

10. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

10.1. Классификация нелинейных элементов и цепей

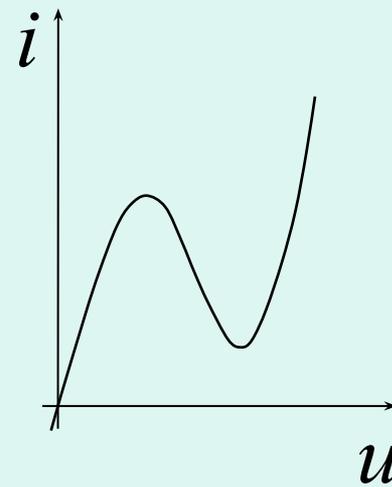
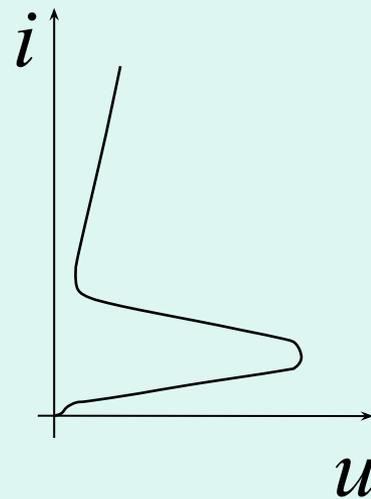
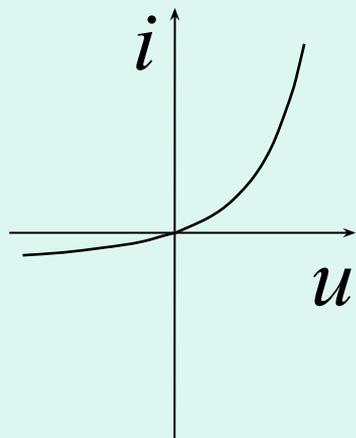
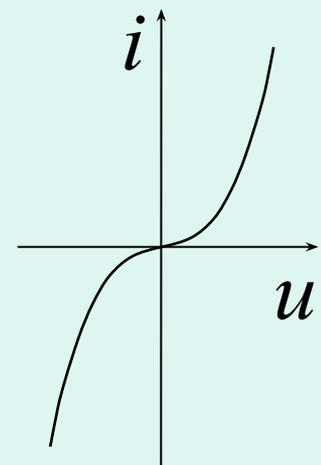
Электрическую цепь называют *нелинейной*, если она содержит хотя бы один нелинейный элемент.

Работа большинства радиоэлектронных устройств основана на использовании нелинейности характеристик реальных элементов.

К таким устройствам относятся генераторы гармонических и релаксационных (импульсных) колебаний, выпрямители, модуляторы и демодуляторы, параметрические стабилизаторы напряжения или тока, ограничители напряжения или тока, умножители частоты, преобразователи частоты, перемножители напряжений и многие другие. В этих случаях, когда нелинейность характеристик реального элемента является принципиально необходимой для функционирования устройства, учет нелинейности характеристик неизбежен..

Различают *резистивные* (сопротивления) и *реактивные* (индуктивности, емкости) нелинейные элементы. К резистивным нелинейным элементам относятся многие электровакуумные, ионные и полупроводниковые приборы, широко используемые в радиоэлектронике для усиления и преобразования сигналов. Нелинейной индуктивностью является катушка с ферромагнитным сердечником. Примерами нелинейной емкости могут служить такие приборы как вариконд, варикап и варактор.

Нелинейные элементы, характеристики которых отвечают условию $y(x) = -y(-x)$, где x – воздействие, а y – отклик, называют *нелинейными элементами с симметричными характеристиками*, а в противном случае – *нелинейными элементами с несимметричными характеристиками*. Если у нелинейного элемента с симметричными характеристиками поменять местами выводы, то это никак не повлияет на режим работы цепи. Симметричные характеристики имеют варисторы, бареттеры, симисторы, двухсторонние стабилитроны.



Наличие участка отрицательного сопротивления свидетельствует о том, что такие элементы могут отдавать энергию в цепь, т. е. они относятся к классу активных элементов. Вольт-амперную характеристику S -типа имеют неоновые лампы, газотроны, однопереходные транзисторы, тиристоры. Характеристику N -типа имеют туннельные диоды, диоды Ганна.

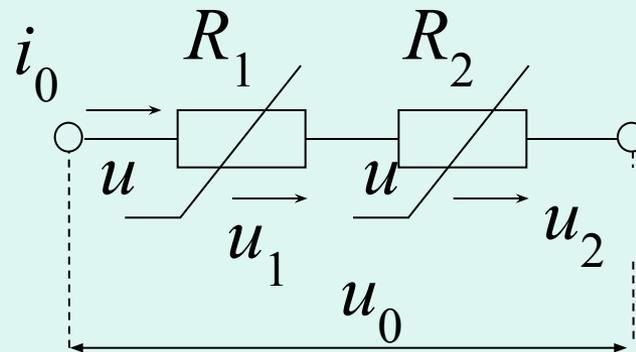
Цепи, содержащие хотя бы один резистивный нелинейный элемент и не содержащие реактивных элементов, называют *резистивными нелинейными цепями*. Процессы в резистивных нелинейных цепях описываются нелинейными алгебраическими уравнениями.

Цепи, содержащие хотя бы один реактивный нелинейный элемент или хотя бы один резистивный нелинейный элемент и хотя бы один реактивный элемент, называют *динамическими нелинейными цепями*. Процессы в динамических нелинейных цепях описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

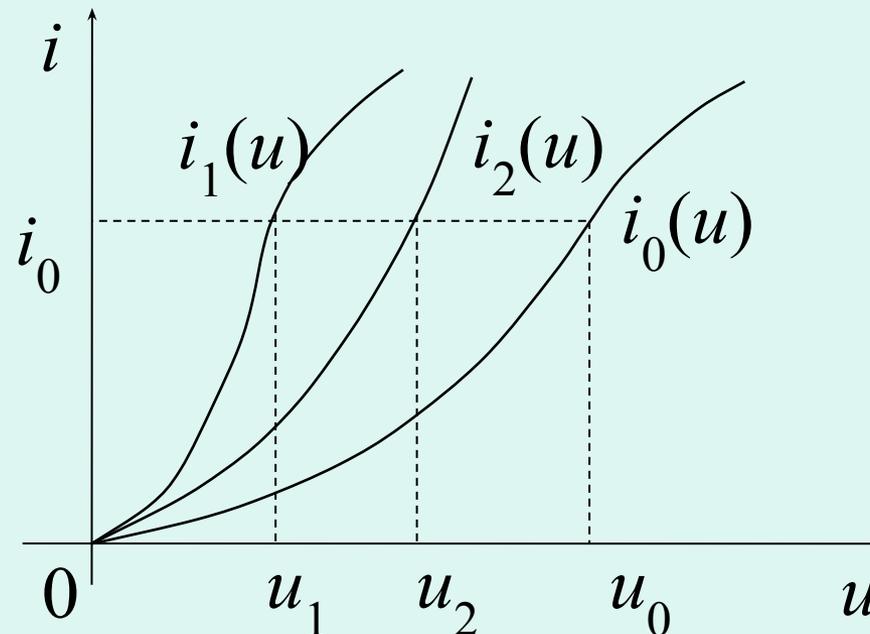
10.2. Эквивалентные преобразования цепей с нелинейными сопротивлениями

Рассмотрим цепь из двух последовательно включенных нелинейных сопротивлений R_1 и R_2 . Пусть через сопротивления R_1 и R_2 протекает ток i . Согласно второму закону Кирхгофа напряжение u на зажимах последовательно включенных R_1 и R_2 равно сумме напряжений на каждом из них:

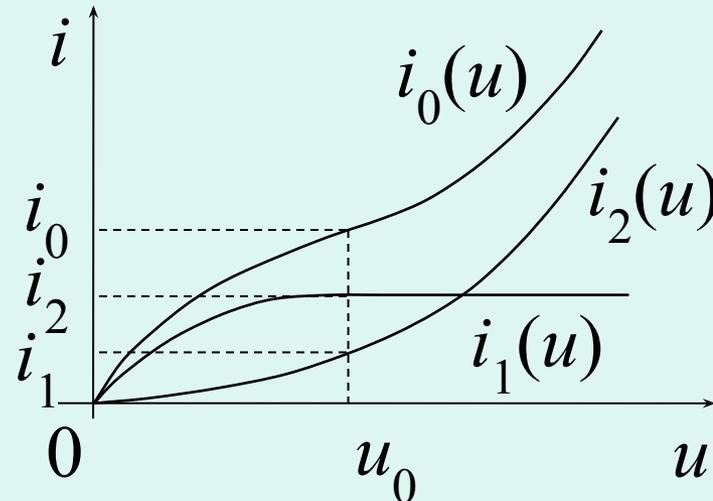
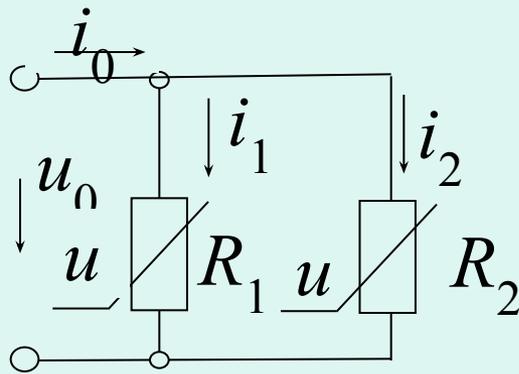
$$u(i) = u_1(i) + u_2(i).$$



Отсюда следует, что два последовательно включенных нелинейных сопротивления могут быть заменены одним нелинейным сопротивлением, вольт-амперная характеристика которого $i(u)$ получается суммированием напряжений $u_1(i)$ и $u_2(i)$ при $i_1 = i_2 = i$



Рассмотрим цепь из двух параллельно включенных сопротивлений R_1 и R_2



Пусть к сопротивлениям R_1 и R_2 приложено напряжение u . Согласно первому закону Кирхгофа ток i в общей части параллельно включенных R_1 и R_2 равен сумме токов в каждом из них:

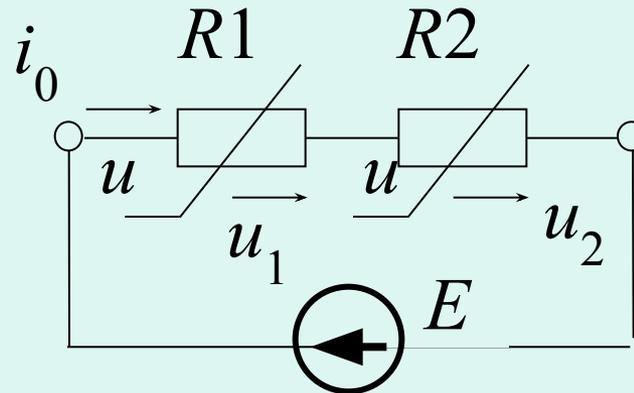
$$i(u) = i_1(u) + i_2(u).$$

Отсюда следует, что два параллельно включенных нелинейных сопротивления могут быть заменены одним нелинейным сопротивлением, вольт-амперная характеристика которого $i(u)$ получается суммированием токов $i_1(u)$ и $i_2(u)$ при $u_1 = u_2 = u$

10.3. Расчет нелинейных цепей постоянного тока

Расчет нелинейных цепей постоянного тока обычно сводится к нахождению токов и напряжений на элементах цепи по заданным параметрам независимых источников напряжения и тока.

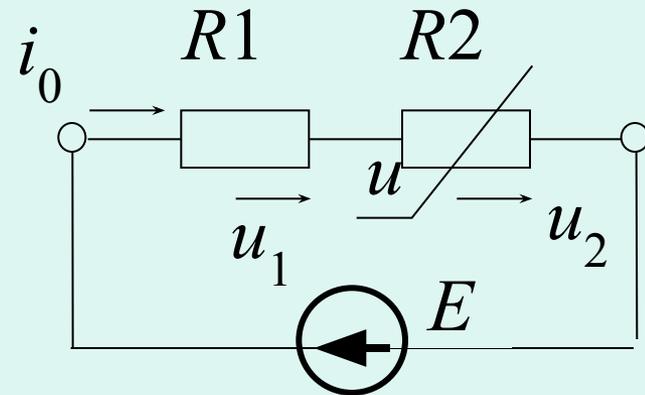
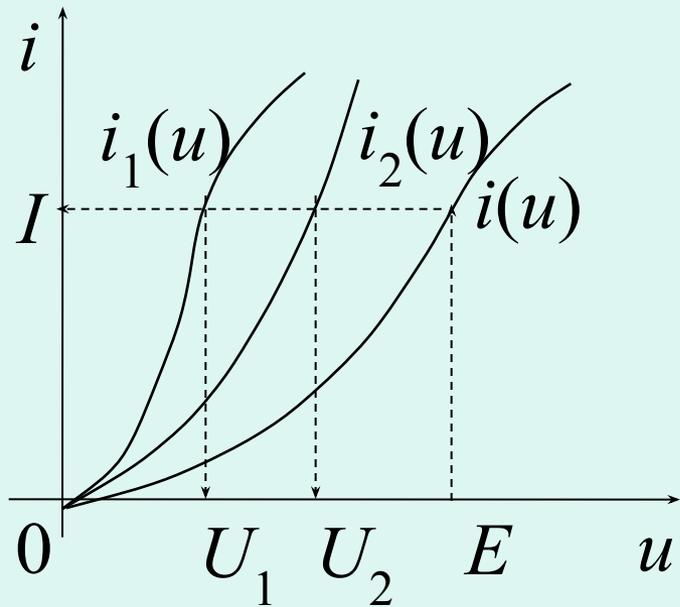
Рассмотрим цепь из двух последовательно включенных нелинейных сопротивлений $R1$ и $R2$, Найдем напряжения на сопротивлениях $R1$ и $R2$.



Задача может быть решена заменой последовательно включенных нелинейных сопротивлений $R1$ и $R2$ одним нелинейным сопротивлением:

- строим вольт-амперную характеристику суммарного сопротивления $i(u)$,
- по построенной вольт-амперной характеристике и заданному значению E находим ток I в цепи;
- зная ток I в цепи, по вольт-амперным характеристикам сопротивлений $R1$ и $R2$ находим напряжения $U1$ и $U2$.

Рассмотрим простой случай, когда нелинейным является лишь одно сопротивление из двух. Пусть это будет сопротивление R_2



Согласно второму закону Кирхгофа

$$U_2 = E - U_1 = E - I \cdot R_1,$$

т. е. зависимость напряжения U_2 от тока I является линейной функцией, график которой представляет собой прямую линию.

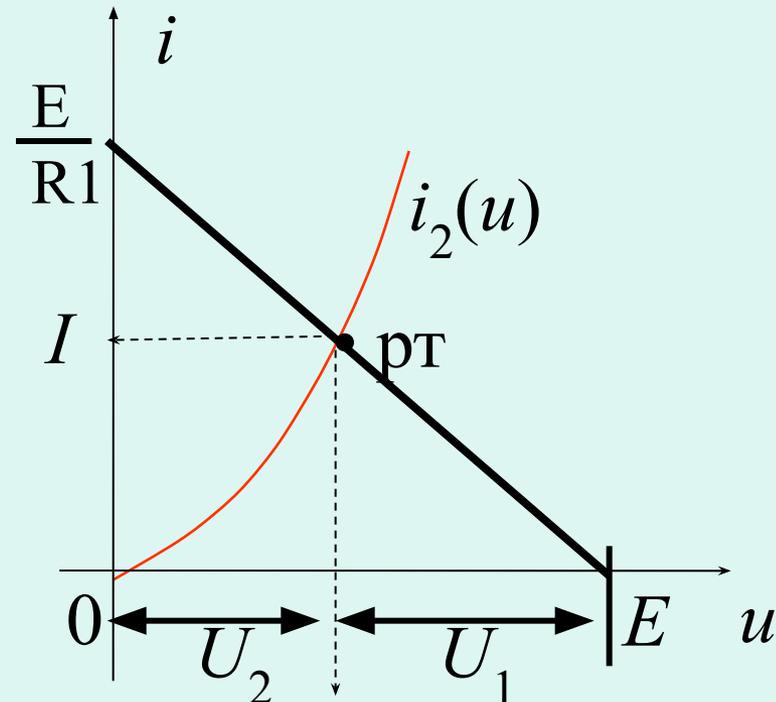
Построим эту прямую по отрезкам, отсекаемым на осях координат. При токе $I = 0$ напряжение $U_2 = E$. При напряжении $U_2 = 0$ ток $I = E / R_1$.

Построенную прямую называют *нагрузочной прямой по постоянному току*.

Линейное сопротивление R_1 рассматривается как нагрузка нелинейного сопротивления R_2 .

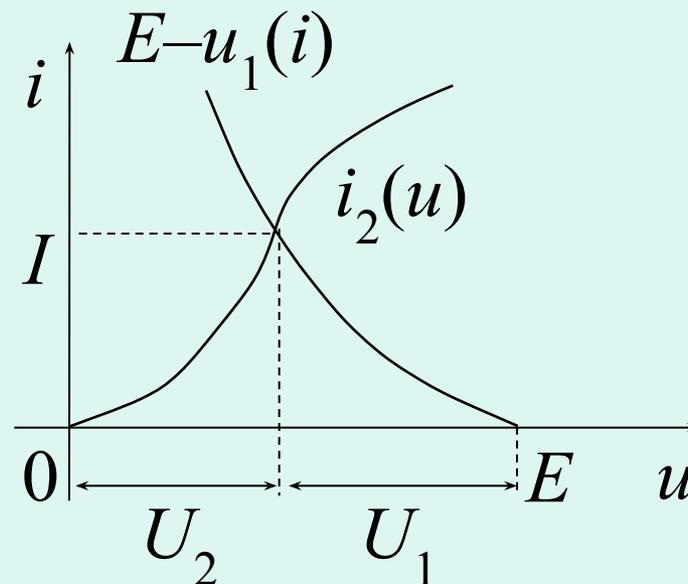
В цепи установится такой ток I , который будет лежать на нагрузочной прямой и на вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления R_2 , т. е. искомые ток I и напряжение U_2 представляют собой координаты точки пересечения нагрузочной прямой с вольт-амперной характеристикой нелинейного сопротивления R_2 .

Эту точку называют **рабочей точкой** нелинейного элемента.



Очевидно, что изложенную методику можно использовать при расчете последовательной цепи, когда оба сопротивления R_1 и R_2 являются нелинейными. В этом случае ток I и напряжение U_2 можно найти как координаты точки пересечения вольт-амперной характеристики нелинейного сопротивления R_2 с *нагрузочной кривой*

$$u_2 = E - u_1(i)$$



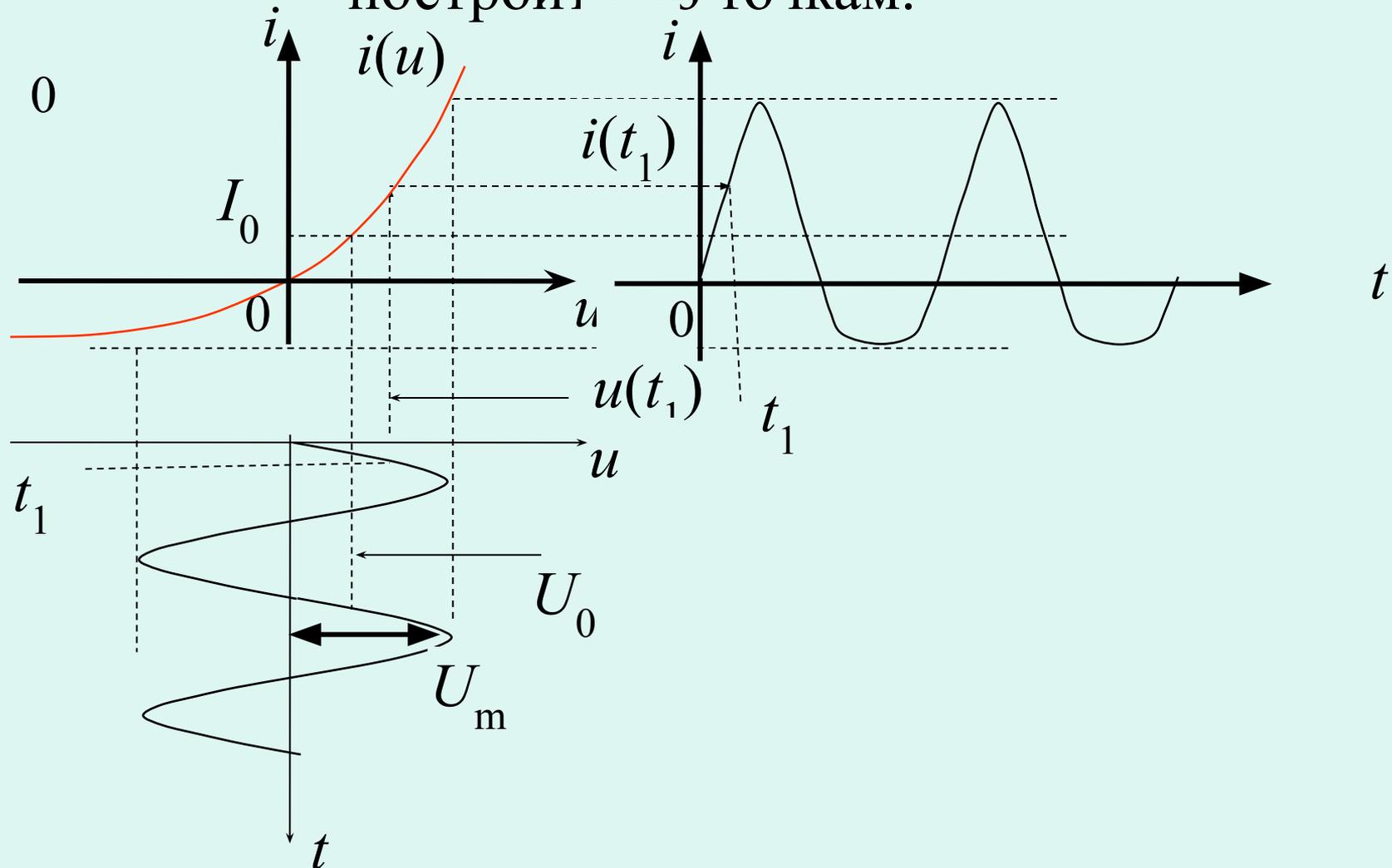
10.4. Нелинейное сопротивление при произвольном воздействии

Пусть к нелинейному сопротивлению приложено напряжение $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, представляющее собой сумму постоянной составляющей U_0 и переменной гармонической составляющей $U_m \sin \omega t$. Напряжение U_0 называют *напряжением смещения*.

Напряжение смещения задает рабочую точку на вольт-амперной характеристике нелинейного сопротивления.

Нас будет интересовать форма тока в нелинейном сопротивлении.

Форму тока в нелинейном сопротивлении можно
 построить по точкам.



Чтобы построить мгновенное значение тока в момент времени t_1 , необходимо по временной диаграмме напряжения найти мгновенное значение напряжения $u_1 = u(t_1)$ и спроецировать это значение на вольт-амперную характеристику нелинейного сопротивления. Полученное значение тока $i_1 = i(t_1)$ следует перенести в систему координат время – ток и построить точку с координатами (t_1, i_1) .

Если выполним такие построения для достаточно большого числа моментов времени и соединим построенные точки плавной кривой, то получим временную диаграмму тока в нелинейном сопротивлении.

Как видно из рис., ток в сопротивлении будет периодической функцией той же частоты, но иной формы. Если переменная составляющая напряжения была гармонической, то переменная составляющая тока будет негармонической, а следовательно, содержит высшие гармоники.

Искажения формы тока, обусловленные нелинейностью вольт-амперной характеристики сопротивления называют *нелинейными искажениями*.

Нелинейные искажения формы гармонического колебания количественно оценивают *коэффициентом гармоник*

$$k_{\tilde{a}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} I_{nm}^2}}{I_{1m}}$$

где n – номер гармоники;

I_{1m} – амплитуда первой гармоники тока;

I_{nm} – амплитуда n -ой гармоники тока.

Если бы вольт-амперная характеристика сопротивления была линейной, то числитель последнего выражения был бы равен нулю и коэффициент гармоник $k_{\Gamma} = 0$.

Чем нелинейнее вольт-амперная характеристика сопротивления, тем больше нелинейные искажения и коэффициент гармоник.

Характерные особенности нелинейных искажений:

- зависимость от амплитуды воздействия: чем больше амплитуда воздействия, тем больше искажения;
- в общем случае постоянная составляющая тока зависит от амплитуды воздействия и не равна току I_0 в рабочей точке.

Эти токи будут равны только в том случае, если вольт-амперная характеристика нелинейного сопротивления будет симметрична относительно рабочей точки.

Рассмотренный метод нахождения отклика нелинейной цепи называют *методом проекций*. Мы рассмотрели метод проекций при воздействии напряжения $u(t) = U_0 + U_m \sin \omega t$, но очевидно, что метод проекций применим при произвольном воздействии.

В электронике часто встречается режим работы нелинейного элемента, когда переменная составляющая напряжения на нем столь мала ($U_m \ll U_0$), что всеми высшими гармониками тока можно пренебречь и ограничиться рассмотрением только первой гармоники. Это означает, что реальную вольт-амперную характеристику нелинейного элемента в некоторой окрестности рабочей точки можно заменить касательной.

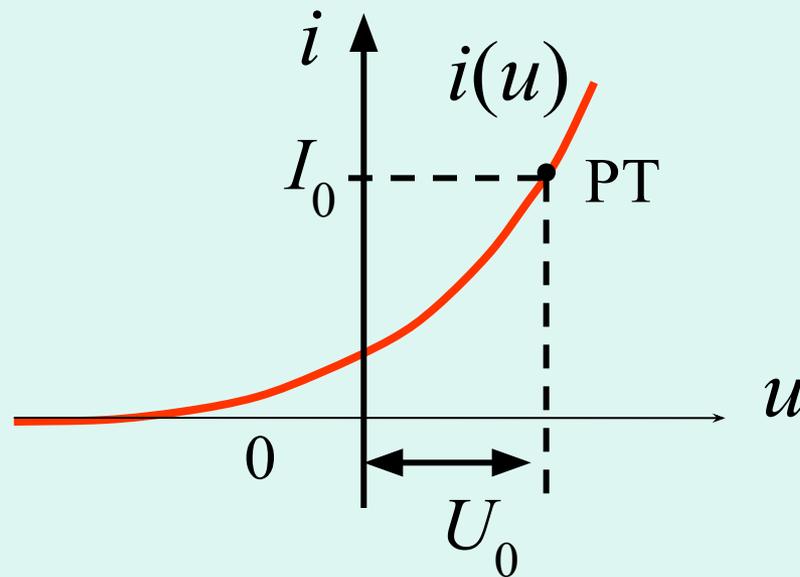
Эту процедуру называют *линеаризацией* вольт-амперной характеристики, а такой режим работы нелинейного элемента – *режимом малого сигнала*.

В противном случае, когда линеаризация вольт-амперной характеристики становится невозможной, режим работы нелинейного элемента называют *режимом большого сигнала*.

В режиме малого сигнала переменные составляющие напряжения и тока связаны между собой дифференциальным сопротивлением $r = du/di$. Нелинейность цепи в режиме малого сигнала проявляется в том, что дифференциальное сопротивление r зависит от выбора положения рабочей точки.

Анализ нелинейной цепи в режиме малого сигнала проводят в два этапа.

На первом этапе выполняют анализ цепи по постоянному току, в результате которого находят постоянные напряжения и токи, действующие в цепи.



На втором этапе выполняют анализ цепи по переменному току, при этом нелинейные резистивные элементы заменяют их дифференциальными сопротивлениями (или проводимостями) в рабочей точке. Очевидно, что схема замещения цепи по переменному току будет линейной.

В результате второго этапа находят переменные составляющие напряжений и токов, действующих в цепи.

Рассмотренный метод анализа нелинейной цепи в режиме малого сигнала называют *методом линеаризации в малом* или просто *методом линеаризации*.

10.5 Метод аппроксимации

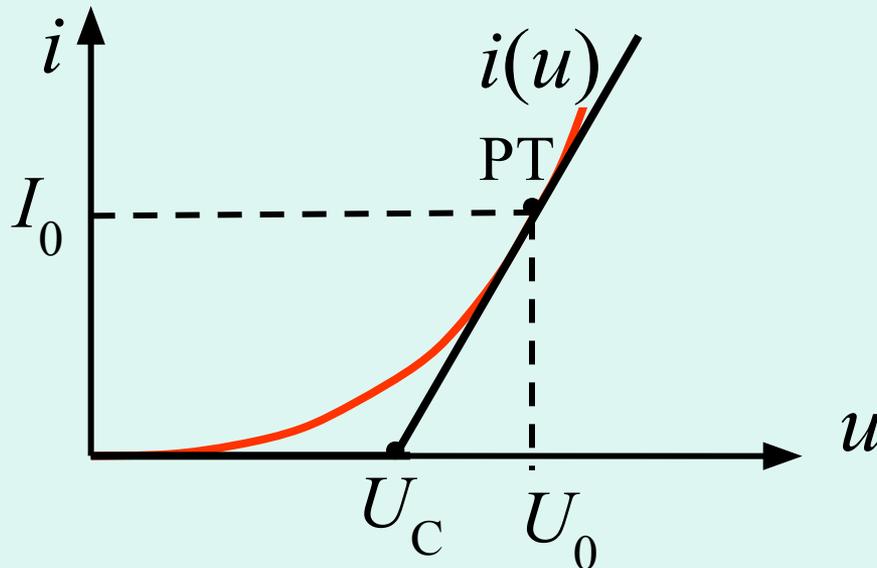
Для анализа и расчета нелинейной цепи в режиме “большого” сигнала используют метод аппроксимации вольт-амперной характеристики нелинейного элемента. Аппроксимация – это замена одних объектов другими математическими объектами, в том или ином смысле близкими к исходным.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства сложных нелинейных цепей, сводя задачу к изучению таких характеристик, которые относительно легко вычисляются.

Кусочно-линейная аппроксимация

Она является наиболее простой.

Метод основан на том, реальную характеристику нелинейного элемента разбивают на ряд участков, принимаемые за прямые линии. Эти линии проводят таким образом, чтобы они удовлетворительно совпадали с реальной кривой $i = f(u)$.



Кусочно-линейная аппроксимация

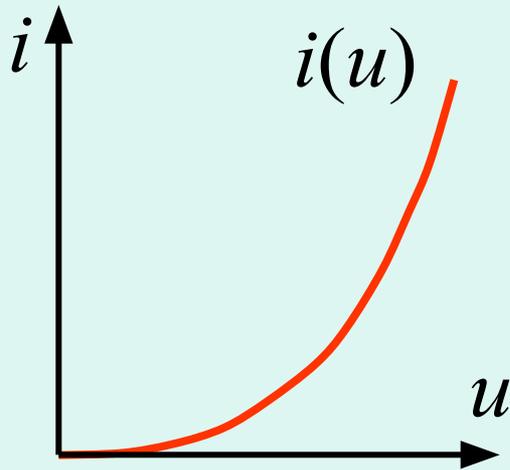
Если амплитуда процесса не выходит за пределы линейного участка, то процесс во всей цепи описывается совокупностью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При переходе процесса через точки излома коэффициенты этих уравнений изменяются.

Степенная аппроксимация

Одним из наиболее распространенных способов аппроксимации является степенная аппроксимация. Обычно аппроксимирующей степенной полином записывается в виде

$$i(u) = a_0 + a_1(u-U_0) + a_2(u-U_0)^2 + a_3(u-U_0)^3 + \dots,$$

где $a_0, a_1, a_2, a_3 \dots$ - неизвестные коэффициенты.



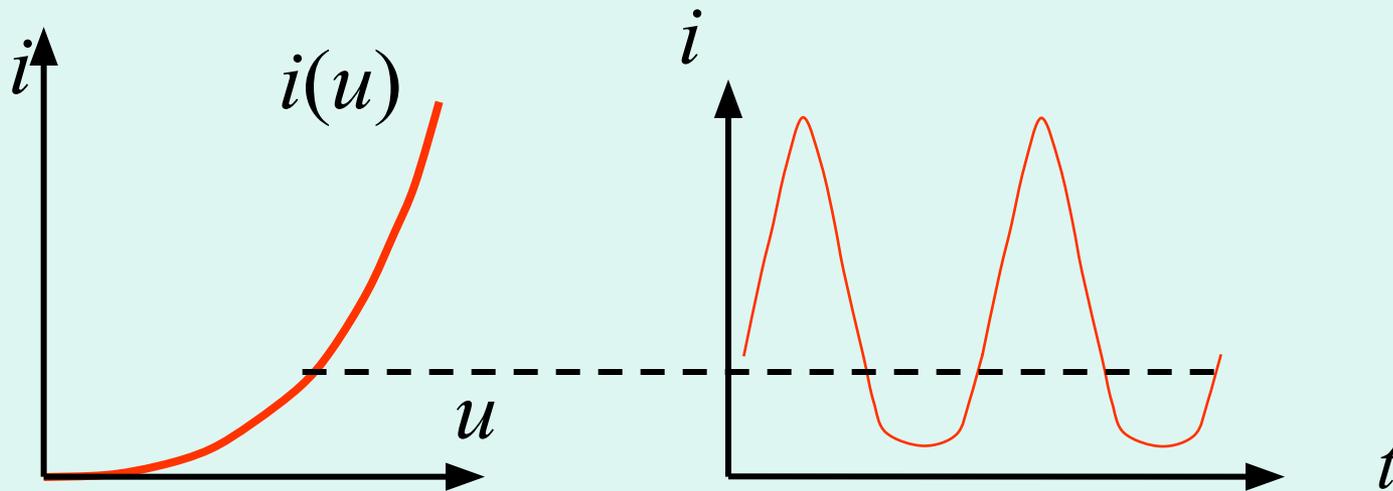
Рассматриваемая характеристика хорошо описывается квадратичной зависимостью

$$i(u) = a_1 u + a_2 u^2.$$

Степенная аппроксимация

$$i(u) = a_1 u + a_2 u^2.$$

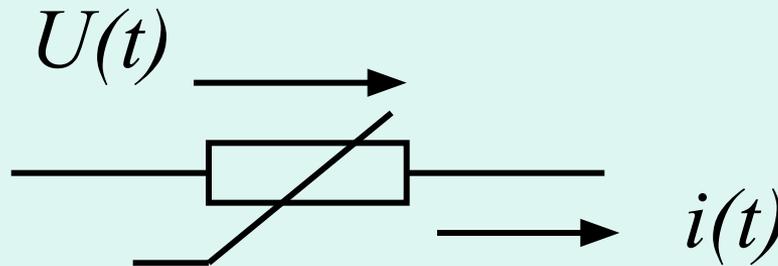
Наличие второй степени в уравнении говорит о том, что в сигнале появляется гармоника с удвоенной частотой по отношению к основной частоте.



Пример. ВАХ резистивного нелинейного двухполюсника аппроксимируется полиномом

$$i(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

Определить ток в нелинейном двухполюснике, если напряжение на его зажимах равно $u = U_m \sin(\omega t)$.



Решение. Подставим напряжение $U_m \sin(\omega t)$ в формулу аппроксимации ВАХ

$$i = a_0 + a_1 U_m \sin(\omega t) + a_2 [U_m \sin(\omega t)]^2 =$$

$$= 0.5(2a_0 + a_2 U_m^2) + a_1 U_m \sin(\omega t) + 0.5a_2 U_m^2 \sin(2\omega t - 90^\circ),$$

т.к. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, $\sin^2(x) = 0.5 - 0.5\cos(2x)$

Вводя обозначения

$$I_0 = (2a_0 + a_2 U_m^2), I_{m1} = a_1 U_m, I_{m2} = 0.5a_2 U_m^2,$$

окончательно получим

$$i(t) = 0.5I_0 + I_{m1} \sin(\omega t) + I_{m2} \sin(2\omega t - 90^\circ).$$

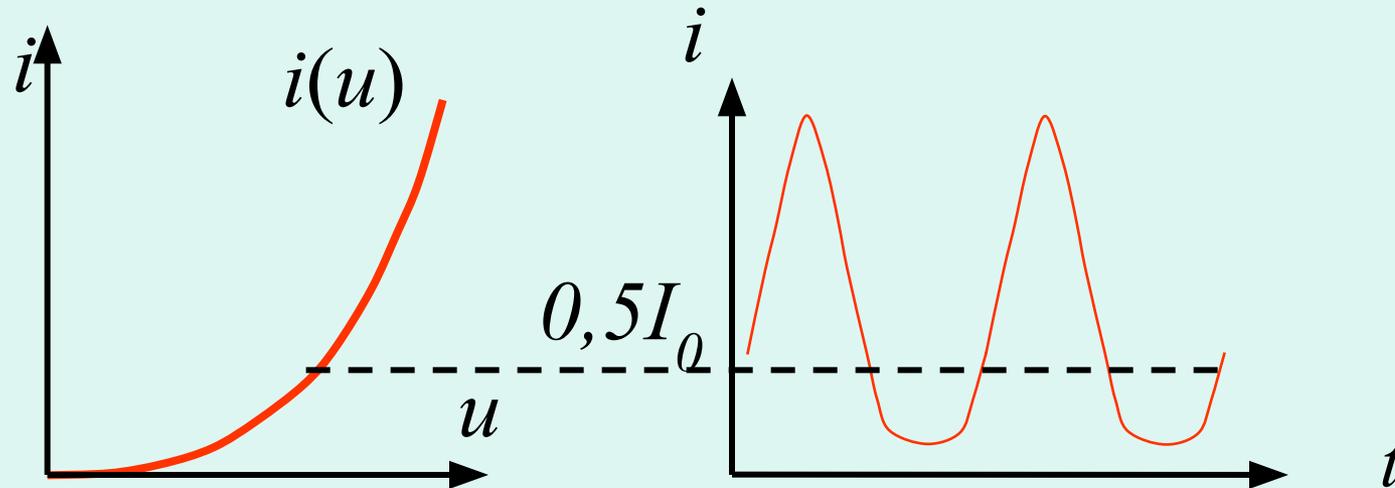
$$i(t) = 0.5I_0 + I_{m1}\sin(\omega t) + I_{m2}\sin(2\omega t - 90^\circ).$$

Полученное соотношение говорит о том, что в спектре тока содержится постоянная составляющая $0,5I_0$, первая гармоника (ωt) и вторая гармоника ($2\omega t$).

Заметим, что наибольшая частота гармоник 2ω равна степени полинома.

Из математики известно, что при четной степени полинома будут содержаться только четные гармоники, а при нечетной – только нечетные гармоники.

$$i(t) = 0.5I_0 + I_{m1}\sin(\omega t) + I_{m2}\sin(2\omega t - 90^\circ).$$



Связь между частотными и временными характеристиками

Установим связь между импульсными, переходными и спектральными характеристиками.

Пусть на вход линейной цепи действует дельта-импульс $\delta(t)$. Его спектральная плотность равна 1. Реакция цепи $g(t)$ на это единичное импульсное воздействие равна импульсной характеристике цепи:

$$g(t) = 1/2\pi \int H(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

где $H(j\omega)$ – комплексная передаточная функция цепи.

Связь между частотными и временными характеристиками

С другой стороны, обратное преобразование Фурье определено как:

$$f(t) = 1/2\pi \int F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Сравнивая эти две формулы, получим, что $H(j\omega)$ можно рассматривать как комплексную спектральную характеристику функции $g(t)$, т.е.

$$H(j\omega) = \int g(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Импульсная характеристика цепи $g(t)$ связана с комплексной передаточной функцией цепи $H(j\omega)$ преобразованием Фурье.

Связь между частотными и временными характеристиками

$H(j\omega)$ – представляет собой прямое преобразование Фурье для $g(t)$.

$g(t)$ – представляет собой обратное преобразование Фурье для $H(j\omega)$.

Заменяя $(j\omega)$ на p получим, что

$$H(p) = \int g(t) e^{-pt} dt \quad \text{или} \quad H(p) = g(t) .$$

Зная импульсную характеристику цепи $g(t)$, можно найти переходную характеристику $h(t)$.

$$h(t) = \int g(x) dx.$$

Связь между частотными и временными характеристиками

Переходная характеристика однозначно определяется частотными характеристиками цепи.

И обратно, импульсная характеристика (весовая функция) равна

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} + h(+0)\delta(t).$$

Вывод. Всякое изменение частотных характеристик линейной электрической цепи влечет за собой изменение соответствующих временных характеристик цепи и наоборот.

Условия безискаженной передачи сигналов через электрическую цепь

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять частотные характеристики цепи, чтобы сигнал, проходящий через цепь без искажения своей формы.



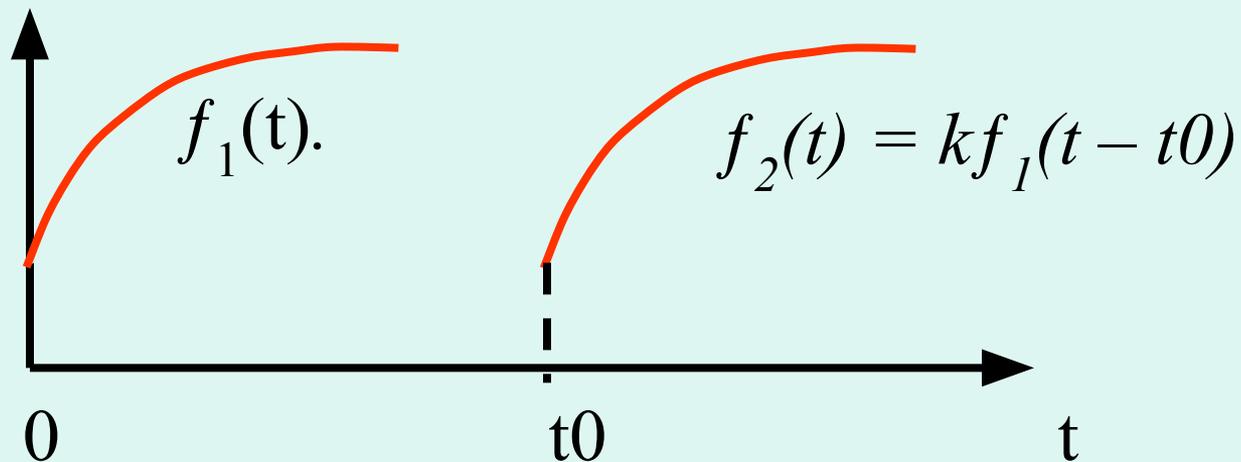
Условия безискаженной передачи сигналов
через электрическую цепь

Математическим условием неискаженной
передачи сигнала является

$$f_2(t) = kf_1(t - t_0),$$

где k – постоянный множитель,

t_0 – время запаздывания (задержка).



Условия безискаженной передачи сигналов
через электрическую цепь

Если форма сигнала остается неизменной, то передача сигнала называется **неискаженной**, а сама цепь называется **неискажающей**.

Перейдем к спектральным плотностям:

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \int f_1(t) e^{-j\omega t} dt, \\ F_2(j\omega) &= \int f_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int k f_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\ &= k \int f_1(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = k F_1(j\omega) e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

По теореме запаздывания.

Условия безискаженной передачи сигналов
через электрическую цепь

Таким образом, комплексная передаточная функция такой цепи описывается формулой

$$H(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)} = ke^{-j\omega t_0} = H(\omega)e^{-j\varphi(\omega)}.$$

Следовательно, для неискаженной передачи сигналов частотные характеристики электрической цепи должны быть такими:

$$\text{АЧХ: } H(\omega) = k \text{ и } \text{ФЧХ} - \varphi(\omega) = -\omega t_0.$$

Условия безискаженной передачи сигналов
через электрическую цепь

Для неискаженной передачи сигналов
частотные характеристики электрической цепи
такие:

$$\text{АЧХ: } H(\omega) = k \quad \text{и} \quad \text{ФЧХ: } \varphi(\omega) = -\omega t_o .$$

