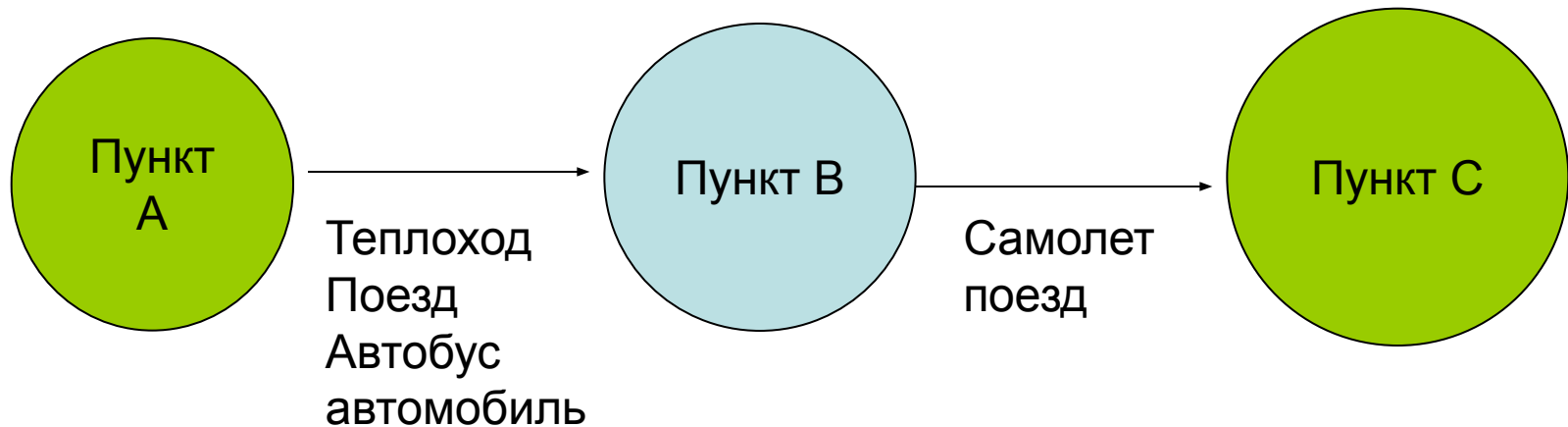


# Лекция 3 Введение в комбинаторику

Цель лекции: принцип комбинаторики, число элементов суммы множеств, принцип математической индукции. Подмножества данного множества.

# Комбинаторика

- Расчет способов осуществления некоторых действий - является сущностью комбинаторных задач.
- **Задача 1:** Сколько вариантов попасть из А в С?



# Введение

- **ЗАДАЧА 2:** В соревновании участвуют 16 команд. Сколько способов распределения золотой, серебряной медали и бронзовой медали?

# Основное правило комбинаторики

- **Правило умножения.**
- Если необходимо выполнить по порядку  $k$  действий. Первое можно выполнить  $n_1$  способами, второе  $n_2$  – способами и т.д. То все  $k$  действий:

$$K = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$$

# Задача

- **Задача 3.** Сколько четырех значных чисел можно составить из цифр  $\{1,2,3,4,5\}$ , если
  - А) ни одна цифр не повторяется более одного раза 5543=300
  - В) цифры могут повторятся 5666=1080
  - С) числа должны быть нечетными 5663=540

# Задача

- **Задача 4.** На гору ведет 7 дорог. Сколько вариантов подняться и спуститься с горы?  
49
- А разными путями?  
42
- **Задача 5.** Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5, если каждую можно использовать не более одного раза  
543=60

# Вычисление числа элементов суммы множеств

- Если задано множество  $A$  и множество  $B$ , то число элементов суммы (объединения) множеств равно:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

А как будет выглядеть формула, если существует три множества  $A, B, C$ ?

Написать на доске

Закрепим эту формулу решением задачи 5

# Задача 5

- **Задача 5.** Каждый студент группы либо девушка, либо имеет светлые волосы, либо обожает дискретную математику (ДМ). В группе 20 девушек, из них 12 блондинок и одна блондинка обожает ДМ. Всего в группе 24 светловолосых студента, из них ДМ обожают 12, а всего 17 студенток и студентов обожают ДМ из них 6 студенток.
- Сколько студентов в группе?



# Решение задачи 5

- Пусть  $A$  множество студенток – 20.  
     $B$  – множество светловолосых (М и Д) – 24.  
     $C$  – множество студентов обожающих ДМ – 17.

$$N(A \cap B \cap C) \quad \text{- Это решение}$$

$A \cap B$  - множество блондинок из условия - 12

$B \cap C$  - множество всех светловолосых студентов (М и Д) - 12

$A \cap C$  - множество студенток, обожающих ДМ - 6

$A \cap B \cap C$  - Множество блондинок обожающих ДМ – 1 из условия

# Ответ задачи 5

- Подставляем числа в формулу вычисления суммы числа трех множеств:

$$\begin{aligned} N(A \sqcup B \sqcup C) &= N(A) + N(B) + N(C) - \\ &- N(A \sqcup B) - N(A \sqcup C) - N(B \sqcup C) + \\ &+ N(A \sqcup B \sqcup C) = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32 \end{aligned}$$

# Теорема о числе элементов объединения множеств

- Если  $A_1, \dots, A_n$  – некоторые множества, то число элементов объединений этих множеств равно:

$$\begin{aligned} N(A_1 \boxtimes \dots \boxtimes A_n) &= N(A_1) + \dots + N(A_n) - \\ &- \{N(A_1 \boxtimes A_2) + N(A_1 \boxtimes A_3) + \dots + N(A_{n-1} \boxtimes A_n)\} + \\ &+ \{N(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes A_3) + N(A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes A_4) + \\ &+ \dots + N(A_{n-2} \boxtimes A_{n-1} \boxtimes A_n)\} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} N(A_1 \boxtimes \dots \boxtimes A_n) \end{aligned}$$

# Продолжение теоремы

- Правая часть этого равенства является суммой  $n$  слагаемых, где  $k$  - тое по порядку слагаемое имеет вид :

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1, \dots, A_n), \text{ где}$$

$$S_k(A_1, \dots, A_n) \quad - \text{ Есть сумма чисел } N(A_{i_1} \boxtimes \dots \boxtimes A_{i_k})$$

по всем возможным перечислениям, равно  $k$  разным множеств из множеств  $A_1, \dots, A_n$ .

# Упорядоченное множество

- **Определение:** множество из которого задан порядок его элементов называется упорядоченным. Каждому элементу множества указан его порядок (место) в множестве.
- Если задано множество  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ , то  $A = \{a_2, a_1, a_3\}$  – упорядоченное множество.

# Число возможных слов длины $k$ из алфавита мощностью $n$

- Пусть задано два множества  $A$  – алфавит, и  $D$  – упорядоченное множество натуральных чисел.
- Если задать отображение  $F$  на множестве  $D$  со значениями в  $A$ , то получим, что каждому натуральному числу будет соответствовать некоторая последовательность элементов из множества  $A$  – эта структура - **СЛОВО**.
- **ТЕОРЕМА.** Число возможных слов длины  $k$  из алфавита мощностью  $n$  равно:

$$n^k$$

# Принцип математической индукции

- Пусть имеется конечное упорядоченное множество  $n$  натуральных чисел  $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ .
- Предположим, что для некоторых элементов этого множества выполняется некоторое утверждение, например:

$$2^1 \geq 1 + 1$$

$$2^2 \geq 2 + 1$$

$$2^3 \geq 3 + 1$$

ВОПРОС. Всегда ли можно считать, что это утверждение будет справедливым для всех элементов множества  $A$

$$2^k \geq k + 1$$

Ответ на это дает принцип математической индукции

# Принцип математической индукции

- 1) Если некоторое утверждение справедливо для  $k=1$ .
- 2) из справедливости утверждения для произвольного натурального  $k$ , следует его справедливость для  $k+1$ , то это утверждение справедливо для всякого натурального  $n$ .



# Пример доказательства

- При  $n = 1$  неравенство  $2^n \geq n + 1$  выполняется.
- Предположим, что выполняется неравенство
- Докажем, что справедливо неравенство

$$2^{k+1} \geq (k + 1) + 1$$

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \geq 2(k + 1) = 2k + 2 > k + 2$$

при  $k > 1$

Таким образом, оба условия математической индукции выполняются и неравенство справедливо для любого натурального  $n$ .

# Понятие собственного подмножества

- Если каждый элемент множества  $B$  принадлежит множеству  $A$ , то  $B$  подмножество множества  $A$ .  $A \supset B \dots B \subset A$
- Пусть подмножество  $\emptyset$  является подмножеством любого множества.  $\emptyset \subset A$
- Подмножество  $B$  множества  $A$  называют собственным, если

$$B \neq A \dots \text{и} \dots B \neq \emptyset$$

# Множество всех его подмножеств

- Если задано множество  $A$ , то можно рассматривать новое множество  $M(A)$  – множество всех подмножеств  $A$ , которые имеют  $k$  элементов.

$B \subset M_k(A)$ , если  $B \subset M(A)$ .. и  $N(B) = k$

# Пример множества всех ПОДМНОЖЕСТВ

- Пусть  $A = \{a, b, c\}$ , тогда
- $M(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$
- $M_2(A) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$

$$N(M(A)) = 8 = 2^3 \dots\dots N(M_2(A)) = 3$$

**ВЫВОД** - Число всех подмножеств равно  $n!$

**ВОПРОС** – сколько разных  $k$  – элементных подмножеств можно получить из множества с  $n$  - элементами

# Число сочетаний из $n$ по $k$

- **ТЕОРЕМА:** Число всех  $k$  - элементарных подмножеств множества  $A$  из  $n$  элементов равно:

$$N(M_k(A)) = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

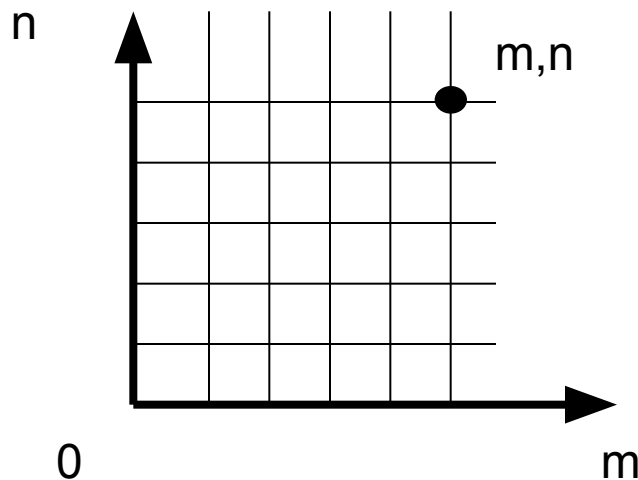
Произвольное  $k$  - элементное подмножество  $n$  - элементного множества называется сочетанием или комбинацией из  $n$  по  $k$ . Порядок элементов в подмножестве не имеет значения.

# Примеры задач

- **Задача 6.** Сколько способов выбора трех книг из пяти.
- **Задача 7.** В комиссию надо 3 человека. В группе 7 человек. Определите количество вариантов состава комиссии.
- **Задача 8.** В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый встретился один раз. Сколько сыграно партий?

# Пример графической задачи

- **Задача 9.** Задана прямоугольная сетка квадратов размерами  $m$  на  $n$ . Определите число различных вариантов путей из точки  $(0,0)$  в точку  $(m,n)$  по вертикальным и горизонтальным отрезкам.



# Теорема о сумме числа сочетаний

- Число сочетаний из  $n$  по  $k$  равно сумме числа сочетаний из  $(n-1)$  по  $k$  и числа сочетаний из  $(n-1)$  по  $(k-1)$ .

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$



# Теорема о сумме числа сочетаний

- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:
- Число кратчайших путей из точки (0,0) в точку A(k, n-k) равно:  $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$

Все такие пути можно разделить на две группы проходящие через точку A1(k-1;n-k) и точку A2(k;n-k-1), соответственно число путей проходящих Через A1 и A2:

$$C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1} \text{ // // // // // } C_{k+(n-k-1)}^k = C_{n-1}^k$$

Следовательно:  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

# Задача

- Докажите тождество

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$$

1. Множество всех кратчайших путей Из (0,0) в A(n,n)

2. Каждый такой путь проходит через Точку  $A_k$  лежащих на диагонали BD.

3. Число путей из точки 0 до  $A_k$  равно:

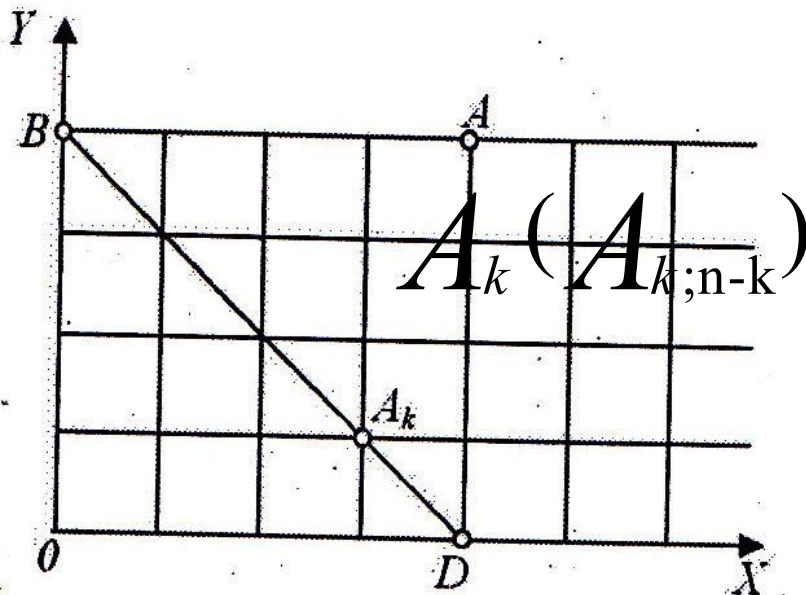
$$C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$$

4. Число путей из  $A_k$  в A равно:

$$C_{n-k+k}^k = C_n^k$$

5. Число путей из 0 в A равно:

$$C_n^k \times C_n^k = (C_n^k)^2$$



Переберем все точки k от 0 до n

# Количество подмножеств данного множества

- ВОПРОС. Сколько всего подмножеств имеет множество  $A$ , состоящее из  $n$  элементов, с учетом того, что пустое множество также включено в  $A$ .
- Число всех подмножеств из элементов  $n$  равно:

$$N(M(A)) = 2^n$$

# Следствие теоремы

- Имеет место равенство:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

Действительно, если  $k$  – число элементов подмножества множества  $n$  элементов, то сумма в левой части есть число всех подмножеств множества

# Упорядоченные множества. Перестановки и размещения

- Множество называется упорядоченным. Если каждому элементу множества противопоставлено некоторое число от 1 до  $n$ . Каждый элемент множества имеет свой номер.
- Упорядоченные множества, отличающиеся только номерами своих элементов, называются перестановками.
- ПРИМЕР. Составить все перестановки множества  $A=\{a,b,c\}$ ?

# Варианты перестановок множества

- Пусть задано множество  $A$  из  $n$  – элементов, а  $P_n$  – число перестановок.
- ТЕОРЕМА:

$$P_n = n!$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Будем последовательно выбирать элементы множества  $A$  и размещать их в определенном порядке на  $n$  местах. На первом месте может оказаться любой из  $n$ . На втором любой из  $(n-1)$  и т.д. По правилу умножения:

$$n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots \times 2 \times 1 = n!$$

# Примеры

- **Задача 11.** Сколькими способами можно поставить 4 книги на полке.
- **Задача 12.** Сколькими способами можно упорядочить множество  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  так, чтобы каждому четному элементу множества соответствовал четный номер.

# Число размещений длины $k$ из алфавита $n$

- Число размещений длины  $k$  из алфавита  $n$  определяется формулой:

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times (n - 2) \dots (n - k + 1)$$



# Схема выбора формулы

## Выбор формулы

Учитывается ли порядок размещения элементов в соединении?

ДА

НЕТ

Все элементы входят в соединение?

ДА

НЕТ

**Перестановки**  
(без повторений)

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

( $n$  – число элементов)

**Размещения**  
(без повторений)

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-(k-1)) = n! / (n-k)!$$

(выбор из  $n$  элементов по  $k$ )

**Сочетания**  
(без повторений)

$$C_n^k = n! / (k! \cdot (n-k)!)$$

(выбор из  $n$  элементов по  $k$ )

Свойства:  $C_n^n = C_n^0 = 1$   
 $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$