Линейные однородные ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-2}y'+a_ny=0$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ - постоянные

- Если $\forall x \in D$ имеет место равенство

$$\varphi_n(x) = A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x) + \ldots + A_{n-1}\varphi_{n-1}(x)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ - постоянные, не все равные нулю, то говорят, что $\varphi_n(x)$ выражается линейно через функции

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$$

- n функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ называются линейно независимыми, если никакая из этих функций линейно не выражается через остальные.

Замечание

Если функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x), \varphi_n(x)$ линейно зависимы, то найдутся постоянные C_1, $C_2, \dots, C_n$ не все равные нулю, такие, что $\forall x \in D$ будет выполняться тождество

$$C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \dots + C_n\varphi_n(x) = 0$$

Пример 1.

Например, функции $y = e^x, \quad y = e^{2x}, \quad y = 3e^x$

линейно зависимые, так как при

$C_1 = 1, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = -\frac{1}{3}$ имеет место тождество:

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 3e^x = 0$$

Пример 2.

Например, функции $y = 1, \quad y = x, \quad y = x^2$

линейно независимые, так как ни при каких C_1, C_2, C_3

одновременно не равных нулю, выражение не равно нулю:

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \neq 0$$

Пример 3.

Например, функции $y = e^{k_1 x}, \quad y = e^{k_2 x}, \ldots, y = e^{k_n x}$

линейно независимые, так как ни при каких $C_1, C_2, \ldots, C_n$

одновременно не равных нулю, выражение не равно нулю:

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_n e^{k_n x} \neq 0$$

Теорема

Если функции y_1, y_2,…, y_n являются линейно независимыми решениями уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-2}y'+a_ny=0$$

то его общее решение есть

$$y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$$

где C_1, C_2,…, C_n- произвольные постоянные.

Нахождение общего решения ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составляем соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

2. Находим корни характеристического уравнения: $k_1, k_2, \ldots, k_{\mathrm{n}}$

3. По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения:

a) каждому действительному однократному корню k соответствует частное решение e^{kx}

b) каждой паре комплексных сопряженных однократных корней $k=\alpha \pm i\beta$ соответствует два частных решения $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$

c) каждому действительному корню кратности r соответствует r линейно независимых частных решений

$$e^{kx}, xe^{kx}, \dots, x^{r-1}e^{kx}$$

d) каждой паре комплексных сопряженных корней $k = \alpha \pm i\beta$ кратности r соответствуют $2r$ частных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \dots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \dots, \quad x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Этих частных решений будет ровно столько, какова степень характеристического уравнения (т.е. столько , каков порядок данного линейного ДУ)

4. Найдя n линейно независимых частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, строим общее решение данного линейного уравнения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 1. Решить ДУ: $y^{IV} - y = 0$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^4 - 1 = 0$$

$$\left(k^2\right)^2 - 1 = 0$$

$$\left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right) = 0$$

1) $\left(k^2 - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -1$

2) $\left(k^2 + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i$

Ответ. Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

Пример 2. Решить ДУ: $y^{(6)}-9y^{(5)}+27y^{(4)}-27y^{(3)}=0$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^6-9k^5+27k^4-27k^3=0$$

$$k^3(k^3-9k^2+27k-27)=0$$

$$k^3(k-3)^3=0$$

1) $k^3=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=k_3=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=1, \quad y_2=x, \quad y_3=x^2$

2) $(k-3)^3=0 \quad \Rightarrow \quad k_4=k_5=k_6=3 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y_4=e^{3x}, \quad y_5=xe^{3x}, \quad y_6=x^2e^{3x}$$

Ответ. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x+C_6x^2)$

Пример 3. Решить ДУ: $y''' - 10y'' + 41y' = 0$

Решение. Характеристическое уравнение:

$$k^3 - 10k^2 + 41k = 0$$

$$k(k^2 - 10k + 41) = 0$$

1) $k = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1$

2) $k^2 - 10k + 41 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} k_2 = 5 + 4i \quad \Rightarrow \quad y_2 = e^{5x} \cos 4x \\ k_3 = 5 - 4i \quad \Rightarrow \quad y_3 = e^{5x} \sin 4x \end{array}$

Ответ. Общее решение $y = C_1 + e^{5x}(C_2 \cos 4x + C_3 \sin 4x)$