

Городская научно-практическая конференция юных исследователей
«Будущее Петрозаводска»

Вычисление площади многоугольника



*Качановская Алина Игоревна
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»,
9Б класс, г. Петрозаводск.*

*Руководитель Орлова Ирина Анатольевна
учитель математики
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»*

Вычисление площади многоугольника



Гипотеза.

Используя координатный метод и формулу Пика, можно сократить время для вычисления площади многоугольника.

Объект исследования – площадь многоугольника.

Предмет исследования – способы нахождения площади многоугольника.

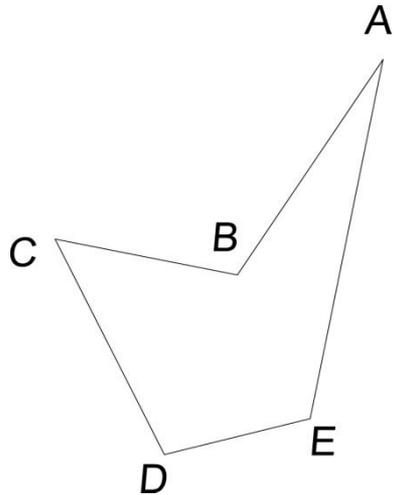
Цель исследования: изучить методы вычисления площади по координатам вершин и с помощью формулы Пика и научиться применять их на практике.

Задачи:

- изучить теоретический материал по данной теме;
- вывести формулы вычисления площади по координатам;
- на практике применить данные способы для вычисления площадей многоугольников;
- сравнить результаты нахождения площади многоугольников разными способами.

Методы исследования: изучение литературы и Интернет-ресурсов, сравнение, обобщение, аналогия.

Вычисление площади многоугольника по координатам его вершин



Найти площадь пятиугольника ABCDE с вершинами:
A(5;7), B(1;1), C(-4;2), D(-1;-4), E(4;-3).

	x	y
A	5	7
B	1	1
C	-4	2
D	-1	-4
E	4	-3
A	5	7

1) Абсциссу 1 точки умножаем на ординату 2 точки, абсциссу 2 точки - на ординату 3 точки и так далее.

Складываем произведения:

$$5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4) + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 7 = 54.$$

2) Ординату 1 точки умножаем на абсциссу 2 точки, ординату 2 точки - на абсциссу 3 точки и так далее.

Складываем произведения:

$$7 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = -30.$$

3) Из первой суммы вычитаем вторую: $54 - (-30) = 84$.

4) Полученную сумму делим на 2: $84 : 2 = 42$.

$$S_{ABCDE} = 42 \text{ кв. ед.}$$

Вычисление площади треугольника



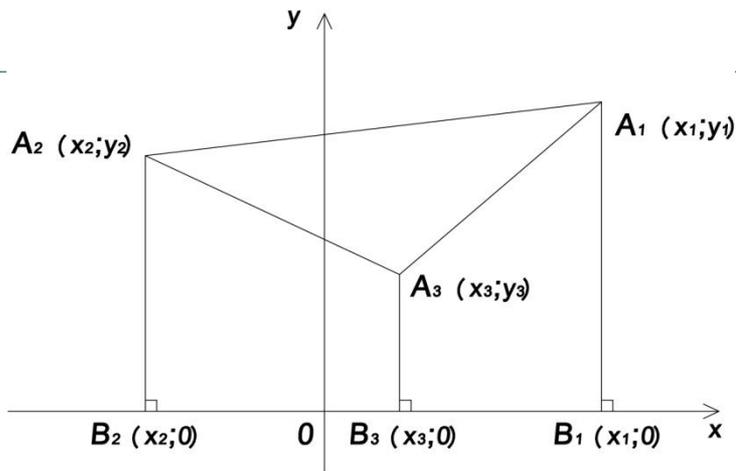
	x	y
A ₁	x ₁	y ₁
A ₂	x ₂	y ₂
A ₃	x ₃	y ₃
A ₁	x ₁	y ₁

Треугольник $A_1A_2A_3$ с координатами вершин (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) .

$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1))$$

Равенство 1

Вычисление площади треугольника



$$S_{A_1A_2A_3} = S_{A_2A_1B_1B_2} - S_{A_2A_3B_3B_2} - S_{A_3A_1B_1B_3} \quad (\text{равенство 2})$$

Так как $A_1A_2B_2B_1$ трапеция, то

$$S = 0,5(A_2B_2 + A_1B_1) \cdot B_2B_1$$

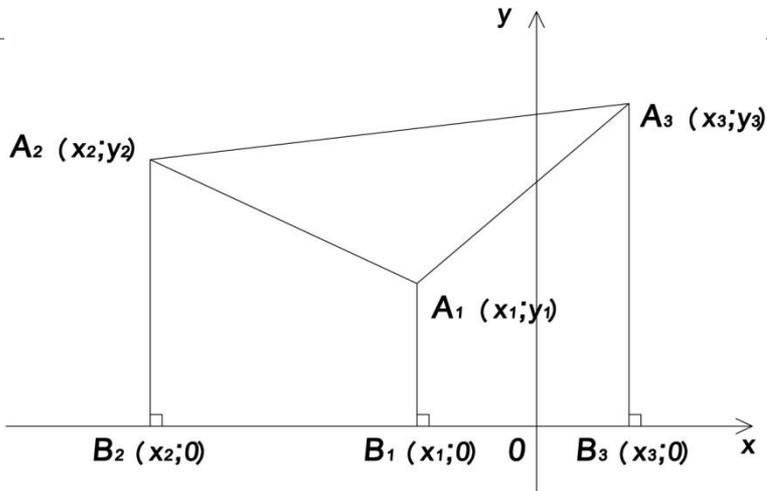
$$S_{A_2A_1B_1B_2} = 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2).$$

$$S_{A_2A_3B_3B_2} = 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \quad \text{и} \quad S_{A_3A_1B_1B_3} = 0,5(y_3 + y_1)(x_1 - x_3).$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) - 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - 0,5(y_1 + y_3)(x_1 - x_3) = \\ &= 0,5y_2x_1 - 0,5y_2x_2 + 0,5y_1x_1 - 0,5y_1x_2 - 0,5y_2x_3 + 0,5y_2x_2 - 0,5y_3x_3 + 0,5y_3x_2 - 0,5y_3x_1 + \\ &+ 0,5y_3x_3 - 0,5y_1x_1 + 0,5x_3y_1 = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = \\ &= 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)). \end{aligned}$$

Вычисление площади треугольника



$$S_{A_1A_2A_3} = S_{A_2A_3B_3B_2} - S_{A_2A_1B_1B_2} - S_{A_1A_3B_3B_1} \quad (\text{равенство 3})$$

$$S_{A_2A_3B_3B_2} = 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$S_{A_2A_1B_1B_2} = 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2)$$

$$S_{A_3A_1B_1B_3} = 0,5(y_3 + y_1)(x_3 - x_1)$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3} &= 0,5(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) - 0,5(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) - 0,5(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) = \\ &= 0,5y_2x_3 - 0,5y_2x_2 + 0,5y_3x_3 - 0,5y_3x_2 - 0,5y_2x_1 + 0,5y_2x_2 - 0,5y_1x_1 + 0,5y_1x_2 - 0,5y_1x_3 + \\ &+ 0,5y_1x_1 - 0,5y_3x_3 + 0,5x_1y_3 = -0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) + 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) = \\ &= -0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)). \end{aligned}$$

Вычисление площади треугольника



Если вершины треугольника взяты против часовой стрелки, то

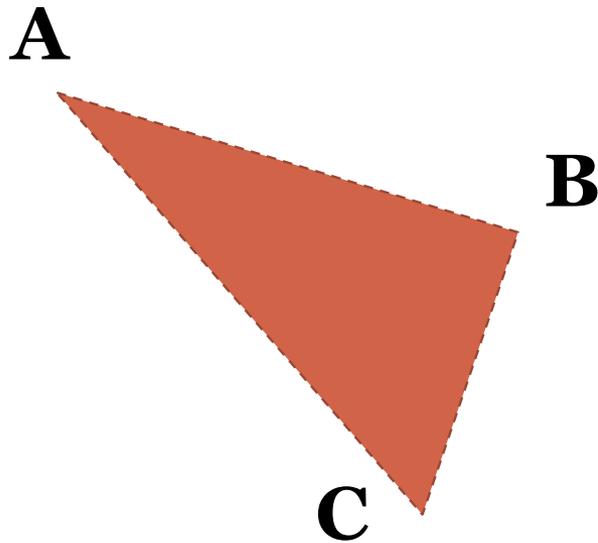
$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)).$$

Если вершины треугольника взяты по часовой стрелке, то

$$S = -0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)).$$

$$S = 0,5 | (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1) |$$

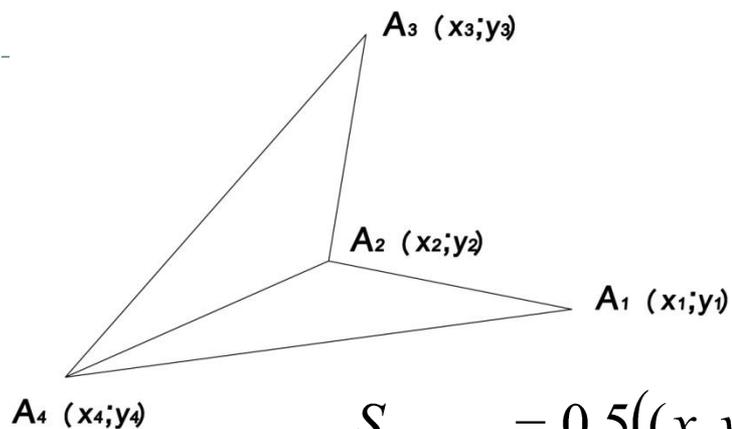
ΔABC , $A(-3; 2)$, $B(4,5; 0,8)$, $C(1,8; -3,5)$



	x	y
A	-3	2
C	4,5	0,8
B	1,8	-3,5
A	-3	2

$$S = 0,5((-3 \cdot 0,8 + 4,5 \cdot (-3,5) + (1,8 \cdot 2)) - (2 \cdot 4,5 + 0,8 \cdot 1,8 + (-3,5) \cdot (-3))) = 17,745$$

Вычисление площади четырехугольника



$$S_{A_1A_2A_3A_4} = S_{A_1A_2A_4} + S_{A_2A_3A_4}$$

$$S_{A_1A_2A_4} = 0,5((x_1y_2 + x_2y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_4 + y_4x_1))$$

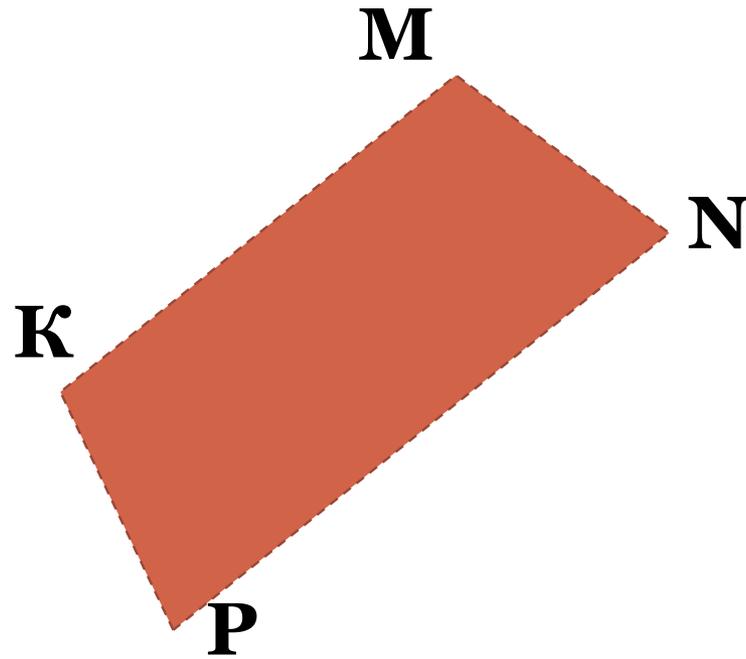
$$S_{A_2A_3A_4} = 0,5((x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_2) - (y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_2))$$

Выполним алгебраические преобразования

$$\begin{aligned} S_{A_1A_2A_3A_4} &= 0,5x_1y_2 + 0,5x_2y_4 + 0,5x_4y_1 - 0,5y_1x_2 - 0,5y_2x_4 - 0,5y_4x_1 + 0,5x_2y_3 + 0,5x_3y_4 + \\ &+ 0,5x_4y_2 - 0,5y_2x_3 - 0,5y_3x_4 - 0,5y_4x_2 = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - 0,5(y_1x_2 + y_2x_3 + \\ &+ y_3x_4 + y_4x_1) \end{aligned}$$

$$S = 0,5((x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1))$$

MKPN, M(2; 4), K(-2,2; 0), P(-2; 5,3), N(3;7)



	x	y
M	2	4
K	-2,2	0
P	-2	5,3
N	3	7
M	2	4

$$S = 0,5((2 \cdot 0 + (-2,2) \cdot 5,3 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 4) - (4 \cdot (-2,2) + 0 \cdot (-2) + 5,3 \cdot 3 + 7 \cdot 2)) = 17,38$$

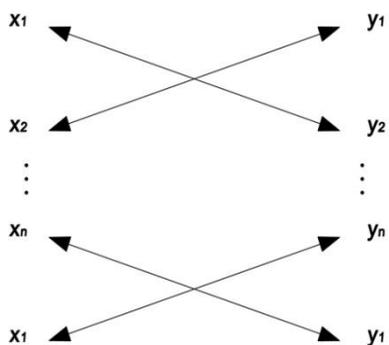
Алгоритм вычисления площади многоугольника по координатам его вершин



	x	y
A_1	x_1	y_1
A_2	x_2	y_2
...
A_n	x_n	y_n
A_1	x_1	y_1

1). Составить таблицу (вершины – против часовой стрелки).

2). Выполнить вычисления по схеме:



1. Считаем сумму произведений координат, соединенных стрелками, направленными от левого верхнего угла к правому нижнему.

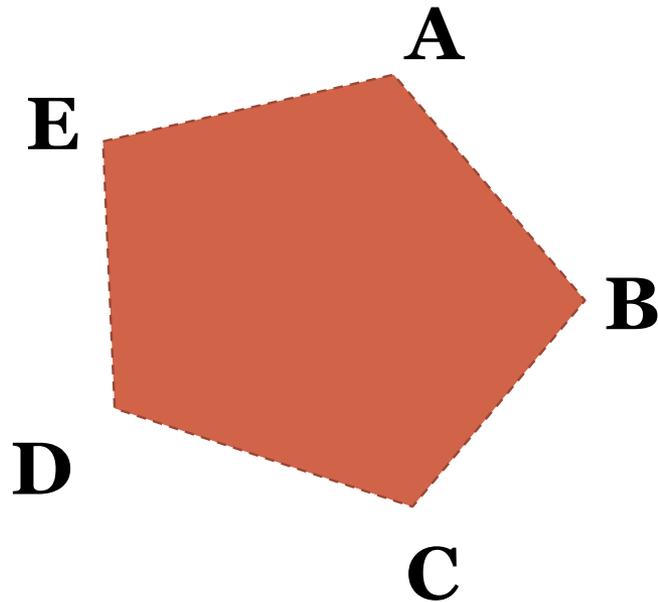
2. Считаем сумму произведений координат, соединенных стрелками, направленными от правого верхнего угла к левому нижнему.

3. От первой суммы вычитаем вторую сумму и результат делим пополам.

$$S = 0,5(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_nx_1).$$

ABCDE,

A(-2,4; 3), B(1,2; 0,4), C(-1,5; -4), D(-5; -4), E(-6,2; 1,4)



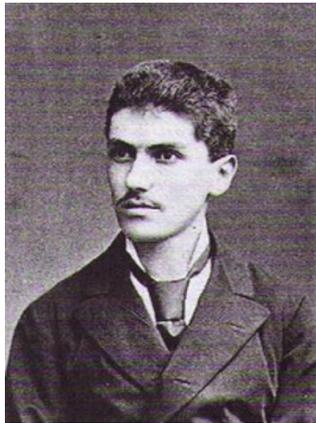
$$S = 0,5((-2,4) \cdot 1,4 + (-6,2) \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-4) + (-1,5) \cdot 0,4 + 1,2 \cdot 3) - (3 \cdot (-6,2) + 1,4 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-1,5) + (-4) \cdot 1,2 + 0,4 \cdot (-2,4)) = 34,9$$

	x	y
A	-2,4	3
E	-6,2	1,4
D	-5	-4
C	-1,5	-4
B	1,2	0,4
A	-2,4	3

Вычисление площади многоугольников по формуле Пика



Площадь многоугольника, изображенного на клетчатой бумаге:



Георг Пик
(1859 – 1942)

$$S = \frac{\Gamma}{2} + B - 1$$

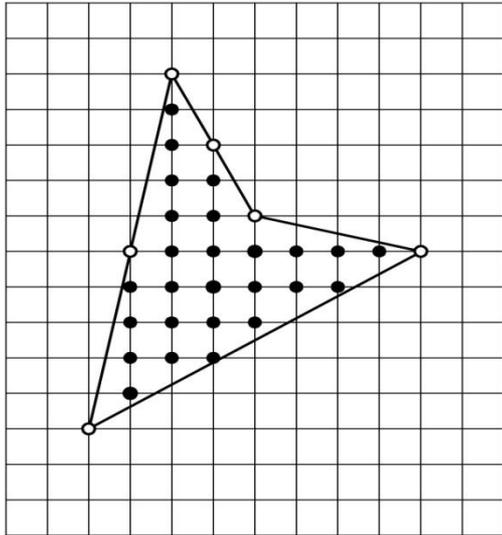
Γ – количество целочисленных точек на границе многоугольника,

B – количество целочисленных точек внутри многоугольника.

Вычисление площади многоугольников по формуле Пика



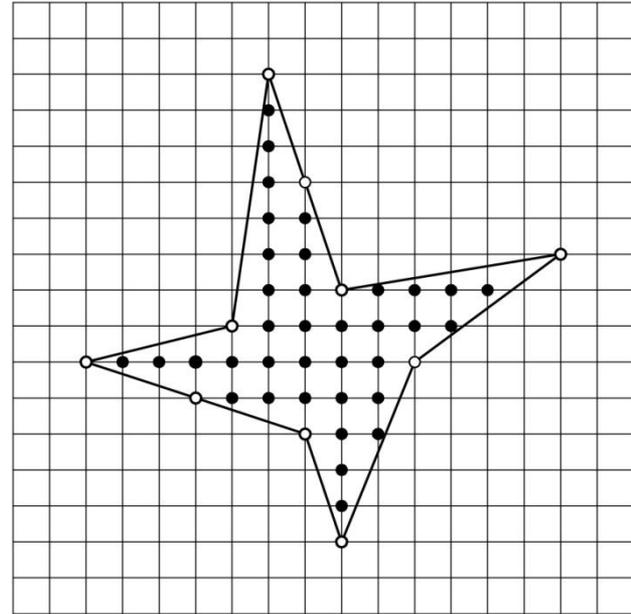
1



$$\Gamma = 6, \quad B = 26.$$

$$S = 6 : 2 + 26 - 1 = \mathbf{28} \text{ (кв. ед.)}$$

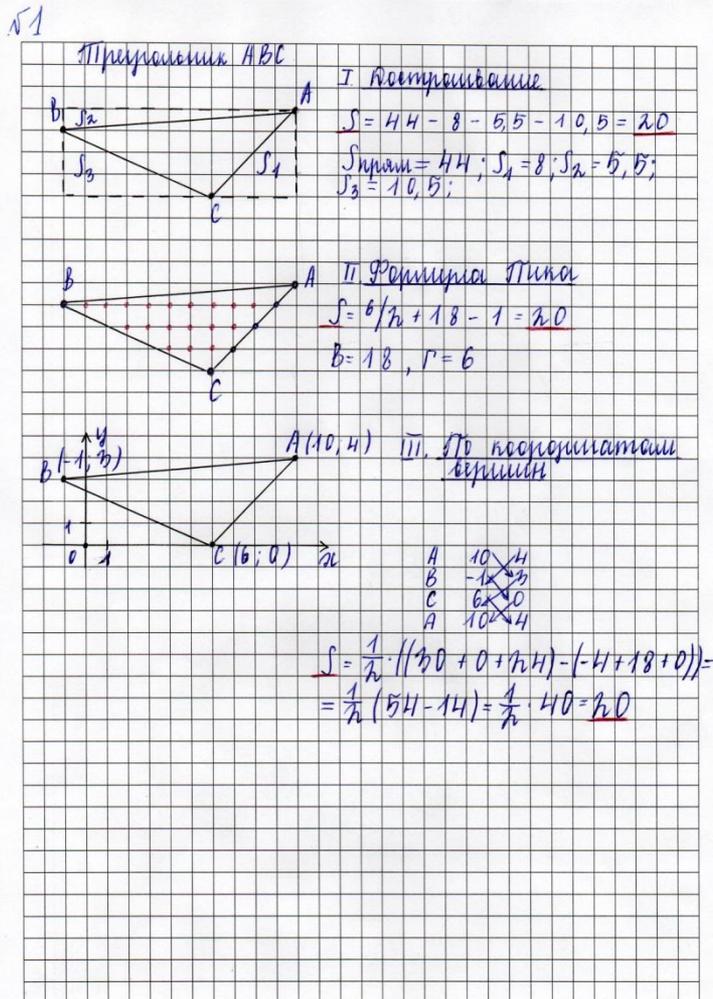
2



$$\Gamma = 10, \quad B = 36.$$

$$S = 10 : 2 + 36 - 1 = \mathbf{40} \text{ (кв. ед.)}$$

Вычисление площади многоугольников разными способами



Площадь треугольника ABC

- Достраивание
- По формуле Пика
- По координатам вершин

S = 20 кв. ед.

Вычисление площади многоугольников разными способами



Площадь выпуклого четырехугольника ABCD

- Достраивание
- По формуле Пика
- По координатам вершин
- Разбиение

S = 40 кв. ед.

№ 2
 Выпуклый четырехугольник ABCD

I. Достраивание
 $S = 66 - 13,5 - 3 - 4,5 - 5 = 40$
 $S_{\text{кв.}} = 66; S_1 = 13,5; S_2 = 3; S_3 = 4,5; S_4 = 5;$

II. По формуле Пика
 $S = \frac{6}{2} + 38 - 1 = 40$
 $P = 6, B = 38$

III. По координатам вершин
 $A(-1; -4) \quad B(5; -1) \quad C(6; 2) \quad D(-6; 1)$

A	-1	-4
B	5	-1
C	6	2
D	-6	1
A	-1	-4

$$S = \frac{1}{2} ((-4 + 10 + 3 + 24) - (-20 - 3 - 12 - 4)) = \frac{1}{2} (41 + 39) = 40$$

IV. Разбиение
 $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = 14 + 3 + 13,5 + 5 + 4,5 = 40$

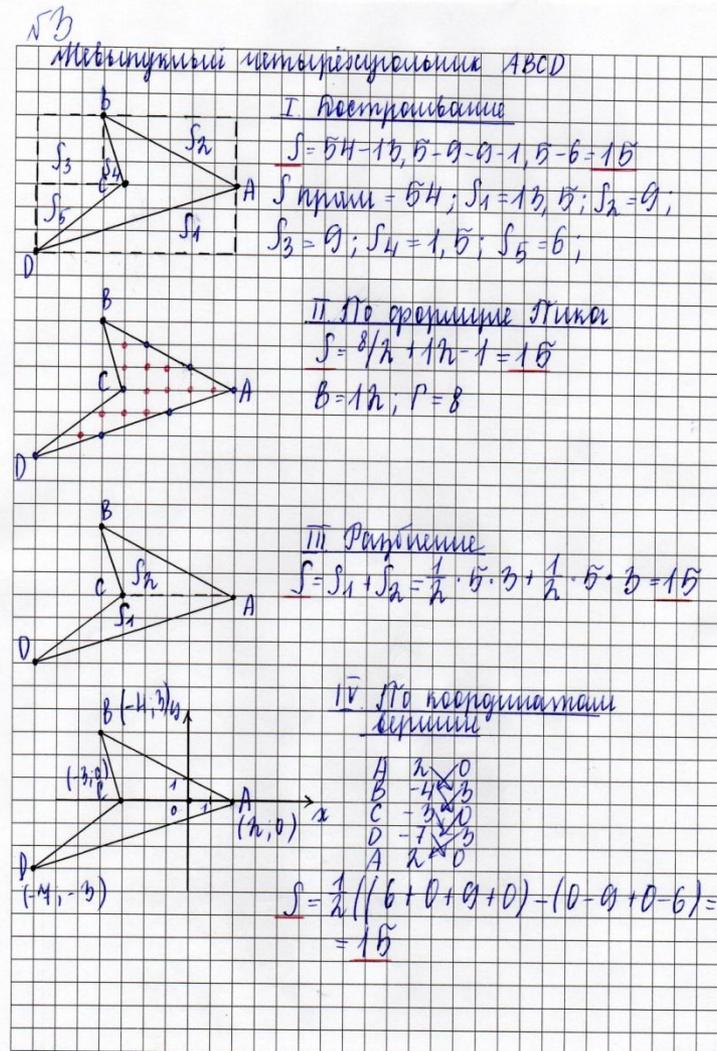
Вычисление площади многоугольников разными способами



Площадь невыпуклого четырехугольника ABCD

- Достраивание
- По формуле Пика
- Разбиение
- По координатам его вершин

S = 15 кв. ед.



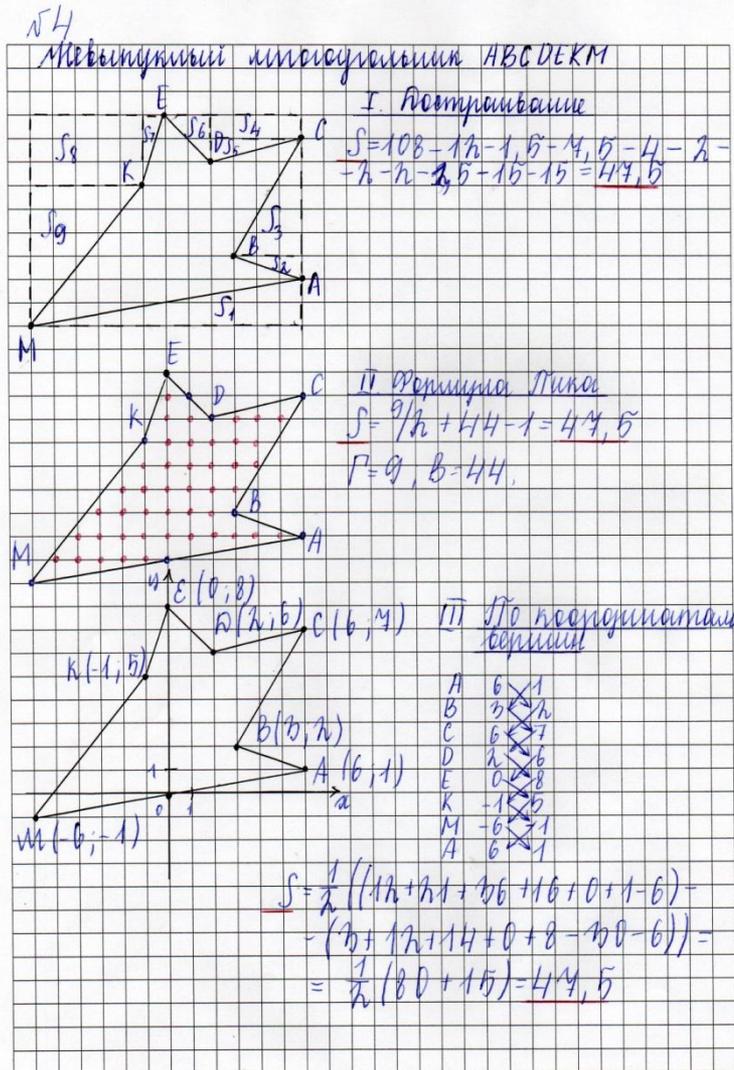
Вычисление площади многоугольников разными способами



Площадь невыпуклого семиугольника ABCDEKM

- Достраивание
- По формуле Пика
- По координатам его вершин

S = 47,5 кв. ед.



Вычисление площади многоугольника



- Представлены два способа вычисления площади многоугольника: по координатам его вершин и по формуле Пика.
- Выведена формула для вычисления площади треугольника по координатам его вершин.
- Выведена формула для вычисления площади четырехугольника по координатам его вершин.
- Приведены примеры вычисления площадей многоугольников по координатам их вершин.
- Приведены примеры вычисления площадей многоугольников по формуле Пика.
- Приведены примеры вычисления площади одного и того же многоугольника разными способами.

Городская научно-практическая конференция юных исследователей
«Будущее Петрозаводска»

Вычисление площади многоугольника



*Качановская Алина Игоревна
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»,
9Б класс, г. Петрозаводск.*

*Руководитель Орлова Ирина Анатольевна
учитель математики
МОУ «Гимназия №30 имени Музалева Д.Н.»*