METODE NUMERICE – curs 9

6.3 Rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice neliniare

- Fie $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{0}_n, \quad \underline{f} : D_1 \to D_2, \quad D_1, D_2 \subseteq \Re^{n\times 1}\ (\mathbf{C}^{n\times 1})$ (1)

$$\underline{x} = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \qquad \underline{f}(\underline{x}) = [f_1(x_1,\ldots,x_n) \ \cdots \ f_n(x_1,\ldots,x_n)]^T$$

$f_i(\underline{x}), i = 1,\ldots,n$ - compunere de funcţii elementare de tip polinomial, trigonometric sau transcendent (exponenţiale, logaritmi) în argumentele $x_i, i = 1,\ldots,n$

- Fie $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n]^T, \quad \underline{f}(\underline{\alpha}) = \underline{0}_n$

- Metodele numerice pentru rezolvarea problemei (1) □ *metode iterative*

construiesc un şir de vectori convergent la soluţia $\underline{\alpha}$: $\{\underline{x}^{[k]}\}_{k\geq 0}, \ \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{[k]} = \underline{\alpha}$

- punct de start: $\underline{x}^{[0]} = [x_1^{[0]} \ \cdots \ x_n^{[0]}]^T \in V_{\underline{\alpha}} = \{\underline{x} \in D_1 \,/\, \| \underline{x} - \underline{\alpha} \|_p \leq h, h > 0\} \subset D_1$

- Uzual sistemul de ecuaţii (1) se rescrie sub forma: $\underline{x} = \underline{g}(\underline{x})$ (2)

$$\underline{x}^{[k+1]} = \underline{g}(\underline{x}^{[k]}), \ k = 0,1,\ldots, \ \underline{x}^{[0]} - \text{precizat} \qquad (3)$$

Teoremă:

Fie ecuaţia vectorială neliniară (1), *rescrisă sub forma* (2). *Se consideră* $V_{\underline{\alpha}}$ *o vecinătate a soluţiei* $\underline{\alpha}$. *Dacă funcţia* $\underline{g}$ *este o funcţie continuă pe* $V_{\underline{\alpha}}$ *, iar componentele sale,* $g_i, i = 1, \ldots, n$*, admit derivate parţiale în raport cu argumentele* $x_j, j = 1, \ldots, n$ *şi satisfac la relaţia:*

$$\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \right| \le \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda \in (0, 1), \ \forall \underline{x} \in V_{\underline{\alpha}} \qquad (4)$$

atunci:

i. *dacă* $\underline{x}^{[0]} \in V_{\underline{\alpha}}$ *, atunci şi elementele şirului* $\{\underline{x}^{[k]}\}_{k=0,1,\ldots}$ *definit de către relaţia* (3) *aparţin vecinătăţii* $V_{\underline{\alpha}}$ *;*

ii. *şirul definit de către relaţia* (3) *converge către soluţia* $\underline{\alpha}$ *pentru* $k \to \infty$.

Observaţie:

Elementele din relaţia (4) se referă la componentele matricei iacobian a funcţiei $\underline{g}$ în raport cu argumentul $\underline{x}$:

$$G(\underline{x}) = \frac{d\underline{g}(\underline{x})}{d\underline{x}} = \left[\frac{\partial g_i(\underline{x})}{\partial x_j} \right]_{1 \le i, j \le n}$$

6.3.1 Metode iterative explicite

👉 *metoda Newton* → *metodă iterativă explicită*

↓

estimaţiile la un anumit pas al iterării se obţin în mod direct, explicit, ca o funcţie de estimaţiile de la iteraţia anterioară.

- funcţia de iterare: $\underline{g}(\underline{x}) = \underline{x} - A(\underline{x}) \cdot \underline{f}(\underline{x})$

$$A(\underline{x}) = [a_{ij}(\underline{x})]_{1 \le i, j \le n}$$

- şirul (3) converge dacă $A(\underline{x})$ → nesingulară pentru $\underline{x} \in V_{\underline{\alpha}}$
- soluţia $\underline{\alpha}$ satisface condiţia de punct fix pentru funcţia $\underline{g}(\underline{x})$:

$$\underline{g}(\underline{\alpha}) = \underline{\alpha} \Rightarrow -A(\underline{\alpha}) \cdot \underline{f}(\underline{\alpha}) = \underline{0}_n \quad \Longrightarrow \quad \underline{f}(\underline{\alpha}) = \underline{0}_n \quad \Leftrightarrow \quad A(\underline{\alpha})$$ - nesingulară

- se consideră că matricea $A(\underline{x}) = A =$ constant

matricea A se alege astfel încât iacobianul funcţiei de iterare să aibă, în modul, elementele mici sau foarte mici, pe o vecinătate a soluţiei

$$G(\underline{x}) = \frac{d\underline{g}}{d\underline{x}}(\underline{x}) = I_n - A \cdot J_{\underline{f}}(\underline{x}), \quad J_{\underline{f}}(\underline{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x})\right]_{1 \le i, j \le n}$$

$$|G_{ij}(\underline{x})| \le \frac{\lambda}{n}, \quad \forall\, \underline{x} \in V_{\underline{\alpha}}, \quad G_{ij}(\underline{x}) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\underline{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{A = [J_{\underline{f}}(\underline{\alpha})]^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$G(\underline{\alpha}) = I_n - [J_{\underline{f}}(\underline{\alpha})]^{-1} \cdot J_{\underline{f}}(\underline{x}) = \mathbf{0}_{n \times n}$$

👉 $\underline{\alpha}$ nu se cunoaşte $\longrightarrow$ alegere sub-optimală a lui A

$$\boxed{\underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - [J_{\underline{f}}(\underline{x}^{[k]})]^{-1} \cdot \underline{f}(\underline{x}^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \;, \quad \underline{x}^{[0]} \in V_{\underline{\alpha}}}$$

- pentru evitarea calculului inversei matricii iacobian:

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}^{[k]}) \cdot \Delta\underline{x}^{[k]} = \underline{f}(\underline{x}^{[k]})$$

$$\underline{x}^{[k+1]} = \underline{x}^{[k]} - \Delta\underline{x}^{[k]}$$

6.3.2 Metode iterative implicite

👉 fiecare componentă $x_i^{[k+1]}$ nu se mai poate exprima în mod *explicit* în funcţie de estimaţiile de la iteraţia anterioară

$\downarrow$

legătura dintre variabile este asigurată de către funcţiile f_i

👉 ecuaţia vectorială (1) se rescrie sub forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

👉 generalizând rezultatele de la metodele iterative pentru rezolvarea sistemelor determinate de ecuaţii algebrice liniare şi în concordanţă cu teorema enunţată anterior

$\downarrow$

aceste metode converg către soluţia $\underline{\alpha}$, pentru orice $\underline{x}^{[0]} \in V_{\underline{\alpha}}$, dacă $\rho[J_{\underline{f}}(\underline{x}^{[0]})] < 1$

METODE NUMERICE – curs 9

A. Metoda Jacobi

$\underline{x}^{[k]}$ - vectorul obţinut la iteraţia [k] $\longrightarrow$ $\underline{x}^{[k]} = [x_1^{[k]} \ \cdots \ x_i^{[k]} \ \cdots \ x_n^{[k]}]^T$

$$\begin{cases} f_1(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_n^{[k]}) = 0 & \Rightarrow x_1^{[k+1]} \\ \vdots & \\ f_i(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_{i-1}^{[k]}, x_i^{[k+1]}, x_{i+1}^{[k]}, \ldots, x_n^{[k]}) = 0 & \Rightarrow x_i^{[k+1]} \\ \vdots & \\ f_n(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_i^{[k]}, \ldots, x_{n-1}^{[k]}, x_n^{[k+1]}) = 0 & \Rightarrow x_n^{[k+1]} \end{cases}$$

la fiecare iteraţie se rezolvă *n* ecuaţii neliniare (*vezi subcapitolul 6.2*)

B. Metoda Gauss-Seidel

- se aplică acelaşi principiu de la metoda Jacobi

$$\begin{cases} f_1(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k]}, \ldots, x_n^{[k]}) = 0 & \Rightarrow x_1^{[k+1]} \\ \vdots & \\ f_i(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}, \ldots, x_{i-1}^{[k+1]}, x_i^{[k+1]}, x_{i+1}^{[k]}, \ldots, x_n^{[k]}) = 0 & \Rightarrow x_i^{[k+1]} \\ \vdots & \\ f_n(x_1^{[k+1]}, x_2^{[k+1]}, \ldots, x_i^{[k+1]}, \ldots, x_{n-1}^{[k+1]}, x_n^{[k+1]}) = 0 & \Rightarrow x_n^{[k+1]} \end{cases}$$

se folosesc succesiv componentele determinate ale estimaţiei de la iteraţia curentă

6.4 Rezolvarea ecuaţiilor polinomiale

- ecuaţii neliniare des întâlnite în practică $\longrightarrow$ <u>ecuaţiile polinomiale</u>

$$P_n(x) = 0, \quad P_n(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot x + a_n$$
$$a_i \in \Re, \; i = 0, \dots, n, \; a_0 \neq 0$$

- <u>Dezavantajul</u> aplicării metodelor generale pentru rezolvarea ecuaţiilor polinomiale:
  - *necesitatea localizării intervalelor unde ecuaţia are soluţii* $\longrightarrow$ s-au dezvoltat procedee de separare a rădăcinilor unui polinom $\longrightarrow$ ineficiente computaţional
  - în scopul *determinării soluţiilor complexe* $\longrightarrow$ metodele generale trebuie reformulate pentru mulţimea numerelor complexe

A. Metode de determinare succesivă a zerourilor unui polinom

<u>Principiul</u>: de a *pune în evidenţă divizori de grad întâi sau doi ai polinomului*

$\downarrow$

divizorii sunt separaţi succesiv, în urma unui proces iterativ

- metoda Bairstow $\longrightarrow$ separarea divizorilor de grad doi

- divizorul de gradul doi: $T_2(x) = x^2 + p \cdot x + q,\ \ p, q \in \Re$

$$P_n(x) = T_2(x) \cdot Q_{n-2}(x) + R \cdot x + S$$

$$Q_{n-2}(x) = b_0 \cdot x^{n-2} + b_1 \cdot x^{n-3} + \cdots + b_{n-3} \cdot x + b_{n-2}$$

- în general, coeficienţii R şi S sunt funcţii neliniare în argumentele p şi q:

$$R = R(p, q)$$

$$S = S(p, q)$$

- pentru ca $T_2(x)$ - divizor $\Rightarrow$ $\begin{cases} R(p,q) = 0 \\ S(p,q) = 0 \end{cases}$ (5)

👉 aplicarea metodei implică parcurgerea unui algoritm care trebuie să combine:

- rezolvarea sistemului de ecuaţii neliniare de ordinul doi din relaţ(5) $Q_{n-2}(x)$
- determinarea coeficienţilor polinomului cât,

METODE NUMERICE – curs 9

Algoritmul Bairstow

$$P_n(x) = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot (b_0 \cdot x^{n-2} + \dots + b_{n-3} \cdot x + b_{n-2}) + R \cdot x + S \qquad (6)$$

- notaţii:

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}; \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} R(p,q) \\ S(p,q) \end{bmatrix}; \quad J_{\underline{f}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial p}(p,q) & \frac{\partial R}{\partial q}(p,q) \\ \frac{\partial S}{\partial p}(p,q) & \frac{\partial S}{\partial q}(p,q) \end{bmatrix}$$

- Rezolvarea sistemului (5) $\longrightarrow$ metoda Newton: $[J_{\underline{f}}(\underline{z}^{[i-1]})] \cdot \Delta\underline{z}^{[i-1]} = \underline{f}(\underline{z}^{[i-1]})$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & \frac{\partial R}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \\ \frac{\partial S}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & \frac{\partial S}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta p^{[i-1]} \\ \Delta q^{[i-1]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \\ S(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} p^{[i]} = p^{[i-1]} - \Delta p^{[i-1]} \\ q^{[i]} = q^{[i-1]} - \Delta q^{[i-1]} \end{cases}$$

- uzual $p^{[0]} = 0, q^{[0]} = 0$

👉 calculele implicate de rezolvarea sistemului determinat de ecuaţii neliniare (7):

$$\delta^{[i]} = \det[J_{\underline{f}}(\underline{z}^{[i-1]})] = \frac{\partial R}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \cdot \frac{\partial S}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) - \\ - \frac{\partial R}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \cdot \frac{\partial S}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \quad \text{(7a)}$$

$$P^{[i]} = \begin{vmatrix} R(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & \frac{\partial R}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \\ S(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & \frac{\partial S}{\partial q}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \end{vmatrix}; \qquad Q^{[i]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial R}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & R(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \\ \frac{\partial S}{\partial p}(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) & S(p^{[i-1]}, q^{[i-1]}) \end{vmatrix}; \quad \text{(7b)}$$

$$\Delta p^{[i-1]} = \frac{P^{[i]}}{\delta^{[i]}}; \quad \Delta q^{[i-1]} = \frac{Q^{[i]}}{\delta^{[i]}}, \quad \delta^{[i]} \neq 0 \quad \text{(7c)}$$

- condiţia de stop pentru metoda Newton, considerând precizia impusă ε:

$$|\Delta p^{[i-1]} + \Delta q^{[i-1]}| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |(P^{[i]} + Q^{[i]}) / \delta^{[i]}| \leq \varepsilon \quad \text{(8)}$$

👉 Calculul derivatelor funcţiilor R şi S

- din (6) rezultă relaţiile de recurenţă: $\boxed{b_k = a_k - p \cdot b_{k-1} - q \cdot b_{k-2}}$ $\quad k = 0,1,\dots,n-2$ (9)

$$b_{-1} = b_{-2} = 0$$

$$b_{n-1} = R, \quad b_n + p \cdot b_{n-1} = S \quad \longleftarrow$$ notaţii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial p} = \dfrac{\partial b_{n-1}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial R}{\partial q} = \dfrac{\partial b_{n-1}}{\partial q} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial p} = \dfrac{\partial}{\partial p}(b_n + p \cdot b_{n-1}) = \dfrac{\partial b_n}{\partial p} + b_{n-1} + p \cdot \dfrac{\partial b_{n-1}}{\partial p} \\ \dfrac{\partial S}{\partial q} = \dfrac{\partial}{\partial q}(b_n + p \cdot b_{n-1}) = \dfrac{\partial b_n}{\partial q} + p \cdot \dfrac{\partial b_{n-1}}{\partial q} \end{cases} \qquad (10)$$

- notaţii: $$\begin{cases} \dfrac{\partial b_k}{\partial p} = -c_{k-1}, & k = 1,\dots,n \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial q} = -d_{k-2}, & k = 2,\dots,n \end{cases}$$

- derivare în raport cu p: $\boxed{c_k = b_k - p \cdot c_{k-1} - q \cdot c_{k-2}, \quad k = 0,\dots,n-1, \quad c_{-2} = c_{-1} = 0}$ (11)

- derivare în raport cu q: $\boxed{d_k = b_k - p \cdot d_{k-1} - q \cdot d_{k-2}, \quad k = 0,\dots,n-2, \quad d_{-2} = d_{-1} = 0}$ (12)

- din relaţiile (11) şi (12) se observă că :

(11), (12)

$$d_k = c_k \quad \text{pentru} \quad k = 0,\ldots,n-2$$

$$b_k = c_k + p \cdot c_{k-1} + q \cdot c_{k-2}, \quad k = 0,\ldots,n-2, \quad c_{-2} = c_{-1} = 0$$

(10), (11), (12)

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial R}{\partial p} = -c_{n-2}, \quad \frac{\partial R}{\partial q} = -c_{n-3}, \\ &\frac{\partial S}{\partial p} = -c_{n-1} + b_{n-1} - p \cdot c_{n-2}, \quad \frac{\partial S}{\partial q} = -c_{n-2} - p \cdot c_{n-3} \end{aligned}} \qquad (13)$$

👉 <u>Algoritm (schiţă)</u>:

* iniţializare p, q
* calcul coeficienţi c_k, d_k (relaţiile (11) şi (12))
* rezolvare sistem (7) ⇒ noi valori pentru p, q (relaţiile (7a), (7b) şi (7c))
* calcul coeficenti b_k (relaţia (9))
* verificare conditie stop (relaţia (8))

METODE NUMERICE – curs 9

B. Metode de determinare simultană a zerourilor unui polinom

- ecuaţia: $P_n(x)=0, \quad P_n(x)=a_0\cdot x^n + a_1\cdot x^{n-1} + \dots + a_{n-1}\cdot x + a_n$

$a_i \in \Re, \ i=0,\dots,n, \ a_0 \neq 0$

se transformă astfel încât *polinomul* din membrul stâng să fie *monic* ($a_0=1$)

$$Q_n(x)=0, \quad Q_n(x)=x^n + \alpha_1\cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\cdot x + \alpha_n,$$

$$\alpha_i = a_i / a_0, i=1,\dots,n.$$

- polinomului $Q_n(x)$ i *se asociază o matrice A, astfel încât:* $\det(\lambda\cdot I_n - A)\equiv Q_n(\lambda)$

valorile proprii ale lui A vor fi chiar rădăcinile polinomului $Q_n(x)$

- o modalitate uzuală de construire a matricei A $\longrightarrow$ *matrice de tip Frobenius*

$$F=[f_{ij}]_{1\le i,j\le n}, \quad f_{ij}=\begin{cases} 0, & i=1,\dots,n-1, \ j=1,\dots n, \ j\neq i+1 \\ 1, & i=1,\dots,n-1, \ j=i+1 \\ -\alpha_{n-j+1}, & i=n, \ j=1,\dots,n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-3} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det(\lambda\cdot I_n - F) = x^n + \alpha_1\cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}\cdot x + \alpha_n}$$

dacă α_i, i = 1, ..., n sunt coeficienţii lui $Q_n(x)$, atunci A = F

Cap. 7 Aproximarea numerică a funcţiilor

7.1 Formularea problemei

- fie funcţia $f:[a,b]\rightarrow\Re,\ a,b\in\Re$

- problema de calcul $\rightarrow$ evalurea, în orice punct $x^{*}\in[a,b]$ a următoarelor:

$$f(x^{*}), f'(x^{*}), f''(x^{*}), \ldots, \int_{c}^{d} f(x)\cdot dx,\ a\le c<d\le b$$

- pot exista următoarele situaţii:

✔ *funcţia* f *este cunoscută analitic* prin una sau mai multe expresii, în general complicate sau dificil de evaluat, derivat sau integrat

✔ *funcţia* f *nu este cunoscută analitic*, ci printr-un şir de valori:

$$\{x_i, f(x_i)\}_{i=0,\ldots,n}$$

$$\{x_i\}_{i=0,\ldots,n},\ x_i\in[a,b],\ i=0,\ldots,n \qquad \Delta_{[a,b]}: a\le x_0<\ldots<x_i<\ldots<x_n\le b$$

divizare a intervalului [a, b]

METODE NUMERICE – curs 9

👉 rezolvarea problemei $\longrightarrow$ găsirea unei funcţii cu o expresie în general simplă, uşor de evaluat, derivat sau integrat, care să aproximeze cât mai bine pe f

$$\forall x^* \in [a, b],\ F(x^*) \cong f(x^*)$$

👉 construirea funcţiei aproximante, F $\longrightarrow$ utilizarea unei mulţimi de funcţii elementare:

$$M = \{\varphi / \varphi : [a, b] \to \Re\}$$

$$\downarrow$$

__bază de funcţii de aproximare__ liniar independente

$$\downarrow$$

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots,\ \sum_k c_k \cdot \varphi_k(x) = 0 \Leftrightarrow c_k = 0, \forall x \in [a, b]$$

$$\downarrow$$

$$F(x) = F_m(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + \ldots + c_m \cdot \varphi_m(x)$$

__polinom generalizat__

<u>Exemplu</u>:

- $\varphi_k(x): 1, x, x^2, \ldots, x^m \longrightarrow F(x) = P_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_m \cdot x^m$

$\Downarrow$

<u>aproximare cu polinoame algebrice</u>

- $\varphi_k(x): 1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(m \cdot x), \sin(m \cdot x)$

$\downarrow$

$$F(x) = T_m(x) = a_0 + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + \ldots + a_m \cdot \cos(m \cdot x) + b_m \cdot \sin(m \cdot x)$$

$\Downarrow$

<u>aproximare cu polinoame trigonometrice</u>

👉 indiferent de abordare, rezolvarea problemei necesită răspuns la următoarele chestiuni:

- ✔ determinarea setului de funcţii $\{\varphi_k(x)\}_{k=0,1,\ldots}$
- ✔ determinarea numărului necesar de funcţii $m+1$
- ✔ determinarea coeficienţilor polinomului generalizat $\{c_k\}_{k=0,1,\ldots,m}$