

# 7. Поверхности

## Образование. Определитель. Классификация

Поверхность на чертеже может быть задана **каркасом** - упорядоченным множеством точек или линий, принадлежащих поверхности. Каркасы подразделяют на **точечные** и **линейные** (рис.7.1).

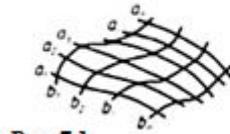


Рис. 7.1

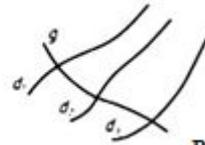


Рис. 7.2

$g$  – образующая поверхности;  
 $d$  – направляющая поверхности

В математике под поверхностью подразумевается непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая в декартовой системе координат уравнением вида  $F(x,y,z)=0$ , где  $F(x,y,z)$  - многочлен  $n$ -й степени, или в форме какой-либо трансцендентной функции. В первом случае поверхности называют алгебраическими, во втором - трансцендентными.

Поверхность с позиции кинематического способа ее образования рассматривают как множество всех положений движущейся линии (или поверхности).

Кинематический способ образования поверхности подводит к понятию **определителя**, под которым подразумевают необходимую и достаточную совокупность геометрических фигур и связей между ними, которые однозначно определяют поверхность. В число условий, входящих в состав определителя, должны быть включены:

1 - перечень геом. фигур, участвующих в образовании поверхности - геометрическая часть определителя;

2 - алгоритмическая часть, указывающая на взаимосвязь между этими фигурами:

$$\Phi(\Gamma); [A]$$

# Поверхности линейчатые

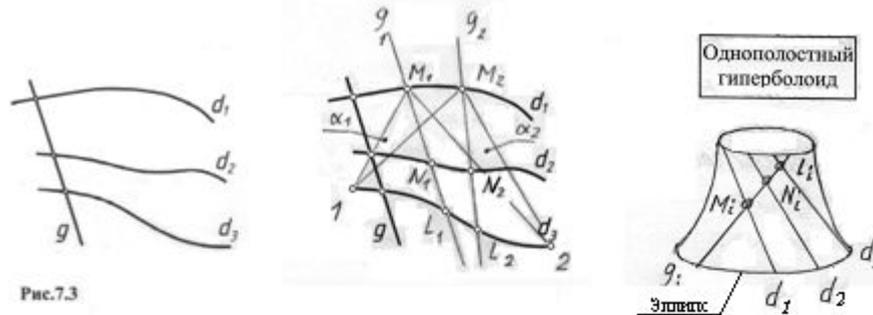


Рис.7.3

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями. Действительно, пусть даны три пространственные кривые линии  $d_1$ ,  $d_2$  и  $d_3$  (рис.7.3). Возьмем на кривой  $d_1$  произвольную точку  $M$  и примем её за вершину конической поверхности, а за направляющую этой поверхности примем дугу кривой  $d_3$ . Если  $N$  - точка пересечения дуги кривой  $d_2$  с конической поверхностью, то  $MN$  пересечет дугу кривой  $d_3$  в точке  $L$ . То, что  $MN$  обязательно пересечет дугу кривой  $d_3$ , не вызывает сомнения, так как  $MN$  и кривая  $d_3$  принадлежат одной и той же поверхности.



## Линейчатые поверхности с двумя направляющими

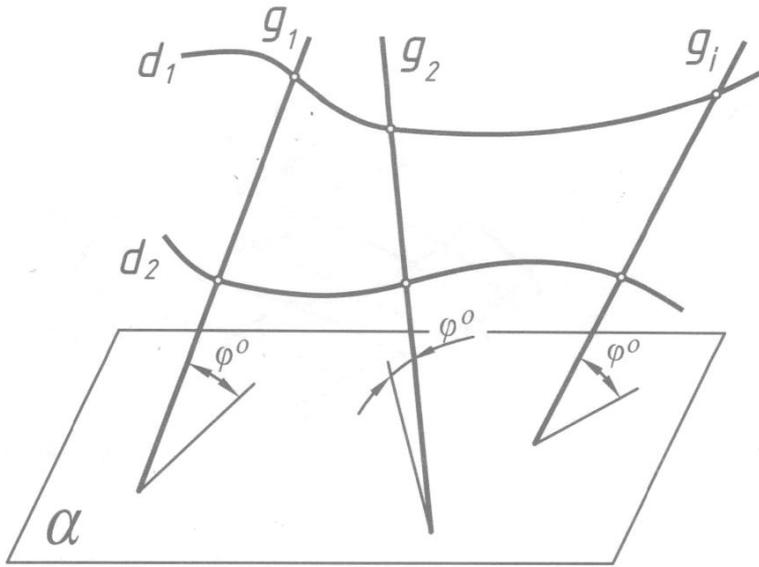


Рис.7.4

Эти поверхности названы по имени бельгийского математика Шарля Эжена Каталана, исследовавшего их. (1814-1894)

Определитель для группы пов-ей Каталана имеет вид:

$$\Phi(\bar{g}; \tilde{d}_1; \tilde{d}_2; \alpha); [g_j \cap \{\tilde{d}_1, \tilde{d}_2\} \neq \emptyset \\ (\bar{g}_j \hat{\alpha} = \sigma^0)]$$

$\alpha$  - плоскость параллелизма

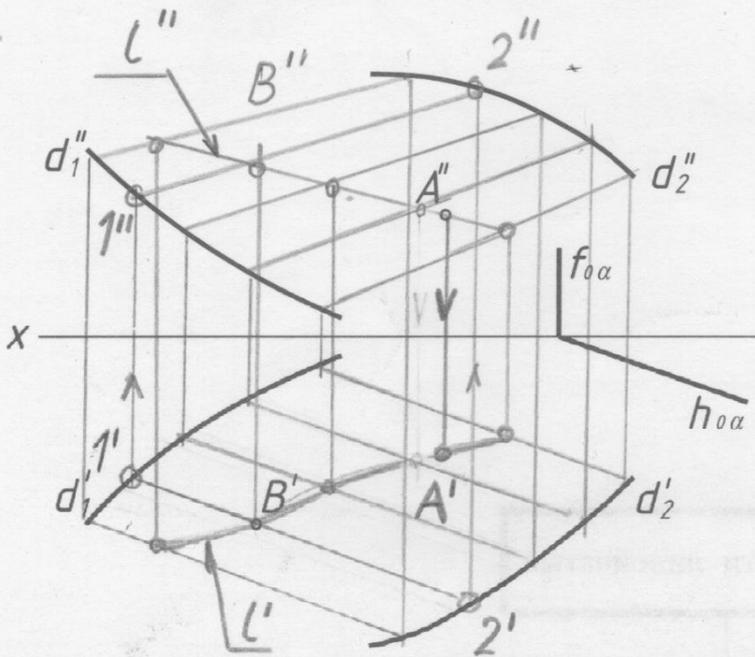


Рис.7.5

Для задания поверхности каталана достаточно указать проекции направляющих  $d_1$  и  $d_2$  и положение плоскости параллельная  $\alpha$ .

На рис. 7.5 приведен ортот. черт. тех цилиндрида:  $d_1$  и  $d_2$  - кривые линии. У прямого цилиндрида  $d_1$  или  $d_2$  принадлежат плоскости, перпендикулярной плоскости параллельная  $\alpha$ .

Прямой цилиндрида ип-ся при изготовлении воздухопроводов большого диаметра.

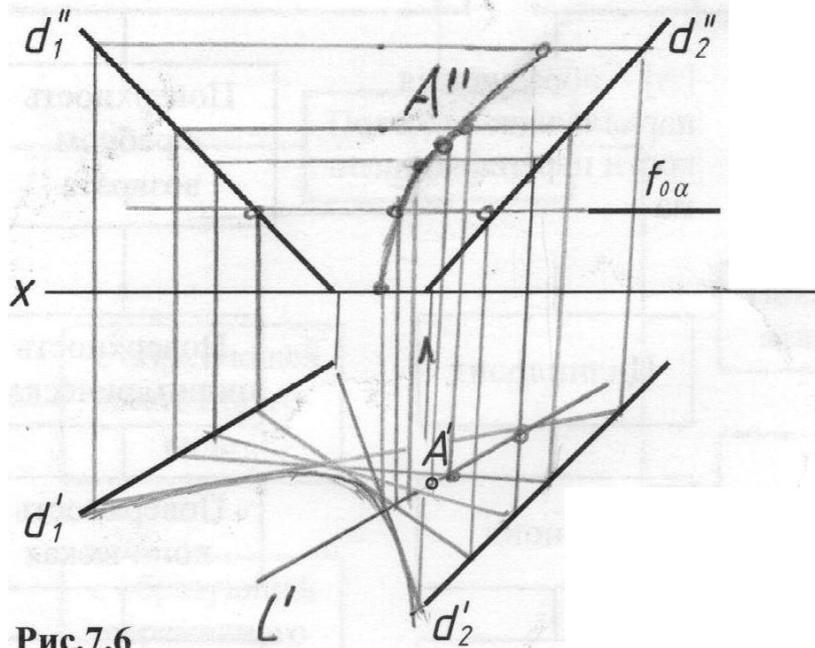
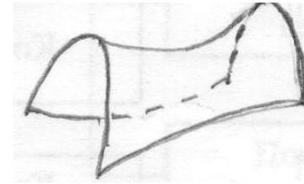


Рис.7.6

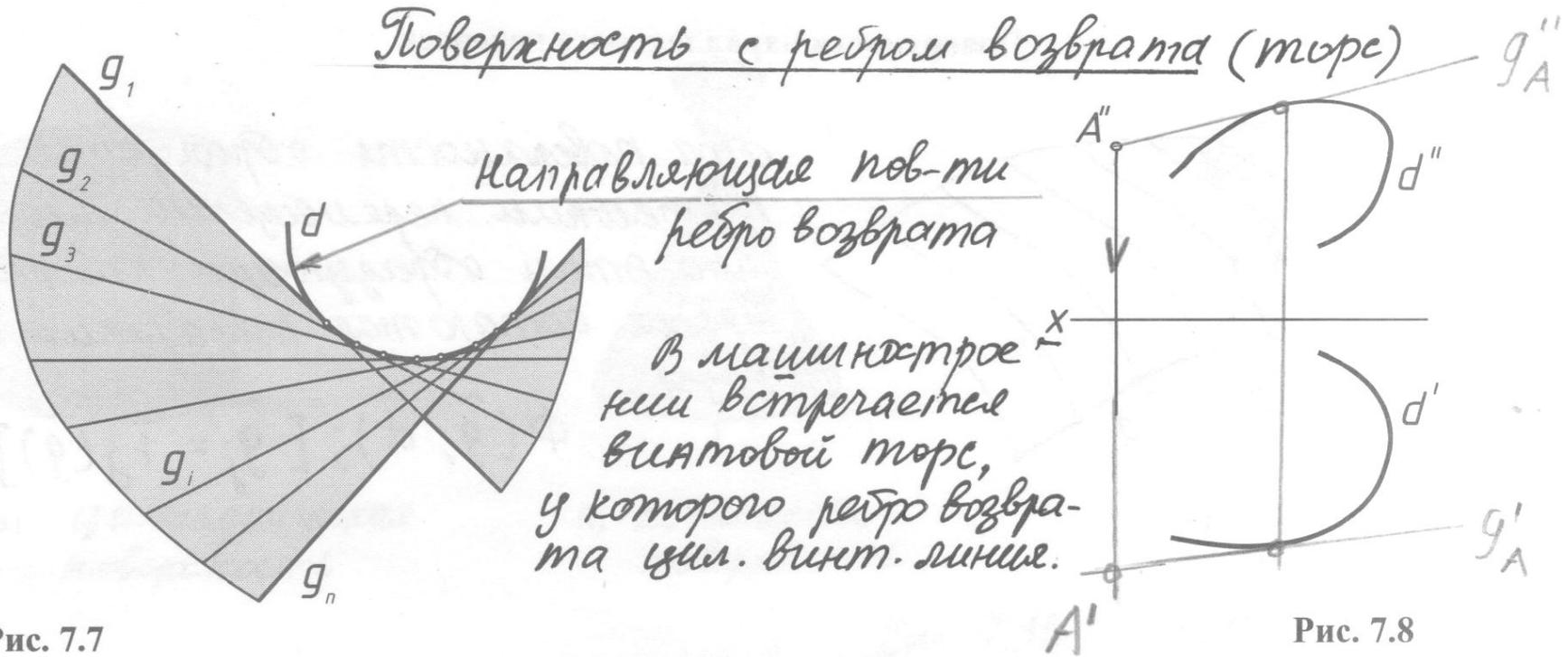


На рис. 7.6. приведен ортог. чертёж гиперболического параболоида.

По двум скрещивающимся направляющим (прямым линиям) скользит прямая образующая.

В инженерной практике эта поверхность часто называется косая плоскость (шпал). Используется в инженерно-строительной практике для формирования поверхностей откосов насыпей железных и автомобильных дорог и др.

# Линейчатые поверхности с одной направляющей



Цилиндрическая поверхность (рис. 7.9)

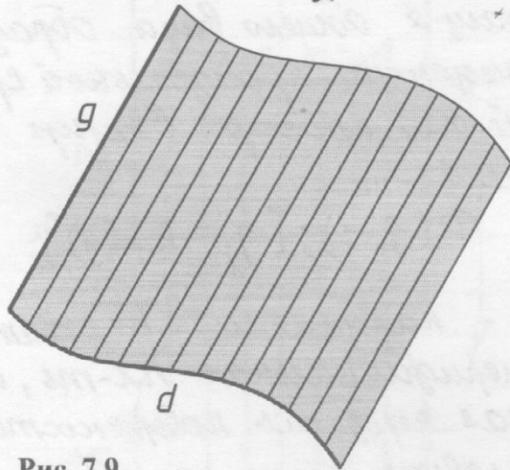


Рис. 7.9

Коническая поверхность (рис. 7.10)

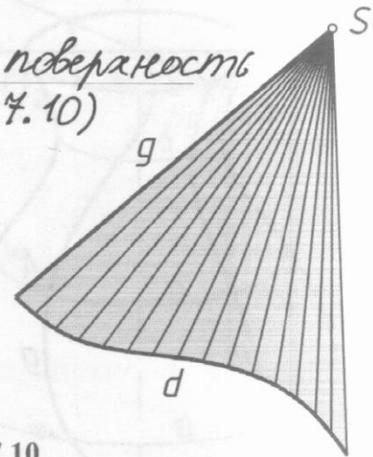


Рис. 7.10

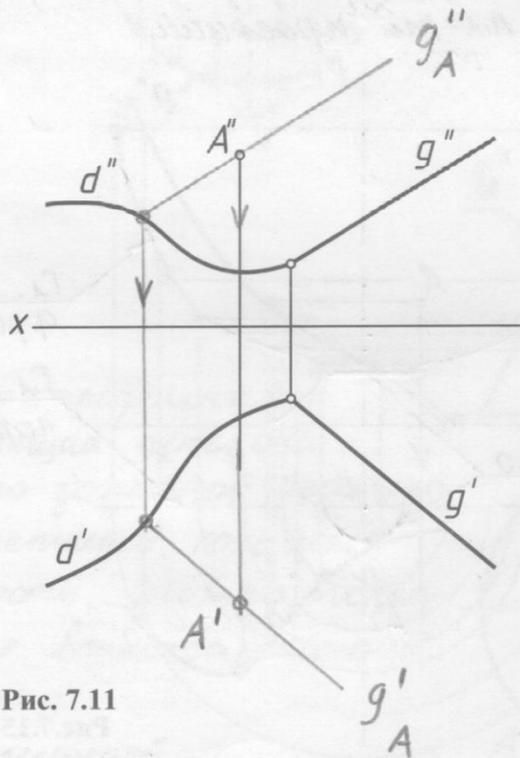


Рис. 7.11

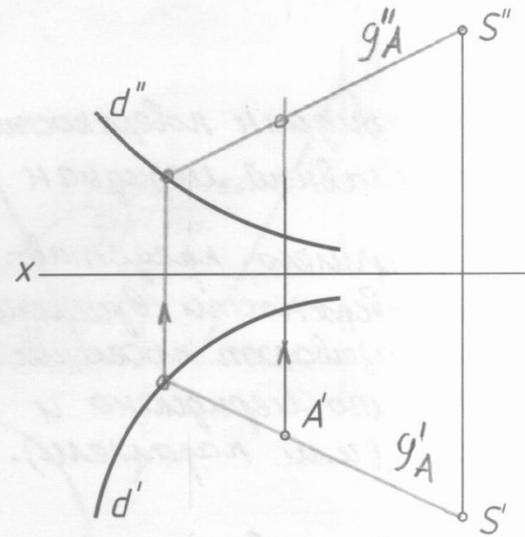
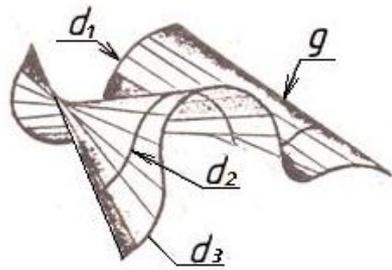


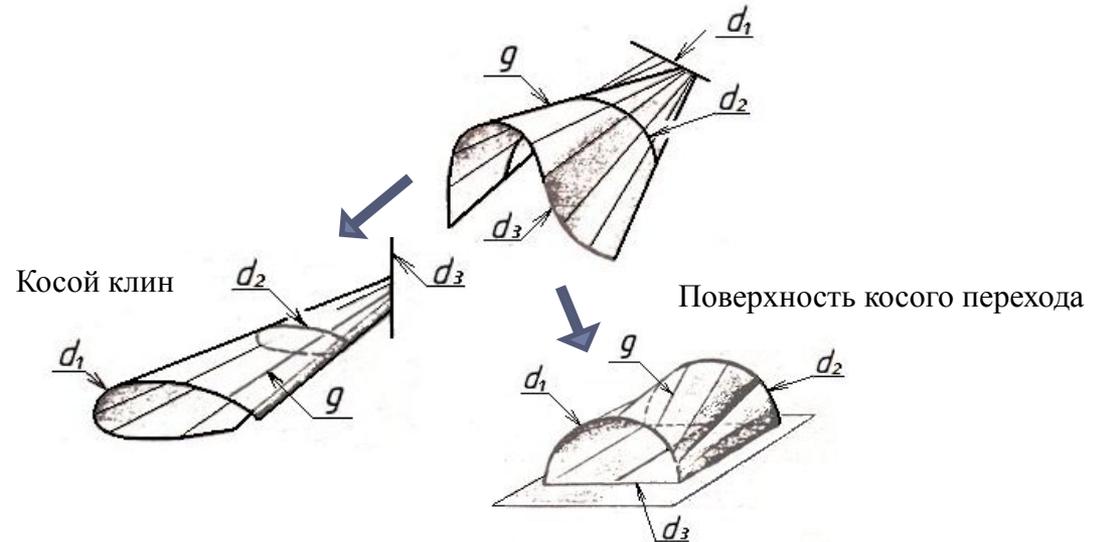
Рис. 7.12

# Поверхности линейчатые с тремя направляющими

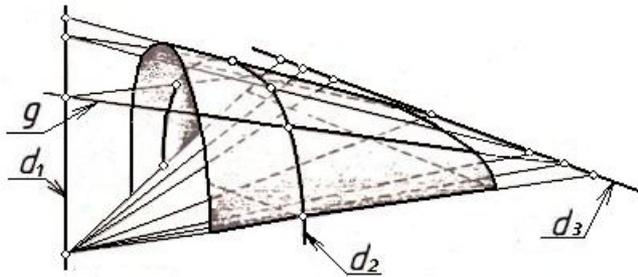
Косой цилиндр



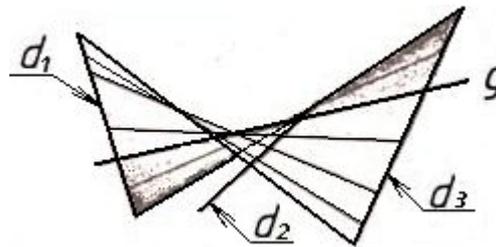
Дважды косой цилиндрикоид



Дважды косой коноид

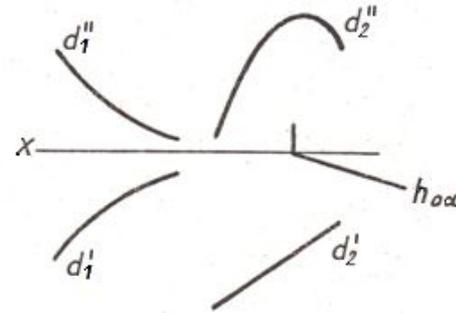
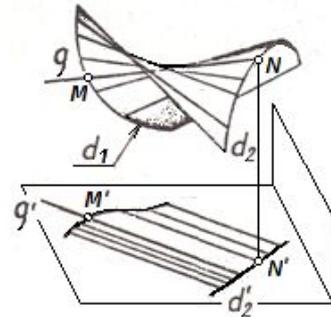


Однополостный гиперболоид

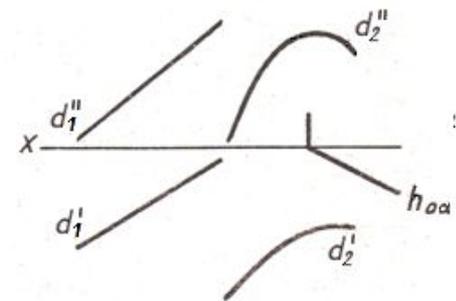
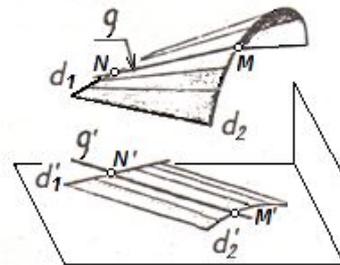


# Поверхности линейчатые с двумя направляющими и плоскостью параллелизма

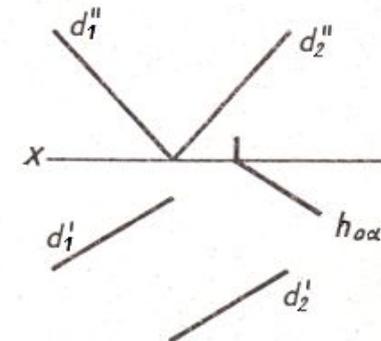
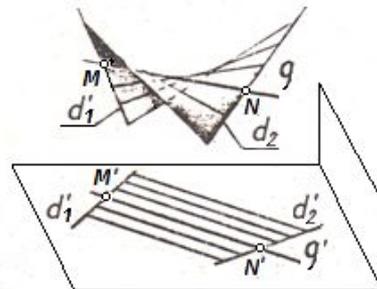
Цилиндроид



Коноид



Гиперболический параболоид



Поверхности параллельного переноса

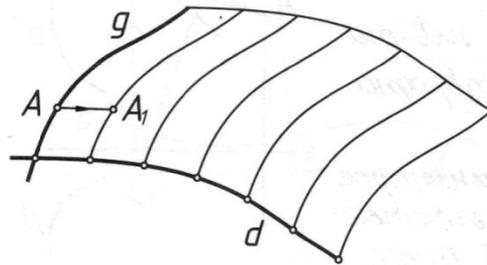


Рис.7.13

Эта поверхность образуется при поступательном перемещении плоской линии, при этом образующие поверхности все время остаются параллельными между собой.

$$\Phi(\tilde{g}; \tilde{d}); [\tilde{g}_j = T_d(\tilde{g})]$$

Поверхности вращения

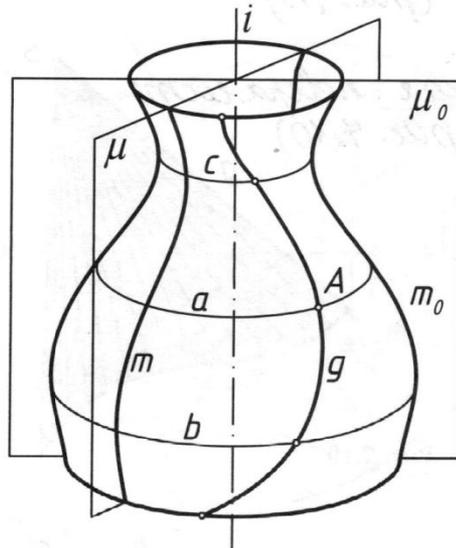


Рис.7.14

Пов. вращения общего вида образуется при вращении произвольной кривой (плоской или пространственной) вокруг неподвижной оси  $i$ .

$$\Phi(g, i); [g_j = R_i(g)]$$

$a, b, c$  - параллели.  $b$  - экватор;  $c$  - горло.  $\mu$  - меридиональная пл-ть, проходящая через ось поверхности.

$\mu_0$  - главная мерид. пл-ть, параллельная пл-ти проекций.

$m$  - меридиан поверхности;  
 $m_0$  - главный меридиан

Для лучшего представления поверхности вращения обычно указывают проекции оси, главного меридиана и экватора (или параллели).

### Очерк поверхности

У поверхности вращения (рис. 7.15) очерк на фронтальной  $m$ -ти проекции - главный меридиан.

В общем случае очерк поверхности является след проектирующей цилиндрической поверхности, огибающей проекции заданной поверхности.

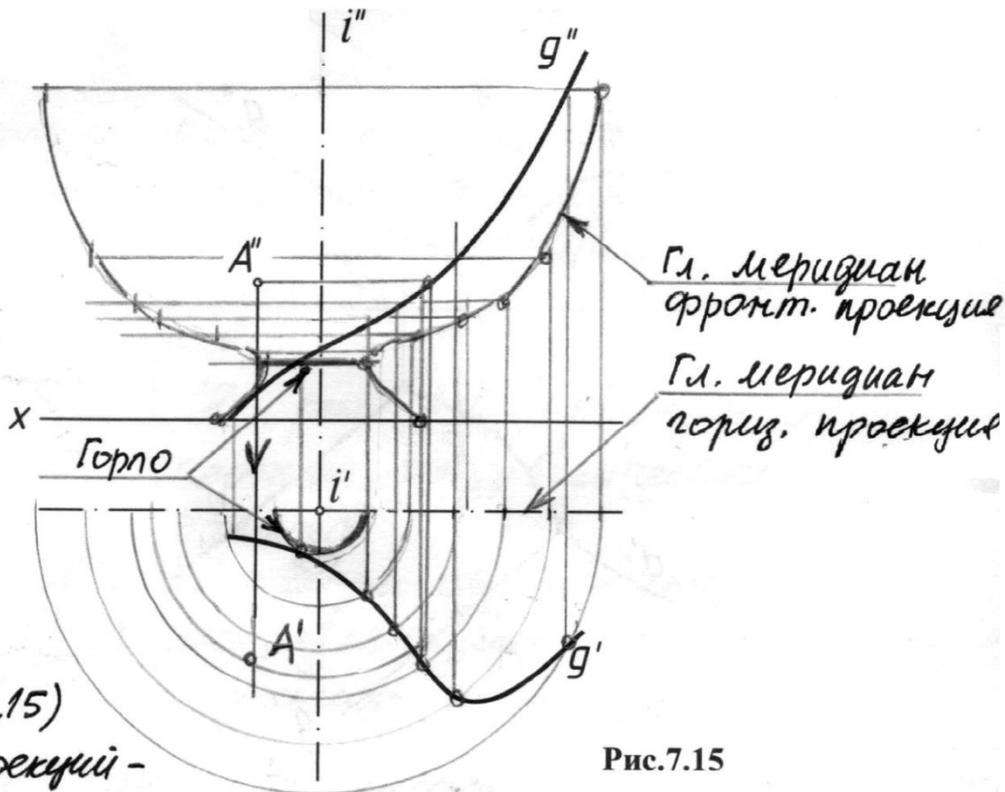
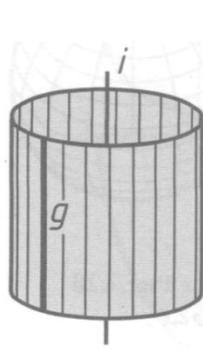


Рис. 7.15

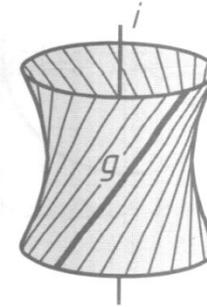
# Поверхности вращения с прямолинейной образующей



а) цилиндрическая поверхность

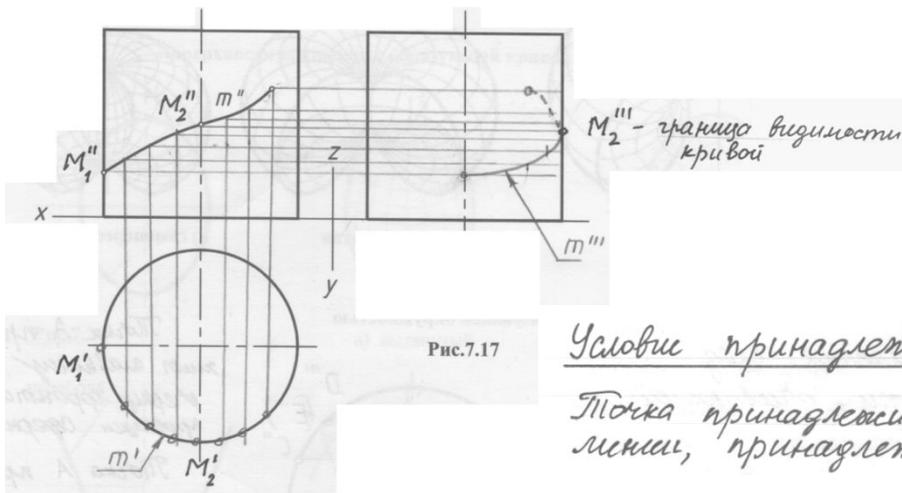


б) коническая поверхность



в) однополостный гиперболический вращатель (знаменитая Шуховская башня)

Рис. 7.16



Условия принадлежности точки поверхности

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит линии, принадлежащей поверхности.

Для отрисовки недостающих проекций точки по заданной проекции, принадлежащей конической поверхности, можно воспользоваться вспомогательными линиями:

- образующей  $g$   
или

- параллелью, радиус

которой равен на фронтальной

пл-ти проекции (рис. 7.18) расстоянию от оси  $g_0$  отсчета на  $xy$  плоскости, проходящей через фр. проекцию проекцию точки.

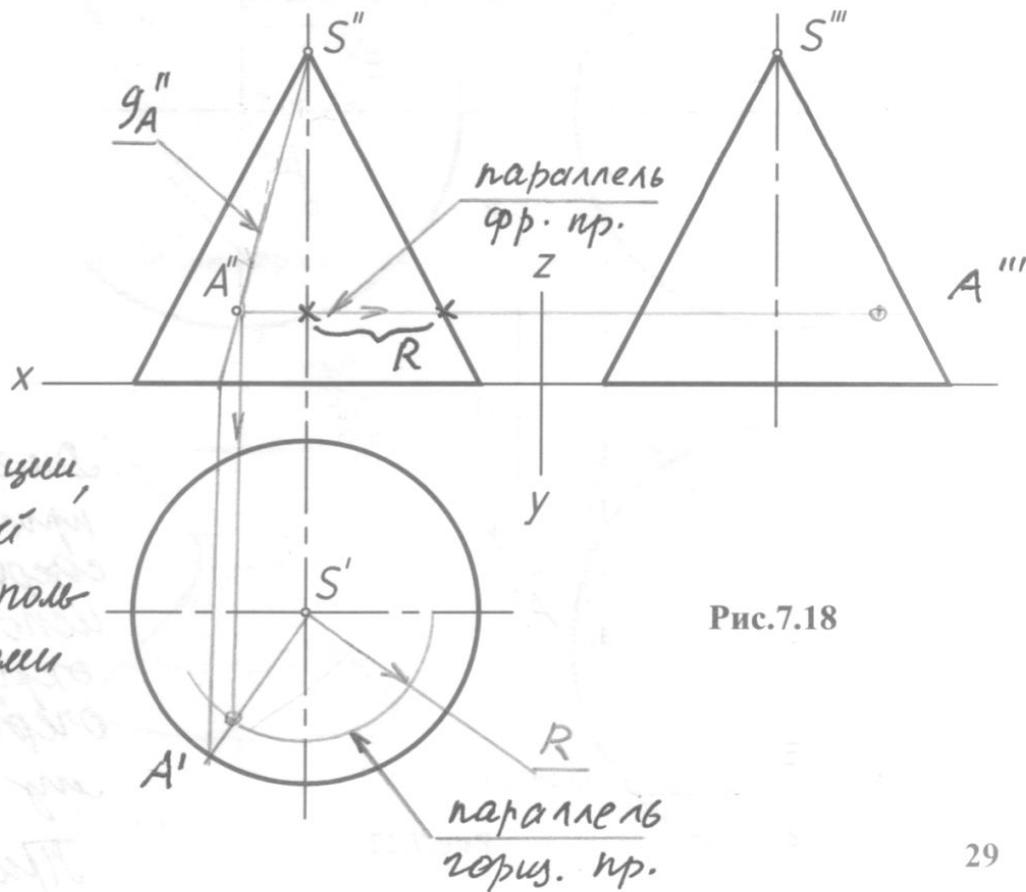


Рис.7.18

Поверхности вращения с образующей окружностью

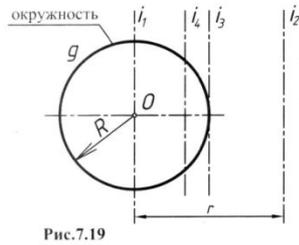


Рис.7.19

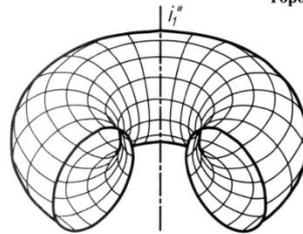
В зависимости от соотношения величины  $R$  - радиуса образующей окружности и расстояния от центра окружности до оси вращения поверхности тора подразделяют на следующие: открытую, закрытую, самопересекающуюся.

Сфера  $r=0$

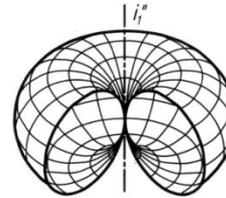


Рис.7.20

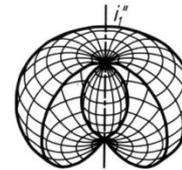
Торовые (кольцевые) поверхности



а) открытая



б) закрытая



в) самопересекающаяся

Рис.7.21

Поверхности вращения с образующей окружностью

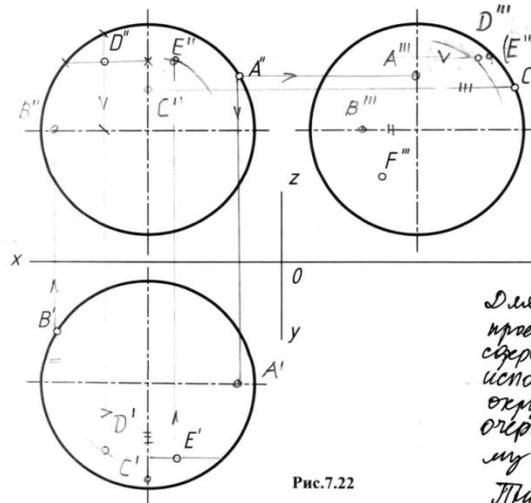


Рис.7.22

Точка А принадлежит главной меридиану - очерку фронтальной проекции сферы.

Точка принадлежит профильному меридиану - очерку профильной проекции сферы.

Точка В принадлежит экватору - очерку горизонтальной проекции сферы.

Для построения недостающих проекций точки, принадлежащей сфере, в обычной случае следует использовать вспомогательные окружности, параллельные очерковым: главной, профильной меридианам и экватору.

Прием, по данной проекции точки две другие проекции можно определить независимо друг от друга.

Поверхности вращения с образующей окружностью

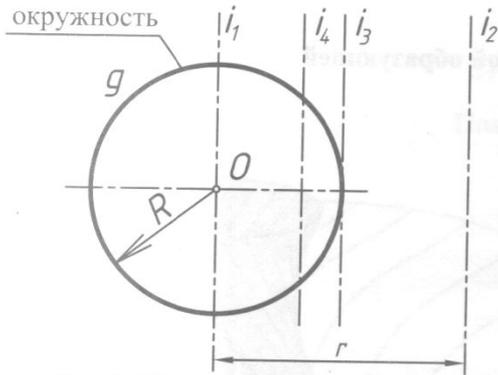


Рис.7.19

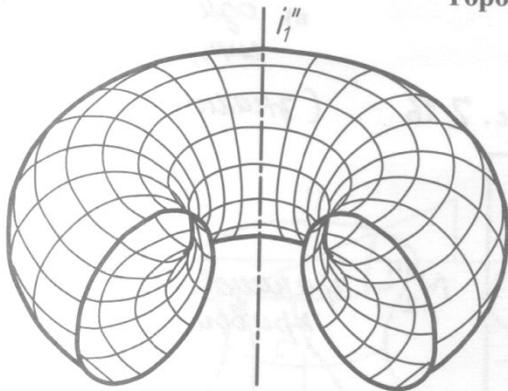
В зависимости от соотношения величины  $R$  - радиуса образующей окр-ти и расстояния от центра окр-ти до оси вращения поверхности тора подразделяют на следующие: открытую, закрытую, самопересекающуюся.

Сфера  $r=0$

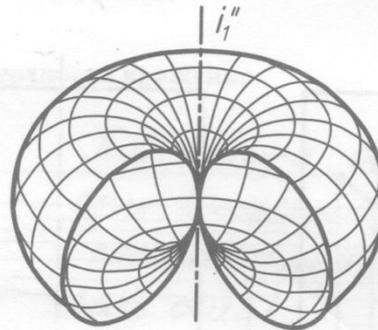


Рис.7.20

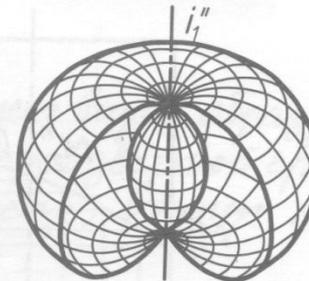
Торовые (кольцевые) поверхности



а) открытая



б) закрытая



в) самопересекающаяся

Рис.7.21

Поверхности вращения с образующей окружностью

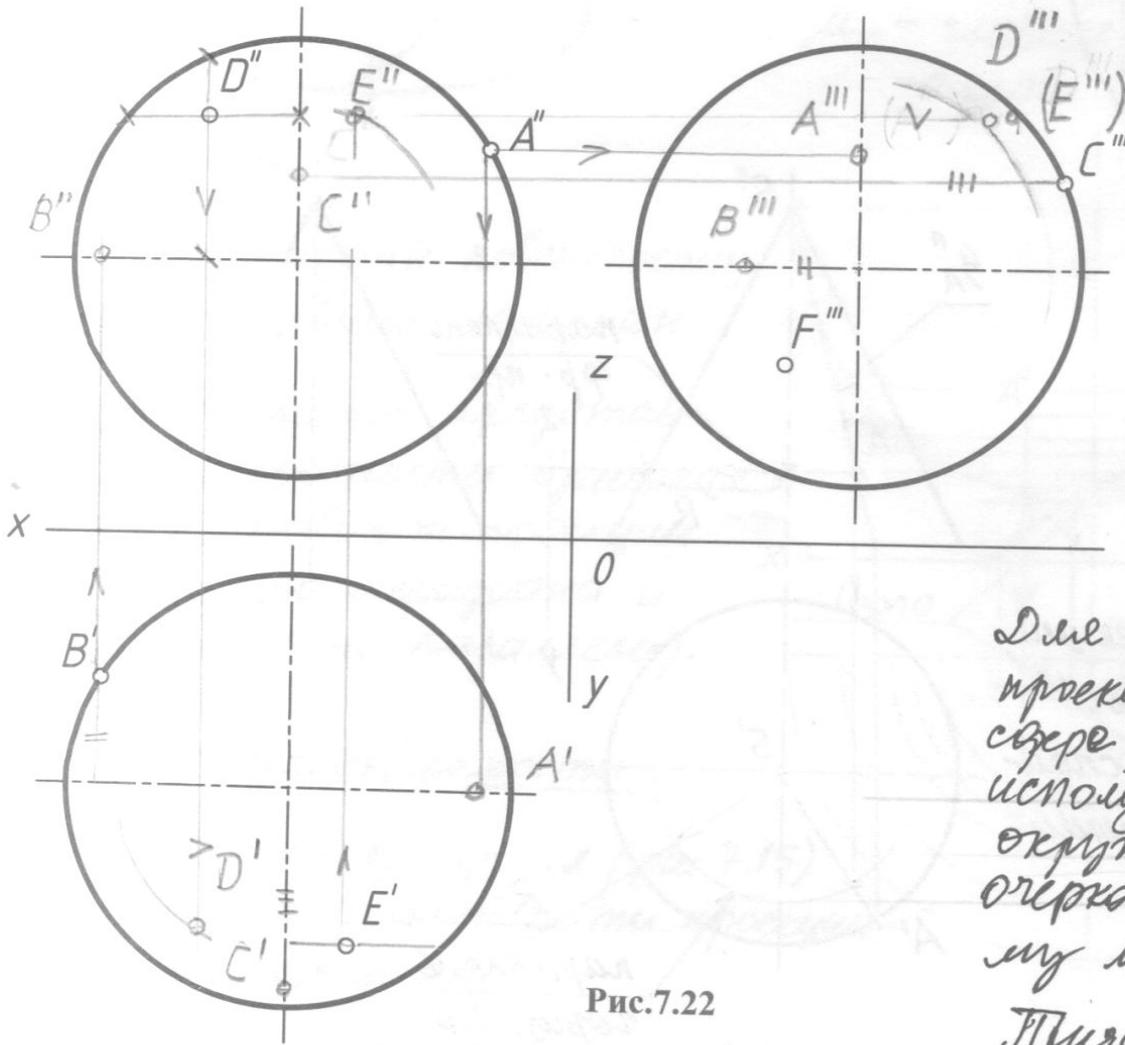


Рис.7.22

Точка А принадлежит главному меридиану - очерку фронтальной проекции сферы.

Точка принадлежит профильному меридиану - очерку профильной проекции сферы.

Точка В принадлежит экватору - очерку горизонтальной проекции сферы.

Для построения недостающих проекций точки, принадлежащей сфере, в общем случае следует использовать вспомогательные окружности, параллельные очерковым: главному, профильному меридианам и экватору.

Причем, по данной проекции точки две другие проекции<sup>30</sup> можно определить независимо



Рис. 7.23

Поверхности вращения с образующей кривой второго порядка

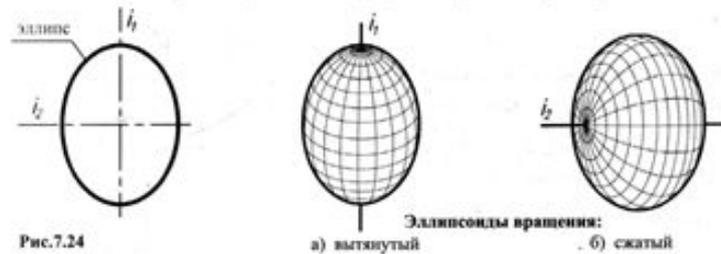


Рис. 7.24

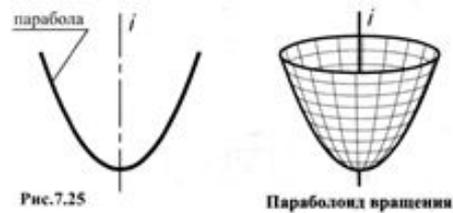


Рис. 7.25

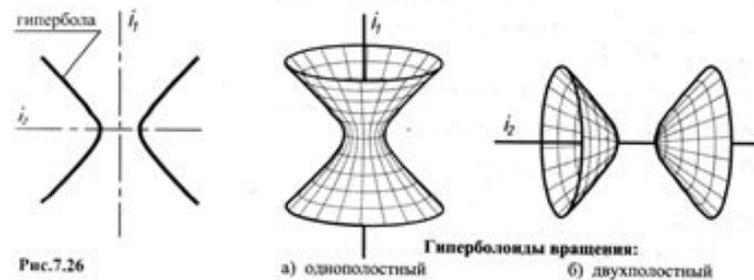
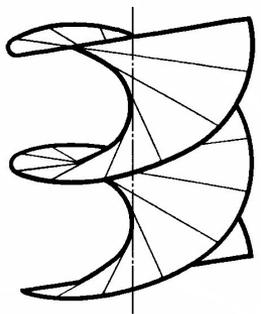


Рис. 7.26

# Винтовые поверхности



Линейчатая винтовая поверхность (геликоид)

Трубчатая винтовая поверхность

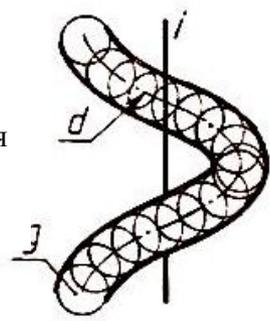


Рис.7.27

Прямой открытый геликоид

Косой закрытый геликоид

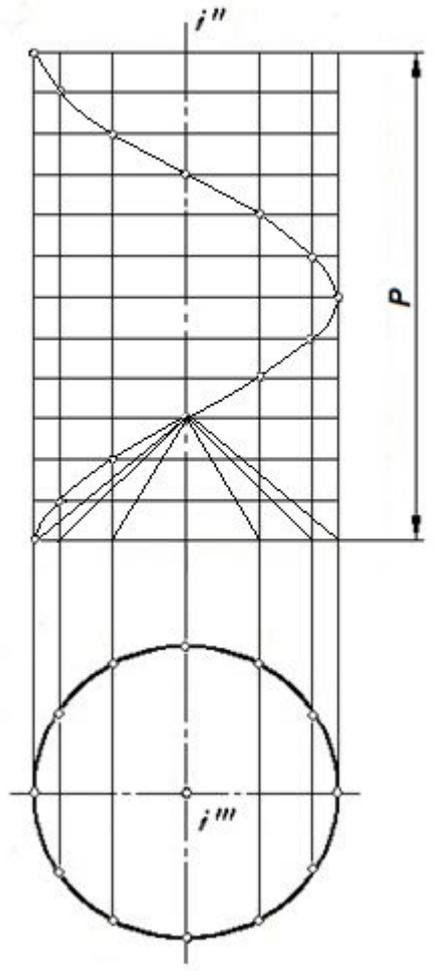
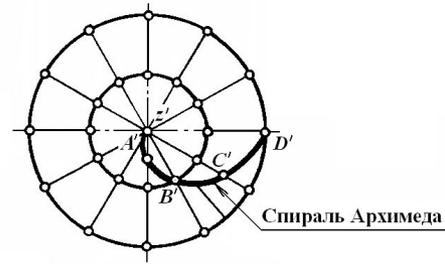
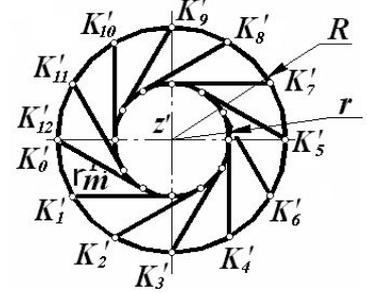
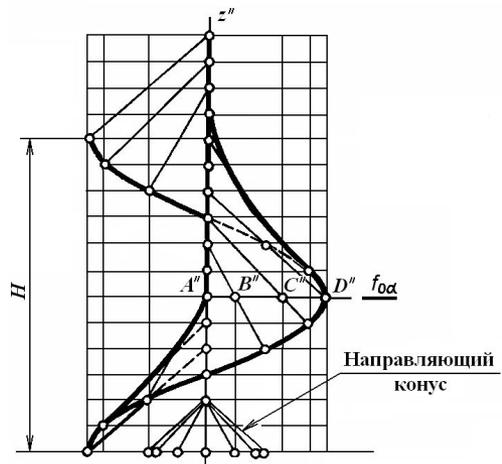
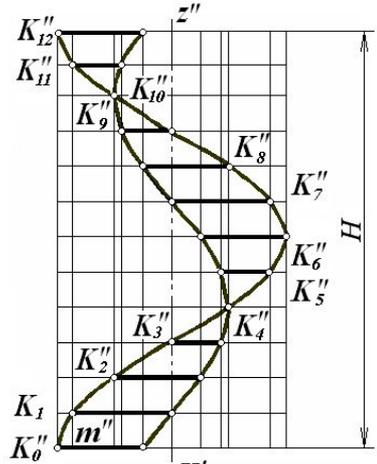


Рис. 7.28

# Геликоиды

Винтовые поверхности образуются при винтовом перемещении движения линии.

$$\Phi(g, i); [g; = T_i(g) \circ R_i(g)]$$

$g$  - образующая (кривая или прямая);

$i$  - ось винтовой линии (поверхности)

Винтовое перемещение - композиция из двух перемещений:

а - параллельного перемещения вдоль оси  $i$ ;

б - вращение вокруг этой оси.

Винтовая линия постоянного шага, построенная на поверхности прямого кругового цилиндра, называется ГЕЛИСОЙ.

Линейчатые винтовые поверхности, направляющая которых - гелиса, называются геликоидами

прямой, если угол наклона образующей к оси =  $90^\circ$ .

косой (наклонной), если угол от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ .

→ закрытые - образующая и ось пересекаются.

→ открытые - образующая и ось скрещиваются.

Поверхность геликоида находит широкое применение в технике резьба, шнеки, сверла, пружинки, лопатки турбин, винты метрические и др.

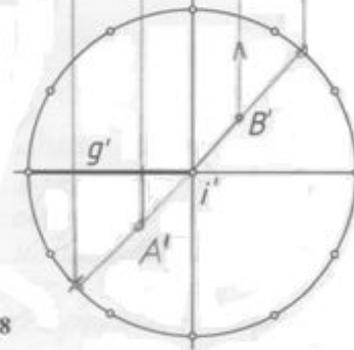
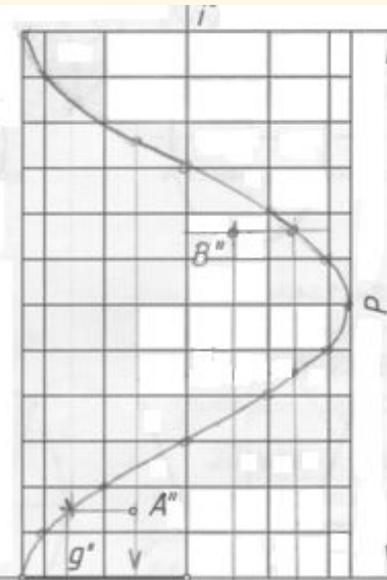


Рис. 7.28

