

Городская научно-практическая конференция юных исследователей  
«Будущее Петрозаводска»

# Вычисление площади многоугольника



*Качановская Алина Игоревна  
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»,  
9Б класс, г. Петрозаводск.*

*Руководитель Орлова Ирина Анатольевна  
учитель математики  
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»*

# Вычисление площади многоугольника



## *Гипотеза.*

Используя координатный метод и формулу Пика, можно сократить время для вычисления площади многоугольника.

**Объект исследования** – площадь многоугольника.

**Предмет исследования** – способы нахождения площади многоугольника.

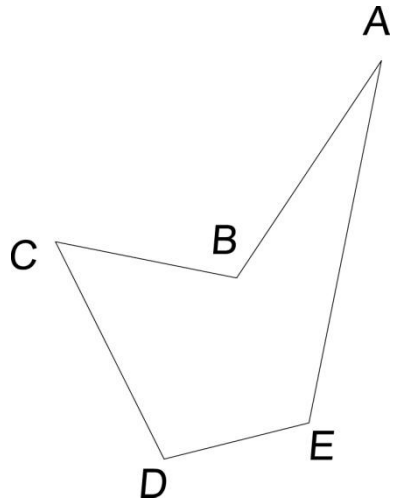
**Цель исследования:** изучить методы вычисления площади по координатам вершин и с помощью формулы Пика и научиться применять их на практике.

## *Задачи:*

- изучить теоретический материал по данной теме;
- вывести формулы вычисления площади по координатам;
- на практике применить данные способы для вычисления площадей многоугольников;
- сравнить результаты нахождения площади многоугольников разными способами.

**Методы исследования:** изучение литературы и Интернет-ресурсов, сравнение, обобщение, аналогия.

# Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин



Найти площадь пятиугольника ABCDE с вершинами:  
A(5;7), B(1;1), C(-4; 2), D(-1; -4), E(4; -3).

|   | x  | y  |
|---|----|----|
| A | 5  | 7  |
| B | 1  | 1  |
| C | -4 | 2  |
| D | -1 | -4 |
| E | 4  | -3 |
| A | 5  | 7  |

1) Абсциссу 1 точки умножаем на ординату 2 точки, абсциссу 2 точки - на ординату 3 точки и так далее.

Складываем произведения:

$$5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 7 = \mathbf{54}.$$

2) Ординату 1 точки умножаем на абсциссу 2 точки, ординату 2 точки - на абсциссу 3 точки и так далее.

Складываем произведения:

$$7 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = \mathbf{-30}.$$

3) Из первой суммы вычитаем вторую:  $54 - (-30) = \mathbf{84}$ .

4) Полученную сумму делим на 2:  $84 : 2 = \mathbf{42}$ .

$$S_{ABCDE} = \mathbf{42 \text{ кв. ед.}}$$

# Вычисление площади треугольника



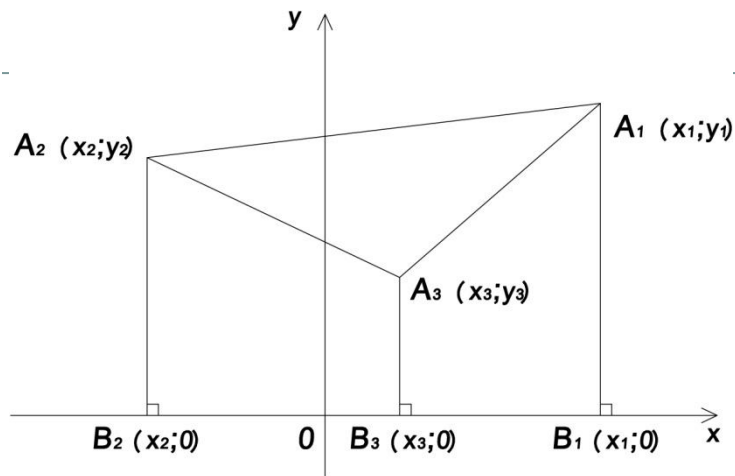
|                | x              | y              |
|----------------|----------------|----------------|
| A <sub>1</sub> | x <sub>1</sub> | y <sub>1</sub> |
| A <sub>2</sub> | x <sub>2</sub> | y <sub>2</sub> |
| A <sub>3</sub> | x <sub>3</sub> | y <sub>3</sub> |
| A <sub>1</sub> | x <sub>1</sub> | y <sub>1</sub> |

Треугольник  $A_1A_2A_3$  с координатами вершин  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  и  $(x_3, y_3)$ .

$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1))$$

Равенство 1

# Вычисление площади треугольника



$$S_{A_1A_2A_3} = S_{A_2A_1B_1B_2} - S_{A_2A_3B_3B_2} - S_{A_3A_1B_1B_3} \quad (\text{равенство 2})$$

Так как  $A_1A_2B_2B_1$  трапеция, то

$$S = 0,5(A_2B_2 + A_1B_1) \cdot B_2B_1$$

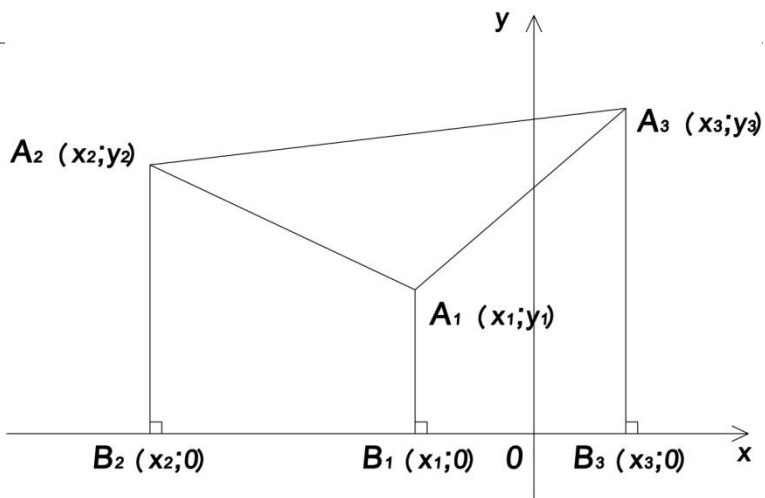
$$S_{A_2A_1B_1B_2} = 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2).$$

$$S_{A_2A_3B_3B_2} = 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \quad \text{и} \quad S_{A_3A_1B_1B_3} = 0,5(y_3 + y_1)(x_1 - x_3).$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) - 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - 0,5(y_1 + y_3)(x_1 - x_3) = \\ &= 0,5y_2x_1 - 0,5y_2x_2 + 0,5y_1x_1 - 0,5y_1x_2 - 0,5y_2x_3 + 0,5y_2x_2 - 0,5y_3x_3 + 0,5y_3x_2 - 0,5y_3x_1 + \\ &+ 0,5y_3x_3 - 0,5y_1x_1 + 0,5x_3y_1 = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = \\ &= 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)). \end{aligned}$$

# Вычисление площади треугольника



$$S_{A_1A_2A_3} = S_{A_2A_3B_3B_2} - S_{A_2A_1B_1B_2} - S_{A_1A_3B_3B_1} \quad (\text{равенство 3})$$

$$S_{A_2A_3B_3B_2} = 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$S_{A_2A_1B_1B_2} = 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2)$$

$$S_{A_3A_1B_1B_3} = 0,5(y_3 + y_1)(x_3 - x_1)$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) - 0,5(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) = \\ &= 0,5y_2x_3 - 0,5y_2x_2 + 0,5y_3x_3 - 0,5y_3x_2 - 0,5y_2x_1 + 0,5y_2x_2 - 0,5y_1x_1 + 0,5y_1x_2 - 0,5y_1x_3 + \\ &+ 0,5y_1x_1 - 0,5y_3x_3 + 0,5x_1y_3 = -0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) + 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = \\ &= -0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)). \end{aligned}$$

# Вычисление площади треугольника



Если вершины треугольника взяты против часовой стрелки, то

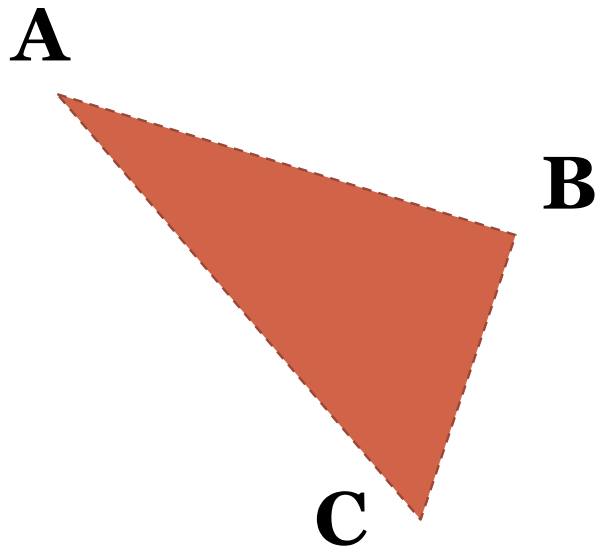
$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)).$$

Если вершины треугольника взяты по часовой стрелке, то

$$S = -0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)).$$

$$S = 0,5 | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) |$$

$\Delta ABC$ ,  $A(-3; 2)$ ,  $B(4,5; 0,8)$ ,  $C(1,8; -3,5)$

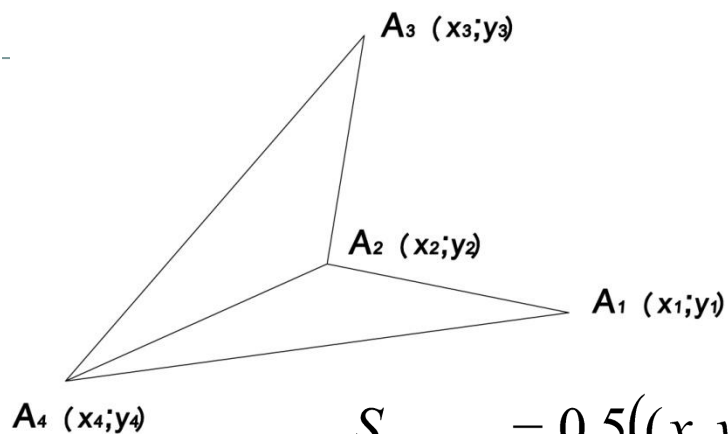


|   | x   | y    |
|---|-----|------|
| A | -3  | 2    |
| C | 4,5 | 0,8  |
| B | 1,8 | -3,5 |
| A | -3  | 2    |

$$S = 0,5((-3 \cdot 0,8 + 4,5 \cdot (-3,5) + (1,8 \cdot 2)) - (2 \cdot 4,5 + 0,8 \cdot 1,8 + (-3,5) \cdot (-3))) = 17,745$$



# Вычисление площади четырехугольника



$$S_{A_1A_2A_3A_4} = S_{A_1A_2A_4} + S_{A_2A_3A_4}$$

$$S_{A_1A_2A_4} = 0,5((x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_4 + y_4x_1))$$

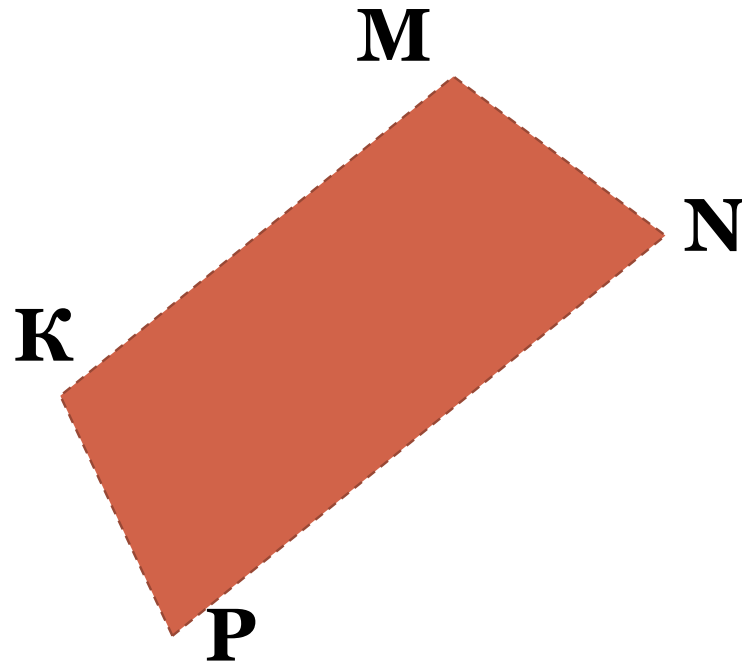
$$S_{A_2A_3A_4} = 0,5((x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_2))$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3A_4} &= 0,5x_1y_2 + 0,5x_2y_4 + 0,5x_4y_1 - 0,5y_1x_2 - 0,5y_2x_4 - 0,5y_4x_1 + 0,5x_2y_3 + 0,5x_3y_4 + \\ &+ 0,5x_4y_2 - 0,5y_2x_3 - 0,5y_3x_4 - 0,5y_4x_2 = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + \\ &+ y_3x_4 + y_4x_1) \end{aligned}$$

$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1))$$

MKPN, M(2; 4), K(-2,2; 0), P(-2; 5,3), N(3;7)



|   | x    | y   |
|---|------|-----|
| M | 2    | 4   |
| K | -2,2 | 0   |
| P | -2   | 5,3 |
| N | 3    | 7   |
| M | 2    | 4   |

$$S = 0,5((2 \cdot 0 + (-2,2) \cdot 5,3 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 4) - (4 \cdot (-2,2) + 0 \cdot (-2) + 5,3 \cdot 3 + 7 \cdot 2)) = 17,38$$

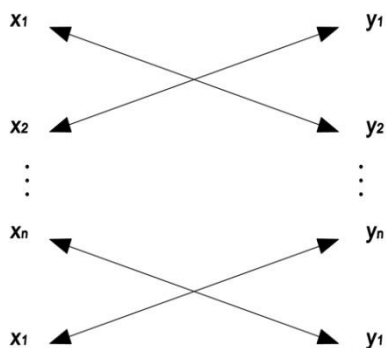
# Алгоритм вычисления площади многоугольника по координатам его вершин



|       | x     | y     |
|-------|-------|-------|
| $A_1$ | $x_1$ | $y_1$ |
| $A_2$ | $x_2$ | $y_2$ |
| ...   | ...   | ...   |
| $A_n$ | $x_n$ | $y_n$ |
| $A_1$ | $x_1$ | $y_1$ |

1). Составить таблицу (вершины – против часовой стрелки).

2). Выполнить вычисления по схеме:



1. Считаем сумму произведений координат, соединенных стрелками, направленными от левого верхнего угла к правому нижнему.

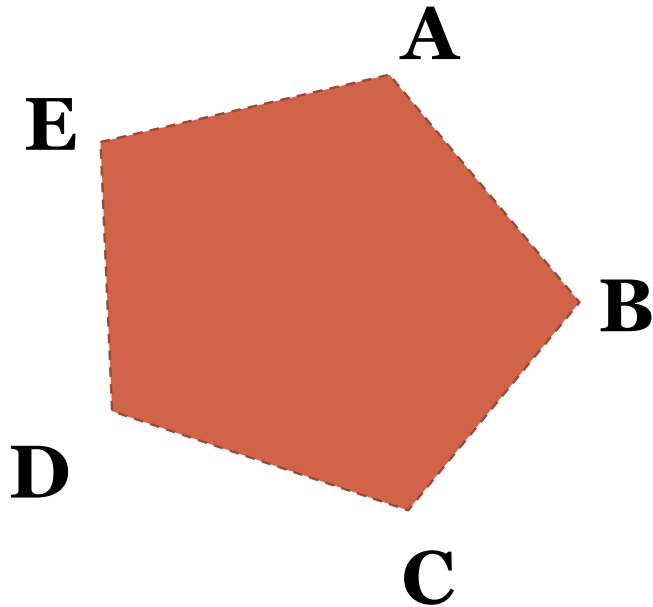
2. Считаем сумму произведений координат, соединенных стрелками, направленными от правого верхнего угла к левому нижнему.

3. От первой суммы вычитаем вторую сумму и результат делим пополам.

$$S = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_nx_1).$$

# ABCDE,

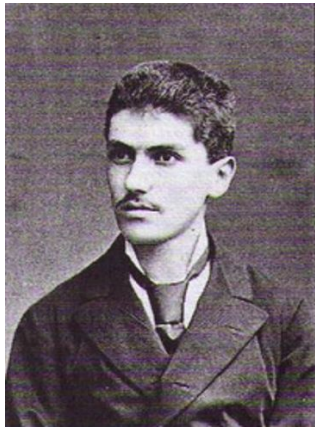
A(-2,4; 3), B(1,2; 0,4), C(-1,5; -4), D(-5; -4), E(-6,2; 1,4)



$$\begin{aligned}
 S = & 0,5((-2,4) \cdot 1,4 + (-6,2) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-4) + \\
 & + (-1,5) \cdot 0,4 + 1,2 \cdot 3) - (3 \cdot (-6,2) + 1,4 \cdot (-5) + \\
 & + (-4) \cdot (-1,5) + (-4) \cdot 1,2 + 0,4 \cdot (-2,4)) = \mathbf{34,9}
 \end{aligned}$$

|   | x    | y   |
|---|------|-----|
| A | -2,4 | 3   |
| E | -6,2 | 1,4 |
| D | -5   | -4  |
| C | -1,5 | -4  |
| B | 1,2  | 0,4 |
| A | -2,4 | 3   |

# Вычисление площади многоугольников по формуле Пика



**Георг Пик**  
(1859 – 1942)

Площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге:

$$S = \frac{\Gamma}{2} + B - 1$$

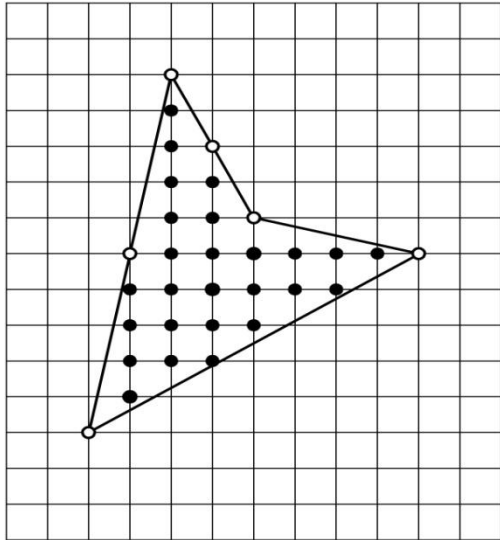
$\Gamma$  – количество целочисленных точек на границе многоугольника,

$B$  – количество целочисленных точек внутри многоугольника.

# Вычисление площади многоугольников по формуле Пика



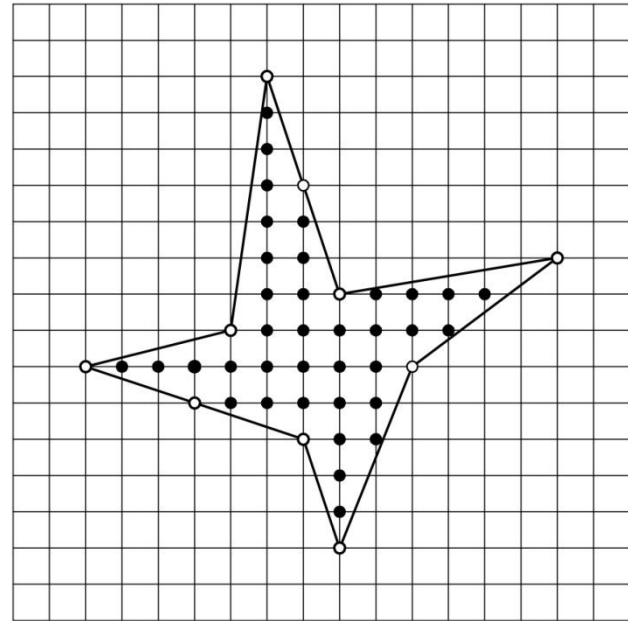
1



$$\Gamma = 6, \quad B = 26.$$

$$S = 6 : 2 + 26 - 1 = \mathbf{28} \text{ (кв. ед.)}$$

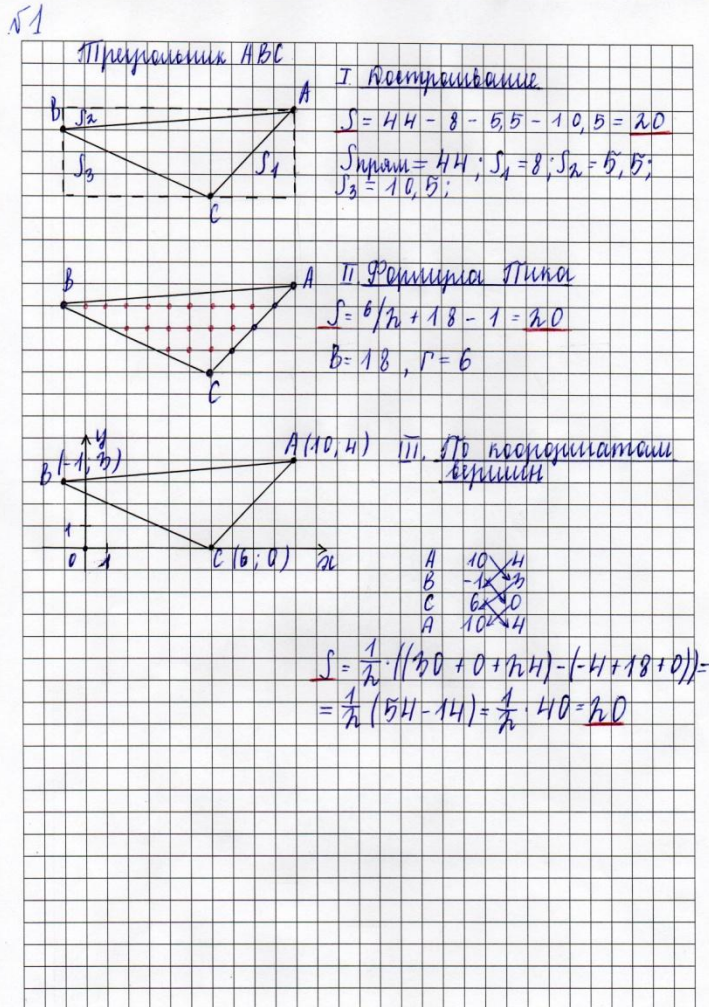
2



$$\Gamma = 10, \quad B = 36.$$

$$S = 10 : 2 + 36 - 1 = \mathbf{40} \text{ (кв. ед.)}$$

# Вычисление площади многоугольников разными способами



## Площадь треугольника ABC

- Достраивание
- По формуле Пика
- По координатам вершин

**S = 20** кв. ед.

# Вычисление площади многоугольников разными способами



## Площадь выпуклого четырехугольника ABCD

- Достраивание
- По формуле Пика
- По координатам вершин
- Разбиение

**S = 40** кв. ед.

*№ 2*  
 Выпуклый четырехугольник ABCD

**I. Достраивание**  
 $S = 66 - 13,5 - 3 - 4,5 - 5 = 40$   
 $S_{\text{кв.}} = 66; S_1 = 13,5; S_2 = 3; S_3 = 4,5; S_4 = 5;$

**II. По формуле Пика**  
 $S = \frac{6}{2} + 38 - 1 = 40$   
 $P = 6, B = 38$

**III. По координатам вершин**  
 $A(-1; -4) \quad B(5; -1) \quad C(6; 2) \quad D(-6; 1)$

|   |    |    |
|---|----|----|
| A | -1 | -4 |
| B | 5  | -1 |
| C | 6  | 2  |
| D | -6 | 1  |
| A | -1 | -4 |

$$S = \frac{1}{2} ((-4 + 10 + 3 + 24) - (-20 - 3 - 12 - 4)) = \frac{1}{2} (41 + 39) = 40$$

**IV. Разбиение**  
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 14 + 3 + 13,5 + 5 + 4,5 = 40$



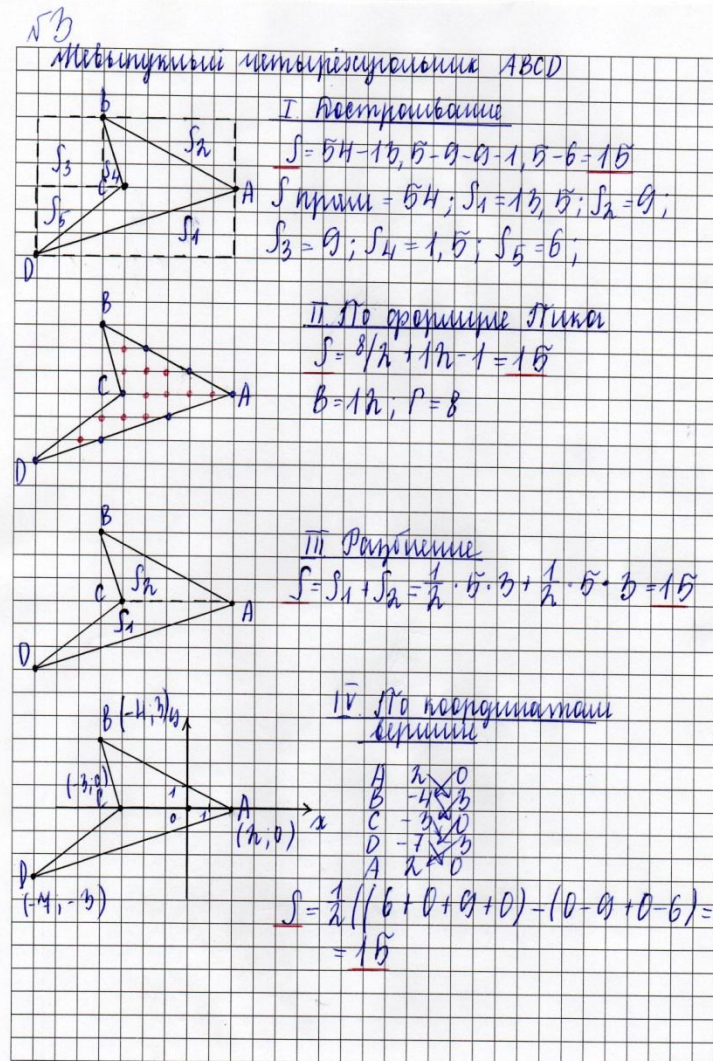
# Вычисление площади многоугольников разными способами



## Площадь невыпуклого четырехугольника ABCD

- Достраивание
- По формуле Пика
- Разбиение
- По координатам его вершин

$$S = 15 \text{ кв. ед.}$$





# Вычисление площади многоугольника



- Представлены два способа вычисления площади многоугольника: по координатам его вершин и по формуле Пика.
- Выведена формула для вычисления площади треугольника по координатам его вершин.
- Выведена формула для вычисления площади четырехугольника по координатам его вершин.
- Приведены примеры вычисления площадей многоугольников по координатам их вершин.
- Приведены примеры вычисления площадей многоугольников по формуле Пика.
- Приведены примеры вычисления площади одного и того же многоугольника разными способами.

Городская научно-практическая конференция юных исследователей  
«Будущее Петрозаводска»

# Вычисление площади многоугольника



*Качановская Алина Игоревна  
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»,  
9Б класс, г. Петрозаводск.*

*Руководитель Орлова Ирина Анатольевна  
учитель математики  
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»*