

1. Теория деформаций

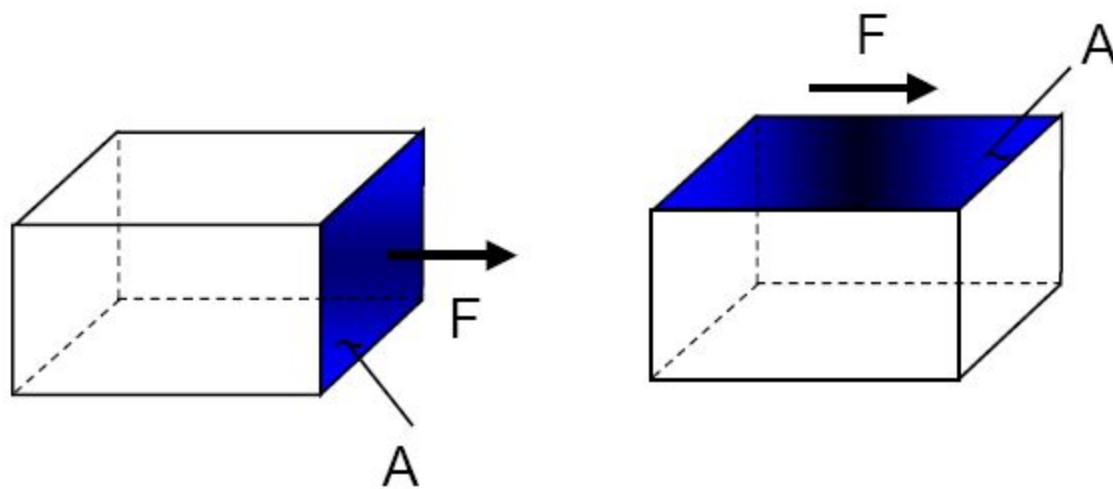
Линейной деформацией назовем относительное изменение расстояния между двумя бесконечно близкими точками.

Деформацией сдвига будем называть величину угла, на которую изменится первоначально прямой угол между двумя прямыми, проходящими через рассматриваемую точку.

Сдвиг считается положительным, если прямой угол между положительными направлениями отрезков, проведенных в точке, уменьшается.



Напряжения

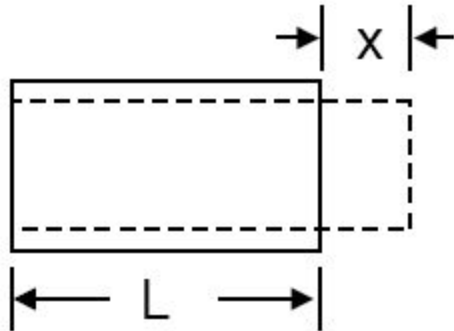


Нормальные

Касательные

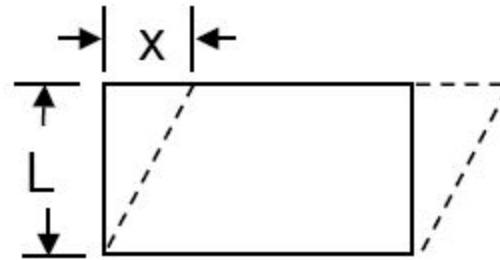
$$S = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{F}{A}$$

Деформации



Деформация растяжения

$$e = \frac{x}{L}$$



Деформация сдвига

$$g = \frac{x}{L}$$

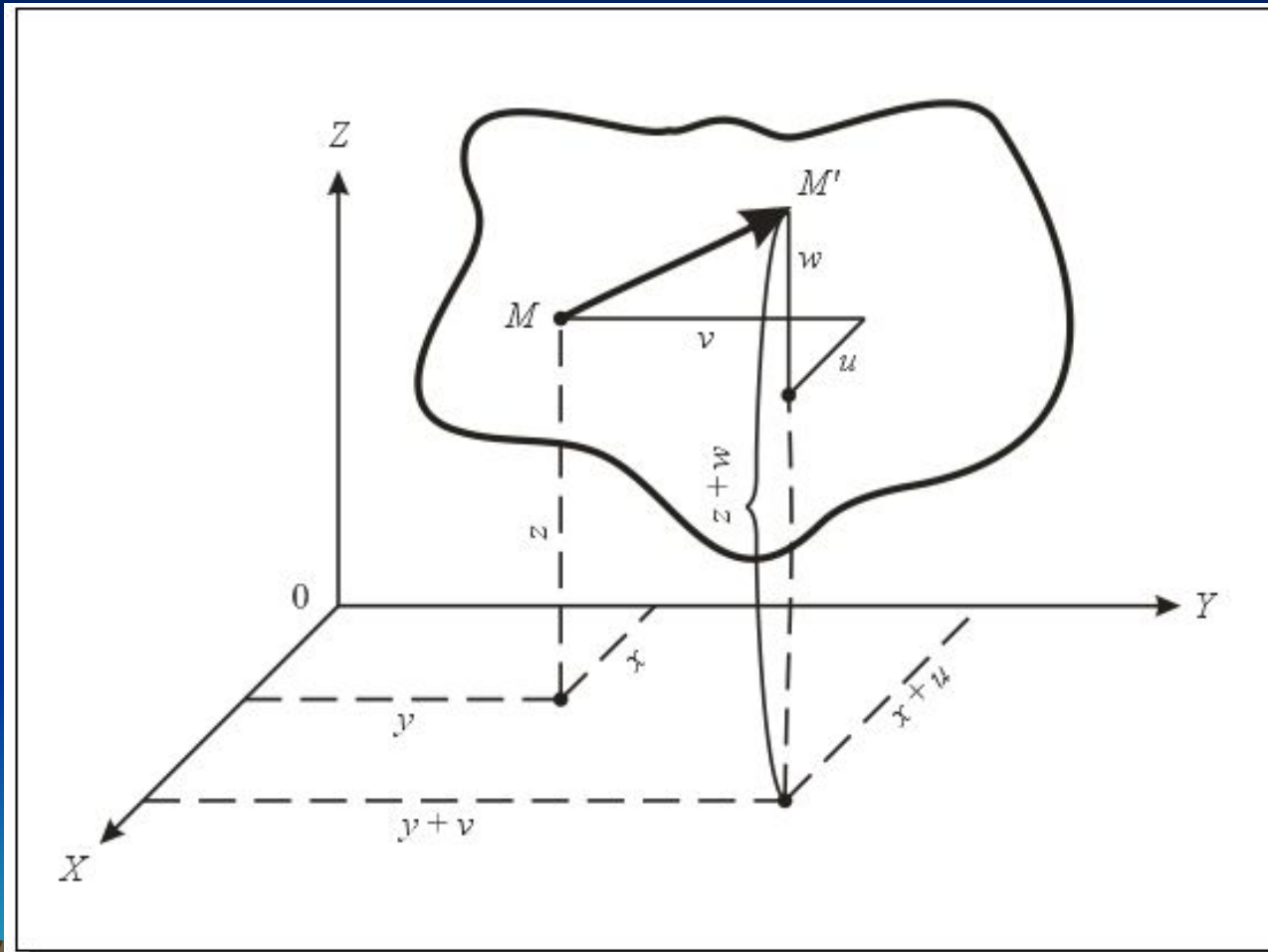
Испытания

Испытание на растяжение



**Измеряются нагрузки и
перемещения
Вычисляются напряжения и
деформации**

Проекции линейного перемещения точки тела



Относительная деформация произвольного элемента



До деформации ds

После деформации

ds'

Относительная деформация

$$\varepsilon_s = \frac{ds' - ds}{ds}$$

$$\varepsilon_s = \frac{(ds')^2 - ds^2}{ds} \cdot \frac{1}{ds' + ds}$$

Относительная деформация



Проекции смещения на оси координат u, v, w

Проекции перемещения второго конца отрезка

$$u + du = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$v + dv = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$w + dw = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Относительная деформация



$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$(ds')^2 = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2$$

$$dx' = (x + dx + u + du) - (x + u) = dx + du = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dy' = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dz' = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$ds' + ds = ds' - ds + 2ds = 2ds \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon_s\right) \approx 2ds$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{(ds')^2 - ds^2}{ds^2}$$



$$\begin{aligned}(ds')^2 - ds^2 = & \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] dx^2 + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 1 \right] dy^2 + \\ & + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - 1 \right] dz^2 + 2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy + \\ & + 2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dz + 2 \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dy dz\end{aligned}$$

Обозначения



$$\gamma_{xx} = 2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\gamma_{yy} = 2 \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\gamma_{zz} = 2 \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

$$\begin{aligned} (ds')^2 - ds^2 &= \\ &= \gamma_{xx} dx^2 + \gamma_{yy} dy^2 + \\ &+ \gamma_{zz} dz^2 + \gamma_{xy} dx dy + \\ &+ \gamma_{yz} dy dz + \gamma_{zx} dz dx \end{aligned}$$

Физический смысл обозначений



$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{(ds')^2 - dx^2}{dx^2}$$

$$(ds')^2 - dx^2 = \gamma_{xx} dx^2$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \gamma_{xx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2} \gamma_{yy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \gamma_{zz}$$

Через перемещения



$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]$$