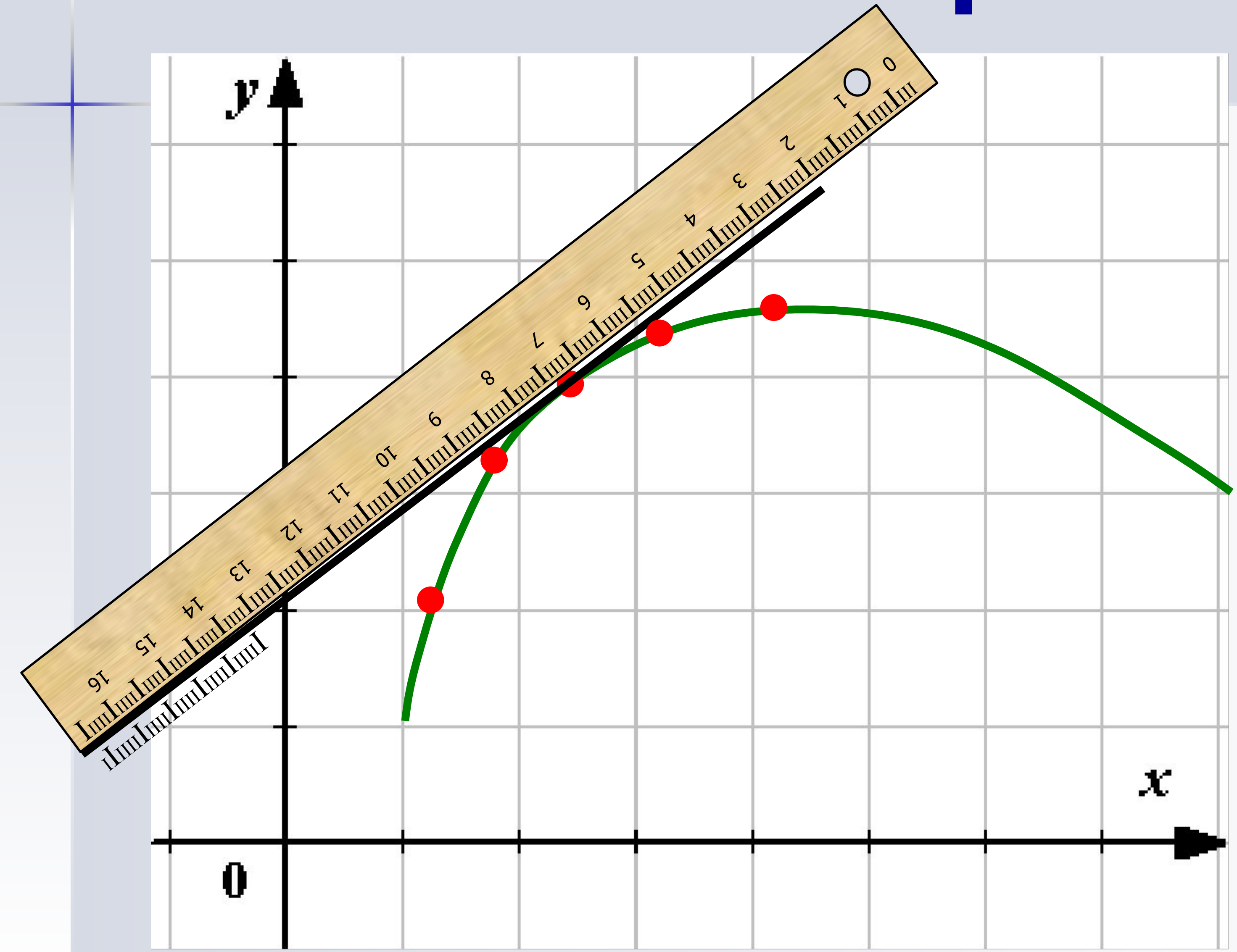

~~Е~~
Н
А
я
~~Ы~~

# Производна

# я

# Касательная к кривой



# Механический смысл производной:

$$v_{ср.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

*При* $\Delta t \to 0 \;\; v_{ср.} \to$ *к мгновенной скорости* $v(t)$,

*следовательно,* $v(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = v(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = v(t)$$

$$f'(x) = v(x)$$

# Задача по химии:

Пусть количество вещества, вступившего в химическую реакцию задается зависимостью:

$$p(t) = t^2/2 + 3t - 3 \text{ (моль)}$$

Найти скорость химической реакции через 3 секунды.

# Решение:

| Понятие на языке химии | Обозначение | Понятие на языке математики |
|---|---|---|
| Количество в-ва в момент времени $t_0$ | $p = p(t_0)$ | Функция |
| Интервал времени | $\Delta t = t - t_0$ | Приращение аргумента |
| Изменение количества в-ва | $\Delta p = p(t_0 + \Delta t) - p(t_0)$ | Приращение функции |
| Средняя скорость химической реакции | $\Delta p / \Delta t$ | Отношение приращёния функции к приращёнию аргумента |

$$\boxed{V(t) = p'(t)}$$

# Задача по биологии:

**По известной зависимости численности популяции x (t) определить относительный прирост в момент времени t.**

**Популяция** – это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.

# Решение:

| Понятие на языке биологии | Обозначение | Понятие на языке математики |
|---|---|---|
| Численность в момент времени $t_1$ | $x = x(t)$ | Функция |
| Интервал времени | $\Delta t = t_2 - t_1$ | Приращение аргумента |
| Изменение численности популяции | $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$ | Приращение функции |
| Скорость изменения численности популяции | $\Delta x/\Delta t$ | Отношение приращения функции к приращению аргумента |
| Относительный прирост в данный момент | $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t$ | Производная $\boxed{P = x'(t)}$ |

# Рост численности населения

Задача :

- Вывести формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени $t$.

# Решение:

Пусть $y=y(t)$- численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t=t-t_0$

$\Delta y=k\, y\, \Delta t$, где $к=к_р – к_с$ –коэффициент прироста ($к_р$ – коэффициент рождаемости,

$к_с$ – коэффициент смертности)

$\Delta y/ \Delta t=k\, y$

При $\Delta t \to 0$ получим $\lim \Delta y/ \Delta t=y'$

$$y'=к\, y$$

***«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»***

***Н.И. Лобачевский***

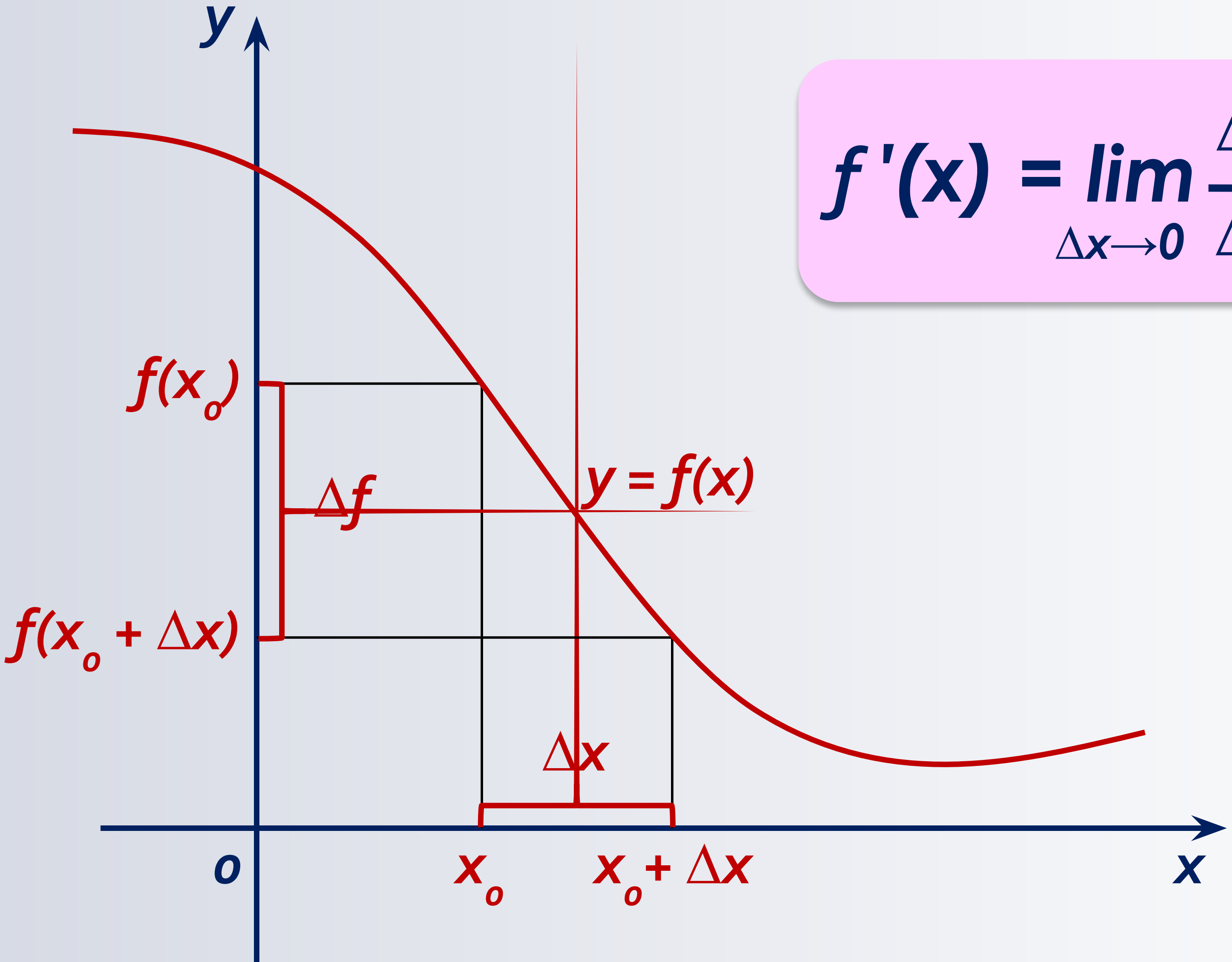
# Понятие производной

*Производной функции y = f(x), заданной на некотором интервале (a; b), в некоторой точке x этого интервала называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

*Нахождение производной называют дифференцированием*

# Понятие производной




$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

# Алгоритм нахождения производной

1. *Зафиксировать значение $x_o$, найти $f(x_o)$.*
2. *Дать аргументу $x_o$ приращение $\Delta x$, перейти в новую точку $x_o + \Delta x$, найти $f(x_o + \Delta x)$.*
3. *Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.*
4. *Составить отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
5. *Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.*
6. *Этот предел и есть $f'(x_o)$.*

# Примеры

**1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке $x_o$**

1. $f(x_o) = kx_o + b$
2. $f(x_o + \Delta x) = k(x_o + \Delta x) + b$
3. $\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = k(x_o + \Delta x) + b - (kx_o + b) =$
$= kx_o + k \cdot \Delta x + b - kx_o - b = k \cdot \Delta x$
4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (k) = k$

$$(kx + b)' = k$$

# Примеры

***2. Найти производную функции y = C (C – const) в точке*** $x_o$

1. $f\left(x_o\right) = C$

2. $f\left(x_o + \Delta x\right) = C$

3. $\Delta f = f\left(x_o + \Delta x\right) - f\left(x_o\right) = C - C = 0$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$

$$\left(C\right)' = 0$$

# Примеры

***3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке $x_o$***

$$1.\ f(x_o) = (x_o)^2$$

$$2.\ f(x_o + \Delta x) = (x_o + \Delta x)^2$$

$$3.\ \Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = (x_o + \Delta x)^2 - (x_o)^2 =$$

$$= x_o^2 + 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_o^2 = 2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_o \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_o + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_o + \Delta x$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_o + \Delta x) = 2x_o$$

$$\boxed{(x^2)' = 2x}$$

# Примеры

*4. Найти производную функции* $y=\sqrt{x}$ *в точке* $x_o$

1. $f(x_o)=\sqrt{x_o}$
2. $f(x_o+\Delta x)=\sqrt{x_o+\Delta x}$
3. $\Delta f=f(x_o+\Delta x)-f(x_o)=\sqrt{x_o+\Delta x}-\sqrt{x_o}=$

$$=\frac{\left(\sqrt{x_o+\Delta x}-\sqrt{x_o}\right)\left(\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}\right)}{\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}}=\frac{\left(\sqrt{x_o+\Delta x}\right)^2-\left(\sqrt{x_o}\right)^2}{\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}}=$$

$$=\frac{x_o+\Delta x-x_o}{\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}}$$

4. $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{x_o+\Delta x}+\sqrt{x_o}}$

# Примеры

*4. Найти производную функции* $y = \sqrt{x}$ *в точке* $x_o$

4. $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}$$

5. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_o + \Delta x} + \sqrt{x_o}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x_o}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

# Примеры

***5. Найти производную функции y = 1/x в точке $x_o$***

$$1.\ f\left(x_o\right)=\frac{1}{x_o}$$

$$2.\ f\left(x_o+\Delta x\right)=\frac{1}{x_o+\Delta x}$$

$$3.\ \Delta f=f\left(x_o+\Delta x\right)-f\left(x_o\right)=\frac{1}{x_o+\Delta x}-\frac{1}{x_o}=$$

$$=\frac{x_o-\left(x_o+\Delta x\right)}{x_o\left(x_o+\Delta x\right)}=\frac{-\Delta x}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}$$

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2+x_o\cdot\Delta x\right)}=\frac{-1}{x_o^2+x_o\cdot\Delta x}$$

# Примеры

***5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке $x_o$***

$$4.\ \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x\left(x_o^2 + x_o \cdot \Delta x\right)} = \frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}$$

$$5.\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{-1}{x_o^2 + x_o \cdot \Delta x}\right) = -\frac{1}{x_o^2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

# Таблица производных

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $\sqrt{x}$ | $1/(2\sqrt{x})$ |
| $kx + b$ | $k$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $x^2$ | $2x$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\mathrm{tg}\, x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $1/x$ | $-1/x^2$ | $\mathrm{ctg}\, x$ | $-1/\sin^2 x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\ln x$ | $1/x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\log_a x$ | $1/(x \ln a)$ |

# Физический ( механический ) смысл производной

*Если при прямолинейном движении путь $s$, пройденный точкой, есть функция от времени $t$, т. е. $s = s(t)$, то скорость точки есть производная от пути по времени, т.е. $v(t) = s'(t)$.*

*Производная выражает мгновенную скорость в момент времени $t$.*

# Правила нахождения производной

*1. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их сумма u(x) + v(x) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(u + v)' = u' + v'$$

*2. Если функция u(x) имеет в точке x производную и C – данное число, то функция C·u(x) также имеет в этой точке производную, причем*

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

# Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке $x$ производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке $x$ производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

# Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке $x$ производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

# Производная сложной функции

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

## Примеры:

1. $((5x-3)^3)' = 3(5x-3)^2\cdot(5x-3)' =$
   $= 3(5x-3)^2\cdot 5 = 15(5x-3)^2$

2. $(\sin(4x+8))' = \cos(4x+8)\cdot(4x+8)' =$
   $= \cos(4x+8)\cdot 4 = 4\cos(4x+8)$

# Вычислить производную в указанной точке

| Функция | Точка | Ответ |
|---|---|---|
| 1) $y = x^3 + x^2$ | $x_0 = 1$ | |
| 2) $y = \frac{32}{x} - \sqrt{x}$ | $x_0 = 4$ | |
| 3) $y = 4x^2 - 15x + 49$ | $x_0 = 0$ | |
| 4) $y = \sin x + tgx + \frac{3}{4}x$ | $x_0 = \pi$ | |
| 5) $y = 6\sqrt{x}(2x-1)$ | $x_0 = 9$ | |
| 6) $y = (3x+2)^2$ | $x_0 = -2$ | |
| 7) $y = \sqrt{5x-1}$ | $x_0 = 1$ | |
| 8) $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ | $x_0 = 0$ | |
| 9) $y = -x^4 + 129$ | $x_0 = -1$ | |
| 10) $y = \frac{2}{3}x^3 - 87$ | $x_0 = -4$ | |
| 11) $y = 35$ | $x_0 = 7$ | |
| 12) $y = -2\cos 5x$ | $x_0 = \frac{\pi}{10}$ | |
| | | |

Вычислить производную в указанной точке

| Функция | Точка | Ответ |
|---|---|---|
| $x^3+x^2$ | $x_0=1$ | **5** |
| $\frac{32}{x}-\sqrt{x}$ | $x_0=4$ | $-2\frac{1}{4}$ |
| $4x^2-15x+49$ | $x_0=0$ | **- 15** |
| $\sin x+tgx+\frac{3}{4}x$ | $x_0=\pi$ | $\frac{3}{4}$ |
| $6\sqrt{x}(2x-1)$ | $x_0=9$ | **53** |
| $(3x+2)^2$ | $x_0=-2$ | **- 24** |
| $\sqrt{5x-1}$ | $x_0=1$ | $1\frac{1}{4}$ |
| $\frac{2x+3}{2x-1}$ | $x_0=0$ | **-8** |
| $-x^4+129$ | $x_0=-1$ | **4** |
| $\frac{2}{3}x^3-87$ | $x_0=-4$ | **32** |
| $35$ | $x_0=7$ | **0** |
| $-2\cos 5x$ | $x_0=\frac{\pi}{10}$ | **10** |
| | | |

*Если функция **имеет производную (дифференцируема)** в точке **х**, то она **непрерывна** в этой точке.*

# Найдите производную функции:

а) $y = x^7$;

б) $y = 5$;

в) $y = -\frac{6}{x}$;

г) $y = 4x + 5$;

д) $y = \sin x + \frac{\sqrt{x}}{2}$.

а) $y = \frac{\cos x}{x}$;

б) $y = x \operatorname{tg} x$;

в) $y = (3x - 4)^6$.

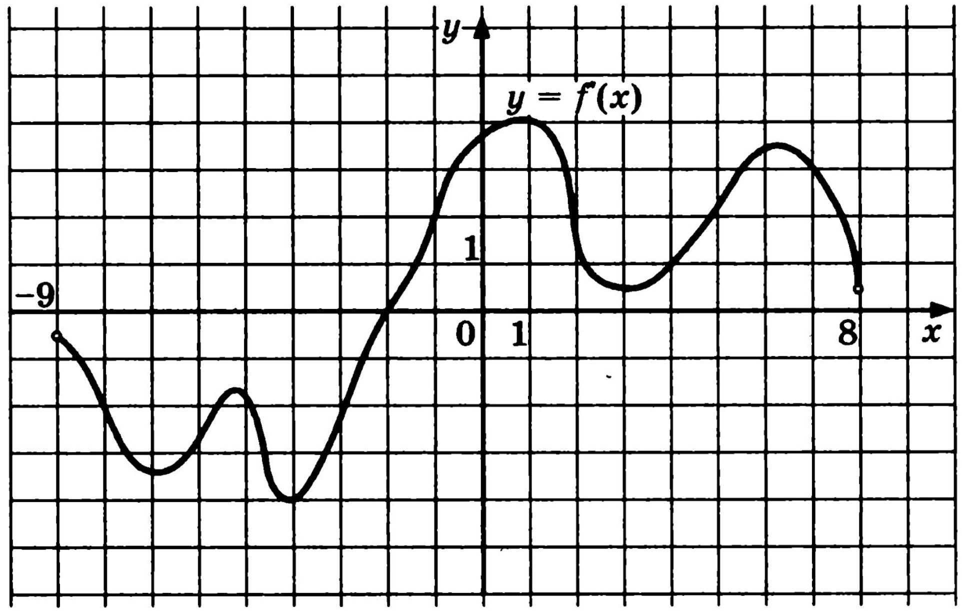
Прямая $y = 6x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Прямая $y = 4x + 9$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

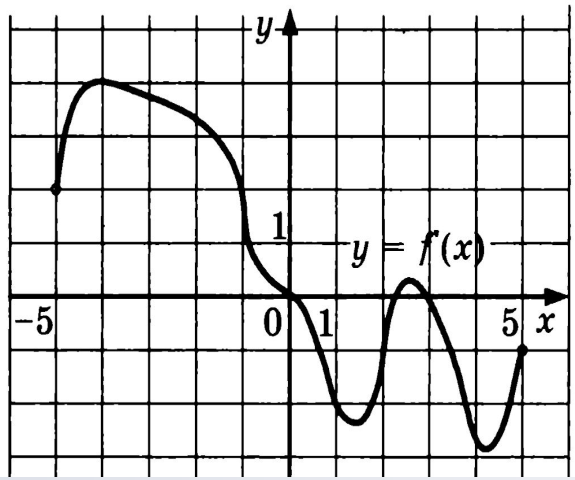
**1594.** Прямая $y = 5x + 14$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 14$. Найдите абсциссу точки касания.

**1595.** Прямая $y = -4x - 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

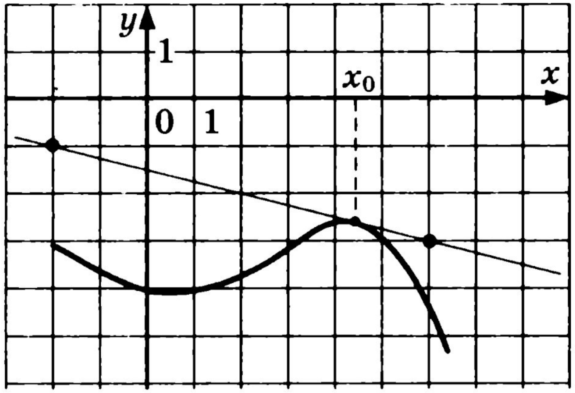
**1596.** На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9;\ 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



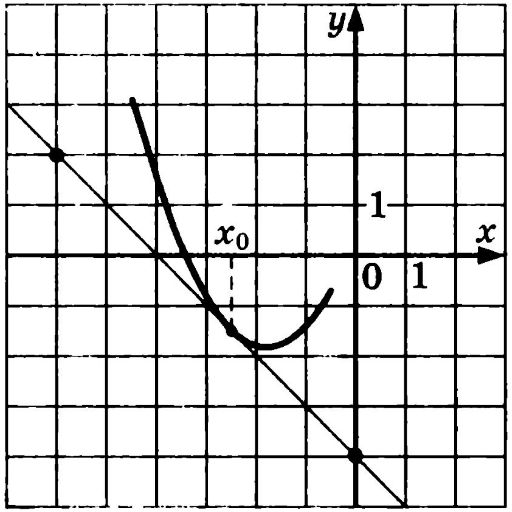
**1599.** На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 8$ или совпадает с ней.



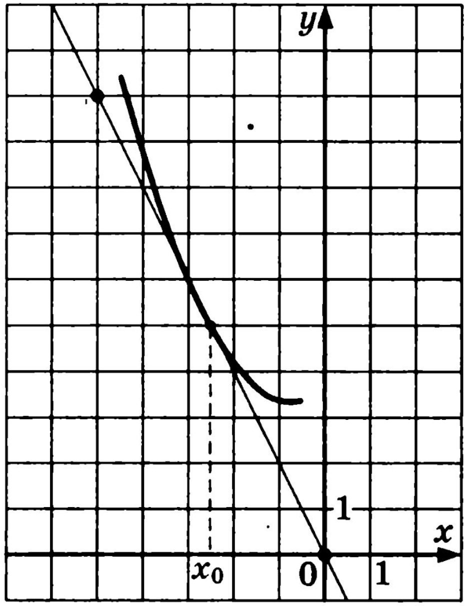
**1785.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



**1791.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

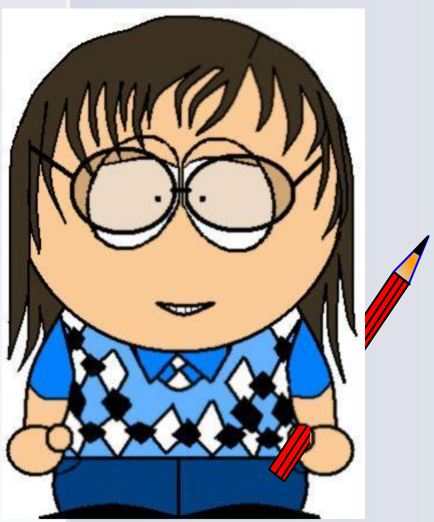


**1800.** На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.



# Проверь себя!!!

- Выполните самостоятельную работу



. Найдите производные функций:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

в) $y = (5x + 1)^7$.

б) $y = x \operatorname{ctg} x$;

Прямая $y = 2x$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.