Лекция №2

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПЛАН

1. *Основные понятия.*
2. *Предел и непрерывность ФКП.*
3. *Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства.*

* ## *1. Основные понятия*

Пусть даны два множества D и E, элементами которых являются комплексные числа. Числа $z = x + iy$ множества D будем изображать точками комплексной плоскости z, а числа $\omega = u + iv$ множества E - точками комплексной плоскости ω.

Если каждому числу $z \in D$ по некоторому правилу поставлено в соответствие определенное число $\omega \in E$, то говорят, что на множестве определена ***однозначная функция комплексного переменного*** $\boldsymbol{\omega = f(z)}$, отображающая множество D в множество E.

* Если каждому $z \in D$ соответствует несколько значений ω, то функция $\omega = f(z)$ называется ***многозначной***.

Множество D называется ***областью определения*** функции $\omega = f(z)$; множество E_1 всех значений ω, которые $f(z)$ принимает на E, называется ***областью значений*** этой функции (если же каждая точка множества E является значением функции, то E – область значений функции; в этом случае функция f отображает D на E).

В дальнейшем будем рассматривать такие функции $\omega = f(z)$, для которых D и E_1 являются ***областями*** (обладают свойствами открытости и связности).

* Точка z_0 называется ***внутренней*** точкой множества E, если существует такая ε - окрестность этой точки, что все точки из этой окрестности принадлежат множеству E.

Точка z_0 называется ***внешней*** точкой множества E, если существует такая ε - окрестность этой точки, что все точки из этой окрестности не принадлежат множеству E.

Точка z_0 называется ***граничной*** точкой множества E, если в её любой ε - окрестность содержатся как точки принадлежащие так и не принадлежащие множеству E.

Совокупность всех граничных точек множества E называется ***границей*** множества E.

* Множество E называется ***открытым***, если оно состоит только из внутренних точек.

Множество E называется ***замкнутым***, если кроме внутренних точек оно содержит и все свои граничные точки.

Если область E ограничена замкнутой не самопересекающейся линией L , то она называется ***односвязной***.

Если область E ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями L_1 и L_2, то она называется ***двусвязной***. Если L_2 вырождается в точку или в непрерывную дугу, то область все равно двусвязная.

* Функцию $\omega = f(z)$ можно записать в виде $u + iv = f(x + iy)$, т.е. $f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y)$, где $u = u(x; y) = Ref(x)$ - ***действительная часть функции*** $f(z)$, а $v = v(x; y) = Imf(x)$ - ***мнимая часть функции*** $f(z)$.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций двух действительных переменных.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^2$.

* 2.Предел и непрерывность ФКП.

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, исключая, может быть саму точку z_0.

Число А называется ***предел***ом ***функции*** $\boldsymbol{\omega = f(z)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{z_0}$, если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ , что для всех $z \neq z_0$, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Записывают:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Из определения следует, что если предел А существует, то существуют и пределы $\lim_{z \to z_0} u(x; y) = u_0$ и $\lim_{z \to z_0} v(x; y) = v_0$. Верно и обратное утверждение.

* Теоремы об арифметических свойствах пределов для функций одного (или нескольких) действительного переменного остаются справедливыми и для функции комплексного переменного.

Пусть функция $\omega = f(z)$ определена в точке $\mathrm{z} = z_0$ и в некоторой ее окрестности.

Функция $\omega = f(z)$ называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{z_0}$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функция $f(z)$ ***непрерывна в области*** D, если она непрерывна в каждой точки этой области.

* *3. Основные элементарные функции комплексного переменного.*

Показательная функция

Показательная функция $\omega = e^z$ определяется формулой

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\sin y).$$

Если $x = 0$, то $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ (формула Эйлера).

<u>Свойства показательной функции:</u>

1) Если $y = 0$, то $e^z = e^x$;

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

3) $\omega = e^z$ периодическая функция с периодом $T = 2\pi i$.

(доказать самостоятельно)

* Из формулы Эйлера следуют равенства:

$$e^{2\pi ni} = 1, n \in Z$$

$$e^{\pi(2n+1)i} = -1, n \in Z$$

$$e^{(\frac{\pi}{2}+2\pi n)i} = i, n \in Z$$

Докажем второе равенство.

$$e^{\pi(2n+1)i} = \cos(2n+1)\pi + i\sin(2n+1)\pi = -1 + i0 = -1$$

Из второй формулы видно, что показательная функция комплексного переменного $\omega = e^z$ не всегда больше нуля.

* ## Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $\omega = \mathrm{Ln}z$ определяется как обратная функция к показательной функции e^z. Так как $e^z \neq 0$, то логарифмическая функция $\omega = \mathrm{Ln}z$ определена на всей плоскости z, кроме точки $z = 0$ (выражение $\mathrm{Ln}(-2)$ имеет смысл).

Чтобы найти логарифм, нужно решить уравнение

$e^{\omega} = z$ относительно ω. Пусть $\omega = u + iv$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$. Подставим в уравнение, получим $e^{u+iv} = \rho e^{i\varphi}$; $e^u \cdot e^{iv} = \rho e^{i\varphi}$, тогда $e^u = \rho$, а $v = \varphi + 2\pi k, k \in Z$. Следовательно $u = \ln\rho$, $v = \varphi + 2\pi k, k \in Z$.

Т.о.$\mathrm{Ln}z = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi k) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z$.

* Логарифмическая функция $\omega = \mathrm{Ln}z$ многозначная.

(Почему?) Однозначную ветвь этой функции можно выделить, подставив в формулу определенное значение *к*. Положив *к=0*, получим однозначную функцию, которая называется ***главным значением*** логарифма $\mathrm{Ln}z$ и обозначается символом $\ln z$: $\ln z = \ln|z| + i\mathrm{arg}z$, где $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Свойства логарифмической функции:

1) $Ln\,(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$;

2) $Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$;

3) $Lnz^n = n \cdot Lnz$;

4) $Ln\,\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz$.

* Степенная функция $\boldsymbol{\omega = z^n}$

Если n-натуральное число, то степенная функция определяется равенством $\omega = \mathrm{z}^{\mathrm{n}} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Функция $\omega = z^n$- однозначная.

Если $n = \frac{1}{q}$ $(q \in N)$, то в этом случае $\omega = z^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{z} =$

$= \sqrt[q]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{\arg z + 2k\pi}{q}\right)$,где $k = 0,1,2,\dots,q-1.$

Здесь функция $\omega = z^{\frac{1}{q}}$ есть многозначная(q -значная) функция.

Если $n = \frac{p}{q}$ $(p, q \in N)$, то степенная функция определяется равенством

$$\omega = z^{\frac{p}{q}} = \left(z^{\frac{1}{q}}\right)^p = \sqrt[q]{|z|^p}\left(\cos\frac{\mathrm{p}(\arg z + 2k\pi)}{q} + i\sin\frac{\mathrm{p}(\arg z + 2k\pi)}{q}\right).$$

Функция $\omega = z^{\frac{p}{q}}$ - многозначная.

* Степенная функция $\omega = z^a$ с произвольным комплексным показателем $\mathrm{a} = \alpha + i\beta$ определяется равенством

$$\omega = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}.$$

Функция $\omega = z^a$ определена для всех $z \neq 0$, является многозначной функцией.

Так, $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i(ln|i| + i(\arg i + 2\pi k)} = e^{i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k}$, где $k \in Z$. При $k = 0$ имеем: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Тригонометрические функции

Тригонометрические функции комплексного аргумента $z = x + iy$ определяются равенством

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

При действительных z эти определения приводят к тригонометрическим функциям действительного переменного.

Тригонометрические функции комплексного переменного сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного.

$$sin^2 z + cos^2 z = 1,$$

$$sin2z = 2sinz \cdot cosz$$ и т.д.

* Гиперболические функции

Эти функции определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} \mathrm{z} = \frac{\operatorname{sh} \mathrm{z}}{\operatorname{ch} \mathrm{z}},\ \operatorname{cth} \mathrm{z} = \frac{\operatorname{ch} \mathrm{z}}{\operatorname{sh} \mathrm{z}}.$$

Заменяя в указанных функциях z на iz, получим:

$\operatorname{sh} i\, z = i \sin z,$ или $\sin z = -i \operatorname{sh} iz,$ $\operatorname{ch} iz = \cos z.$

Пользуясь этим равенствами можно получить ряд формул, связывающих гиперболические функции. Так заменяя в формуле $sin^2 z + cos^2 z = 1$ тригонометрические функции гиперболическими, получим $\operatorname{ch}^2 \mathrm{z} - \operatorname{sh}^2 \mathrm{z} = 1.$

Из определения гиперболических функций следует, что функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ периодические с периодом $2\pi i$; функции $\operatorname{th} \mathrm{z}$, и $\operatorname{cth} \mathrm{z}$ имеют период πi.

* Обратные тригонометрические функции

Число ω называется ***арксинусом числа z***, если $\sin\omega = z$ и обозначается $\omega = \mathrm{Arcsin}\, z$. Используя определение синуса, получим:

$\omega = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\, Ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$ (фун-я мнгоозначная). Можно показать, что

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\, Ln(z + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\, Ln\frac{i-z}{i+z} \quad (z \neq \pm i),$$

$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\, Ln\frac{z-i}{z+i} \quad (z \neq \pm i).$$

Спасибо за внимание!