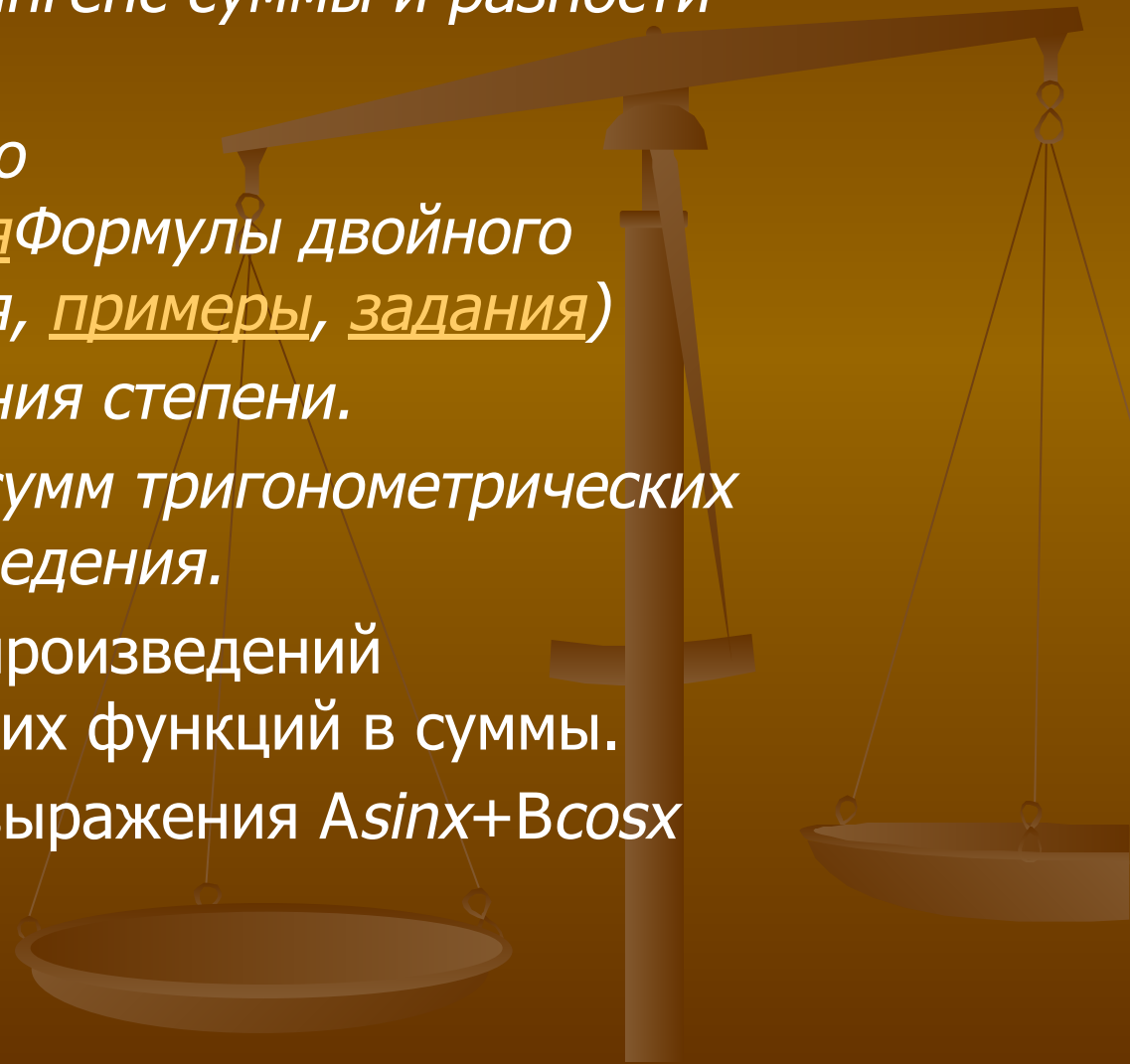


*Преобразование
тригонометрических
выражений*



Учебные элементы

1. Синус, косинус, тангенс суммы и разности аргументов.
2. Формулы двойного аргумента. (теория Формулы двойного аргумента. (теория, примеры, задания))
3. Формулы понижения степени.
4. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения.
5. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы.
6. Преобразование выражения $A\sin x + B\cos x$ к виду $C\sin(x+t)$



Синус двойного аргумента

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

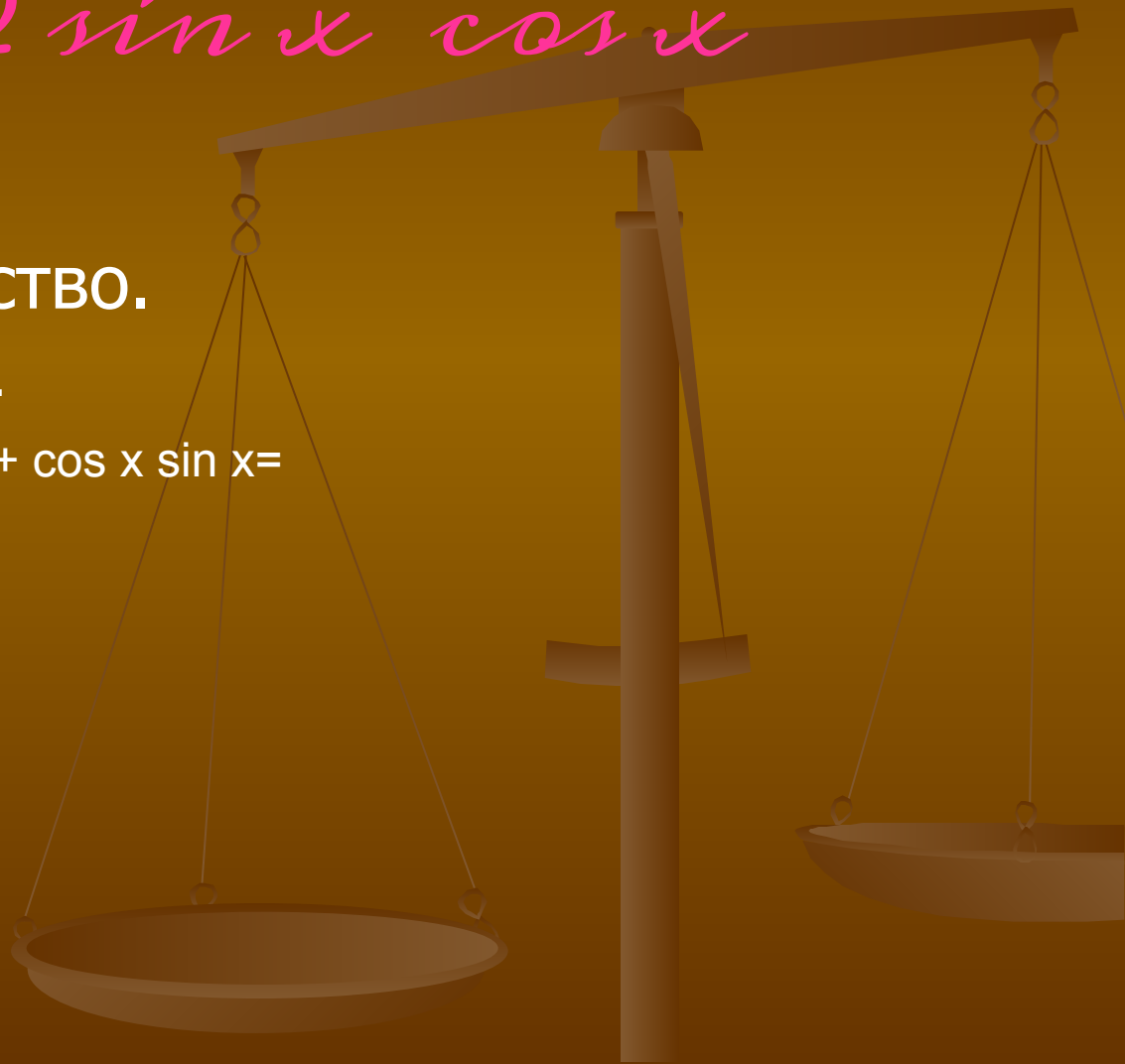
Доказательство.

Рассмотрим выражение $\sin 2x$.

$$\sin 2x = \sin (x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x =$$

$$= 2 \sin x \cos x.$$

Тождество доказано.



Косинус двойного аргумента

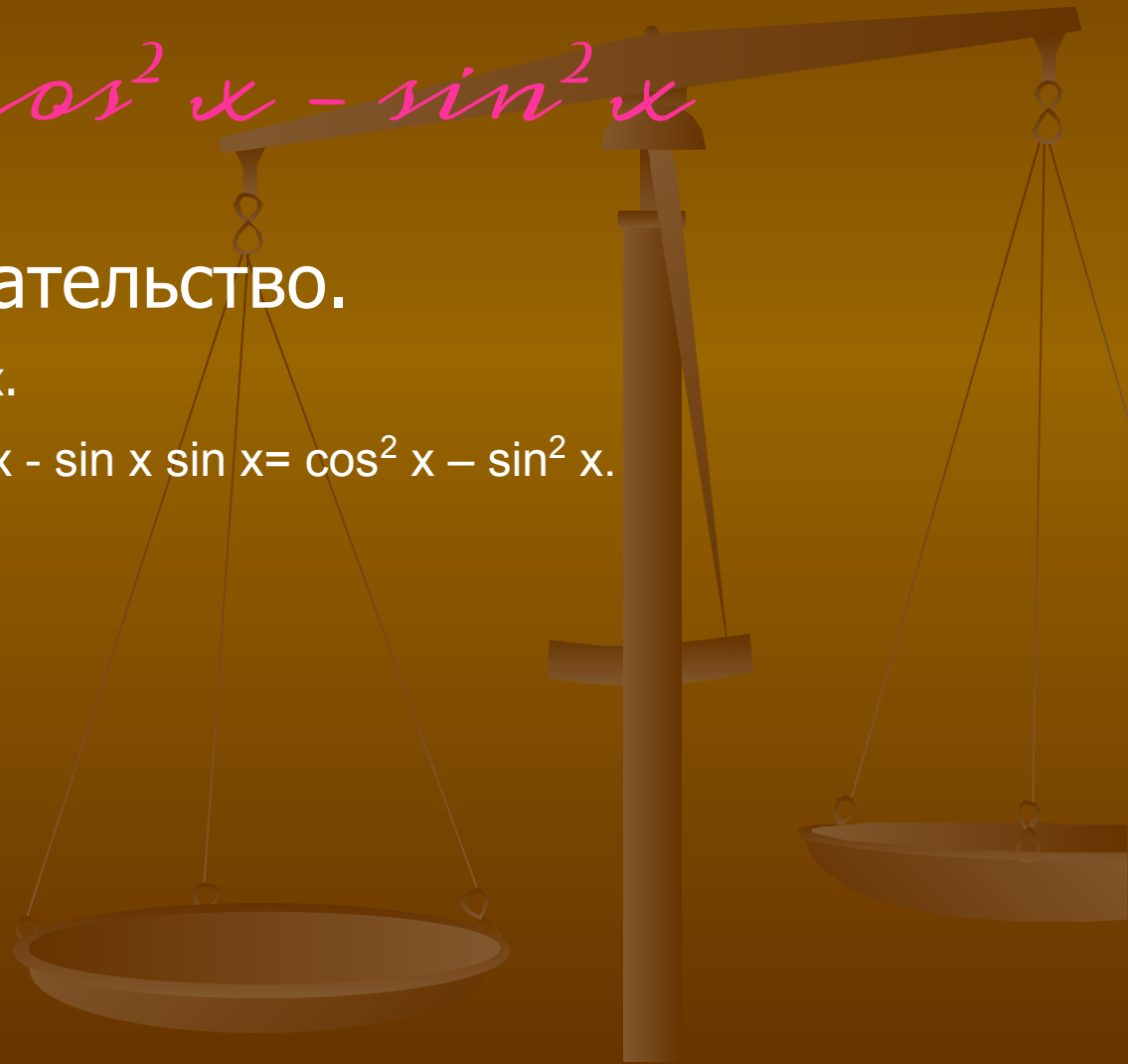
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение $\cos 2x$.

$$\cos 2x = \cos (x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Тождество доказано.



Тангенс двойного аргумента

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Доказательство.

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg} 2x$.

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x + x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

Тождество доказано.

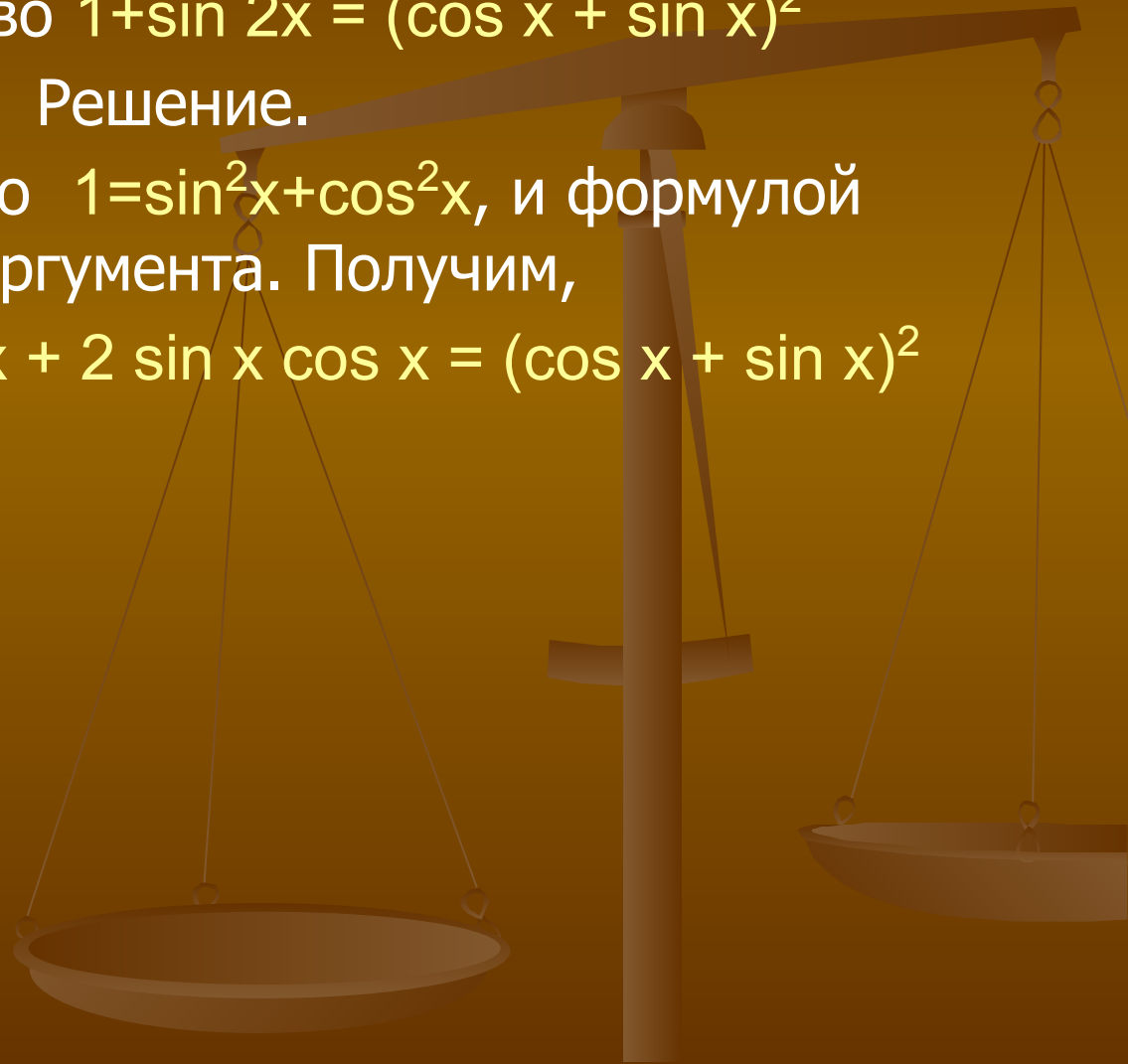
Примеры

1. Доказать тождество $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$

Решение.

Воспользуемся тем, что $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, и формулой синуса двойного аргумента. Получим,

$$1 + \sin 2x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = (\cos x + \sin x)^2$$



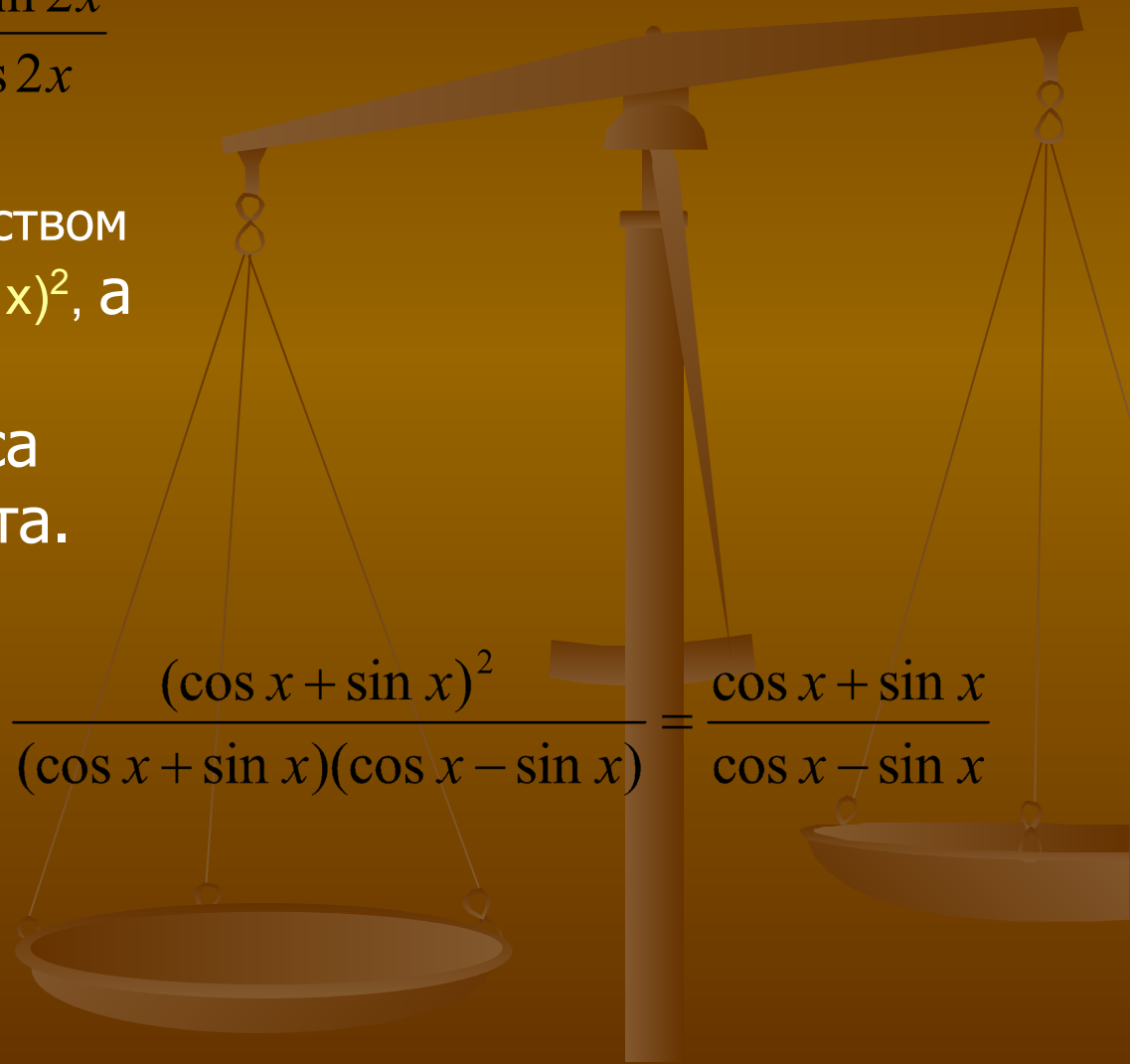
Примеры

2. Сократить дробь $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

Решение. $\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$

В числителе дроби воспользуемся тождеством $1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$, а в знаменателе формулой косинуса двойного аргумента. Получим,

$$\frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$



Примеры

3. Вычислить $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$
Решение.

Заданное выражение представляет собой правую часть формулы косинуса двойного аргумента, но только не хватает множителя 2. Введя его получим:

$$\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 0,5 \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = 0,5 \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{12} \right) = 0,5 \sin \frac{\pi}{6} = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

Примеры

4. Доказать тождество $tgx + ctgx = \frac{2}{\sin 2x}$

Решение.

Преобразуем левую часть доказываемого тождества:

$$tgx + ctgx = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Умножив и числитель, и знаменатель последней дроби на 2, получим:

$$\frac{2}{2 \cos x \sin x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Что и требовалось доказать.

Примеры

5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и что $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ вычислить $\sin 2x$
Решение.

Значение $\cos x$ дано в условии, а значение $\sin x$ найдём следующим образом:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

Это значит, что $\sin x = \frac{4}{5}$ или $\sin x = -\frac{4}{5}$

Аргумент x принадлежит четвёртой четверти, а в ней синус отрицателен. Это значит надо выбрать $\sin x = -\frac{4}{5}$

Теперь можно вычислить $\sin 2x$:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

Примеры

5. Зная, что $\cos x = \frac{3}{5}$ и что $x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ вычислить $\sin(\frac{\pi}{2} + 4x)$

Решение.

Воспользуемся формулой приведения: $\sin(\frac{\pi}{2} + 4x) = \cos 4x$

Применим к выражению $\cos 4x$ формулу косинуса двойного аргумента: $\cos 4x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Из предыдущих примеров нам известны значения $\cos 2x$ и $\sin 2x$.

Вычисляем:

$$\cos 4x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = -\frac{527}{625}$$

Примеры

6. Решить уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$

Решение.

$$\sin 4x - \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x (2 \sin 2x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \text{ или } 2 \sin 2x - 1 = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

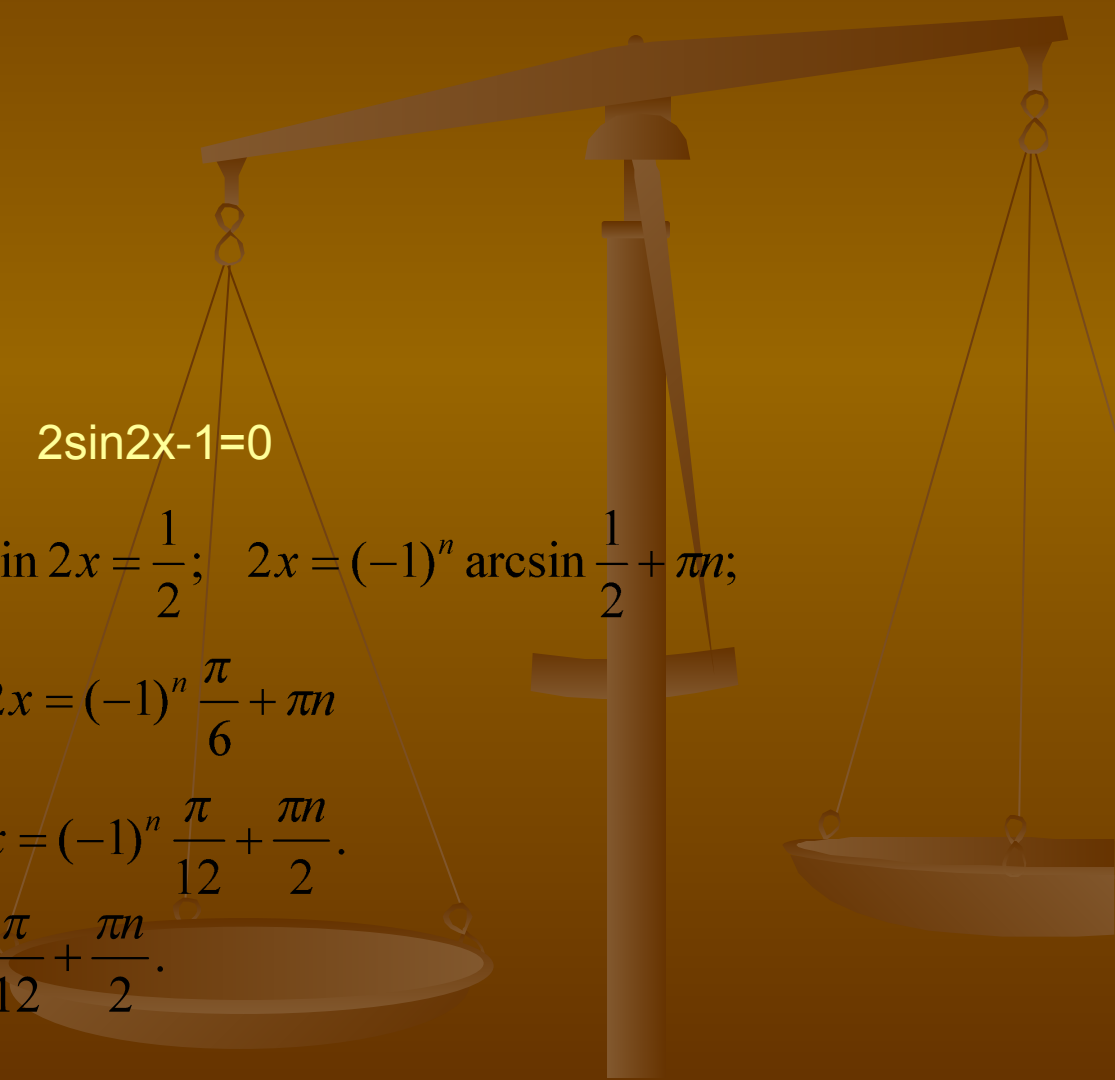
$$2 \sin 2x - 1 = 0$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}; \quad 2x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n;$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \quad x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}.$



Задания. 1 блок.

1. Упростите выражение $\frac{\sin 2t}{\cos t} - \sin t$

Ответы: а) sint Ответы: а) sint; б) cost Ответы: а) sint; б) cost; в) tg Ответы: а) sint; б) cost; в) tg; г) sin²t

2. Известно, что $\sin t = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ Найдите $\operatorname{tg} 2t$

Ответы: а) 120/169 Ответы: а) 120/169; б) -120/169 Ответы: а) 120/169; б) -120/169; в) 150/333 Ответы: а) 120/169; б) -120/169; в) 150/333; г) 0

3. Решите уравнение $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{2}$

Задания. 2 блок.

Вычислите

$$\frac{1 - \cos 25^\circ + \cos 50^\circ}{\sin 50^\circ + \sin 25^\circ} - \operatorname{tg} 65^\circ$$

Ответы: а) 2 Ответы: а) 2 б) 0 Ответы: а) 2 б) 0 с)
1 Ответы: а) 2 б) 0 с) 1 д) -1 Ответы: а) 2 б) 0 с) 1 д)
-1

Задания. 3 блок.

Решите уравнение $26\sin x \cos x - \cos 4x + 7 = 0$

Ответы: а)

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

с)

$$(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}.$$

б)

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n;$$

$$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

д)

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

