Для определения показателей надежности машин и оборудования используются вероятностные и статистические методы, т.е. методы и способы теории вероятностей и математической статистики.

Отказы техники являются случайными величинами, так как являются следствием воздействия многих объективных и субъективных факторов.

Объективные факторы — отражают воздействие окружающей среды.

Субъективные факторы — зависят от:

1. человека, принимающего решение о выборе комплектующих изделий и материалов,
2. технологии изготовления,
3. обеспечения нормальной эксплуатации,
4. своевременного и качественном проведении технического обслуживания и ремонта.

основные термины и определения

Испытание (опыт) — это создание определенных условий, влияющих на некоторые физические явления. Испытания сопровождаются регистрацией результата.

Событие — явление, происходящее в результате испытаний.

Достоверное событие должно обязательно произойти.

Случайное событие может произойти, а может не произойти.

Невозможное событие заведомо произойти не может.

основные термины и определения

Единичным — называется явление, которое возникло однократно и при многократном воспроизведении повториться не может.

Массовым — называется явление, повторяющееся при многократном воспроизведении опыта.

основные термины и определения

Несовместимые события — события, которые одновременно происходить не могут. Например отказ и одновременно работоспособное состояние одной и той же детали невозможно.

Совместимые события — события, когда одно не исключает другое. Например, одновременная поломка разных деталей объекта может характеризовать совместимые события.

основные термины и определения

Случайная величина — величина, которая может принимать различные значения в определенных пределах.

Случайные величины делятся на ***непрерывные*** (время безотказной работы) и ***дискретные*** (число отказов).

Число бракованных деталей — дискретная величина, а величина их износа — непрерывная.

основные термины и определения

Частота — число одинаковых событий (значение случайной величины), соединенных в одну группу (интервал) или разряд.

основные термины и определения

Частость, или относительная частота (*W*) — это частота, выраженная в долях единицы или процентах от общего числа испытаний (*N*):

$$W = \frac{m}{N} \quad \text{или} \quad W = \frac{m}{N} \cdot 100\%$$

где *m* — частота или число случаев наступления события.

При неограниченном увеличении *N* статистическое значение *W* сходится к некоторому числу *P*, называемому ***вероятностью данного события***:

$$P = \lim_{N \to \infty} W = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N} \quad \text{или} \quad P(A) \approx \frac{m}{N}$$

где *P*(*A*) — вероятность события *A*.

основные термины и определения

Вероятность — это объективная математическая оценка реализации случайного события или случайной величины.

При $P(A) = 1$ событие обязательно произойдет, при $P(A) = 0$ событие произойти не может, таким образом $0 \leq P(A) \leq 1$.

основные термины и определения

Событие, противоположное (несовместимое) событию *A*, обозначается □*A*.

Полной группой событий называется несколько несовместимых событий, из которых обязательно наступит хотя бы одно.

Для полной группы событий достаточно иметь два несовместимых события *A* и □*A*, для которых *P*(*A*) + *P*(□*A*) = 1.

Случайное событие имеет устойчивую ***частость*** при массовых испытаниях и колеблется вблизи некоторого положительного числа. Это число и принимают за ***вероятность события***.

основные термины и определения

Вычисленная вероятность называется статистической, так как она получена в результате испытаний (опытов).

основные термины и определения

Согласно формуле (теореме) сложения вероятностей имеем

$$P + q = 1$$

$$\text{или} \quad q = 1 - P$$

где P и q — вероятность соответственно безотказной работы и отказа одного и того же объекта в одно и то же время.

основные термины и определения

Согласно теореме умножения вероятностей при двух ***независимых*** событиях А и В (появление одного из них не изменит вероятность появления другого) имеем:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Пример 1

Если тормозная система имеет четыре последовательно соединенных тормозных цилиндра с вероятностью безотказной работы каждого цилиндра, равной 0,9, то вероятность безотказной работы всей системы из четырех тормозных цилиндров равна $0,9^4 = 0,6561$.

Пример 2

Система очистки масла испытываемого объекта состоит из двух параллельно соединенных фильтров с вероятностью безотказной работы ($P_ф$) каждого, равной 0,85. Вероятность отказа ($q_ф$) каждого фильтра равна 1 - 0,85 = 0,15. Вероятность отказа двух фильтров как двух независимых событий равна 0,15 × 0,15 = 0,0225. Вероятность безотказной работы двух параллельно соединенных фильтров равна 1 - 0,0225 = 0,9775.

основные термины и определения

Распределение случайных величин — это совокупность значений случайных величин, расположенных в возрастающем порядке с указанием их вероятностей для теоретических распределений или частот (частостей) для эмпирических распределений.

Закон распределения случайной величины устанавливает связь между возможными значениями случайных величин и соответствующими этим значениям вероятностями.

основные термины и определения

Дискретные (прерывные) случайные величины *X* могут принимать только ряд отдельных значений, каждому из которых соответствует некоторое значение вероятности P_1, P_2, ..., P_n. Сумма вероятностей всех возможных значений прерывной случайной величины равна единице:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

основные термины и определения

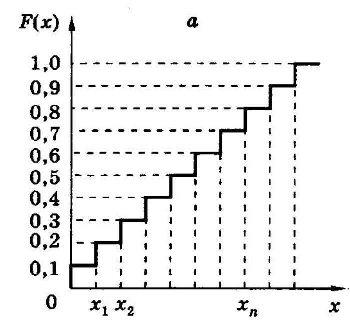
Если X непрерывная случайная величина, а x — некоторое действительное число, то вероятность того, что $X < x$, может быть описана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = P(X < x)$$

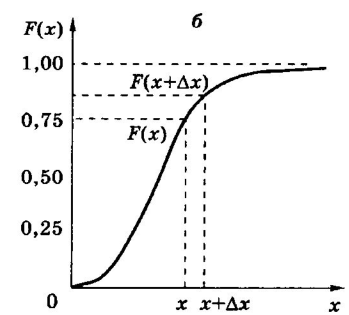
основные термины и определения

Функцию распределения можно представить в виде графика, если по оси абсцисс откладывать значение *x*, а по оси ординат значение *F*(*x*).

Для дискретной случайной величины график функции распределения будет иметь вид ступенчатой кривой



Для непрерывной случайной величины график функции распределения будет иметь вид плавной кривой



основные термины и определения

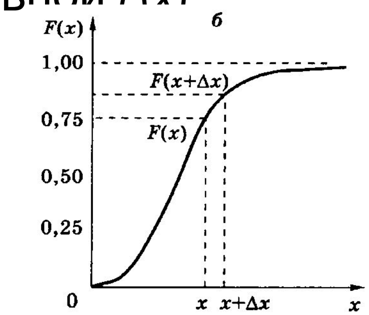
О характере распределения непрерывной случайной величины в окрестностях различных точек можно судить на основании особой функции, которая называется ***плотностью распределения вероятности*** или ***плотностью распределения***.

Плотность распределения *непрерывной* случайной величины — это производная от функции распределения непрерывной случайной величины:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

основные термины и определения

Графически плотность распределения, т. е. дифференциальная функция *f*(*x*), соответствующая интегральной *F*(*x*)



представлена на рисунке

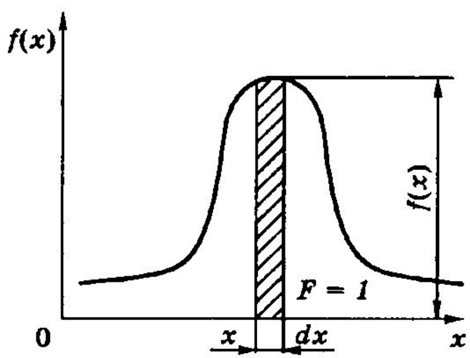


График плотности распределения непрерывной случайной величины

основные термины и определения

Обычно в теории надежности применяются обозначения:

F (*failure*) — отказ (вероятность отказа).

P (*probability*) — вероятность (вероятность безотказной работы).

характеристики распределения случайных величин

Числовые характеристики случайной величины *X*, подсчитанные по полученным значениям в процессе испытания, называются **статистическими характеристиками**

Числовые характеристики, определяющие закон распределения случайной величины, называются **параметрами распределения**

характеристики распределения случайных величин

Основными статистическими характеристиками случайных величин, изучаемых в теории надежности, служат ***среднее арифметическое*** и ***среднее квадратическое***

Среднее арифметическое (□*X*) — это частное от деления суммы измеренных значений (x_i) на число слагаемых этой суммы, т. е. на число (*N*) испытаний (опытов):

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{N}.$$

характеристики распределения случайных величин

Средняя взвешенная величина определяется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + \ldots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i}{N}$$

где m_i — частота

Для упрощения среднюю взвешенную часто подсчитывают по следующей формуле:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - A)}{N}$$

где A — произвольное число, которое подбирают так, чтобы разности (x_i - A) были возможно простыми и малыми числами

характеристики распределения случайных величин

Математическое ожидание (*MX*) дискретной случайной величины, подсчитанное по заданному закону распределения, называется суммой парных произведений возможных значений случайной величины x_i на соответствующие им вероятности P_i, т. е.:

$$MX = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i$$

Для непрерывной случайной величины:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Среднее значение характеризует центр группирования значений случайной величины. При $N \to \infty$величина □*X* стремится по значению к математическому ожиданию, т.е. □*X* ≈ *MX*. Таким образом, среднее арифметическое является оценкой математического ожидания

характеристики распределения случайных величин

Мода (M_0) эмпирического или вариационного ряда распределения случайной величины (в дальнейшем эмпирической совокупности) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую вероятность, а мода (M_{00}) теоретического распределения — такое значение x_i, которое соответствует максимальному значению плотности распределения $f(x)$

характеристики распределения случайных величин

Медиана (M_e) — срединное значение эмпирической совокупности, при теоретическом распределении медиана (M_{eo}) — это такое значение x_i, при котором вероятности появления величин, больших и меньших M_{eo}, одинаковы и равны 0,5.

характеристики распределения случайных величин

Разброс случайной величины относительно центра распределения характеризуется мерами рассеивания. К ним относятся:

1. *размах,*
2. *дисперсия (рассеивание),*
3. *среднее квадратическое отклонение (стандарт),*
4. *коэффициент вариации*.

характеристики распределения случайных величин

Размах распределения (R) или диапазон рассеивания в эмпирической совокупности — это разность между максимальным и минимальным из значений случайной величины x_i, полученных в результате испытаний.

Эмпирическая дисперсия (S^2) — величина рассеивания зафиксированных значений вокруг их среднего значения, т. е.

$$S^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{при} \quad N < 25$$

$$S^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - \bar{X})^2 \quad \text{при} \quad N \geq 25$$

где m_i — частота
x_i.

характеристики распределения случайных величин

Дисперсия для дискретной случайной величины (*DX*) теоретического распределения есть:

$$DX = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \cdot (x_i - MX)^2$$

Для непрерывной случайной величины, заданной плотностью вероятности *f*(*x*), дисперсия будет:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - MX)^2 dx$$

характеристики распределения случайных величин

Эмпирическое среднее квадратическое отклонение (S) и **среднее квадратическое отклонение (а)** будут соответственно равны корням квадратным из оценки дисперсии S^2 и из дисперсии DX, взятых с положительным знаком, т. е.

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{X})^2} \quad \text{при} \quad N < 25$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{X})^2} \quad \text{при} \quad N \geq 25$$

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

Совокупность не содержит грубых погрешностей согласно критерию Райта в том случае, если $|\Delta x_i| \leq 3\sigma$, где $|\Delta x_i|$ — максимальное по абсолютной величине отклонение, равное $|x_{max}$ - □$X|$

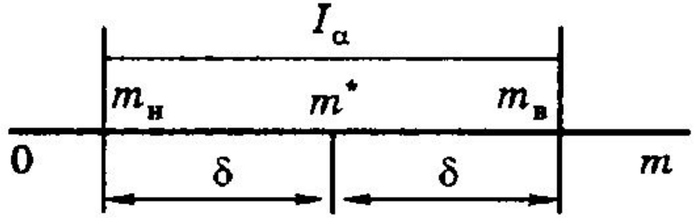
характеристики распределения случайных величин

В качестве меры рассеивания, не зависящей от единиц измерения сравниваемых величин, принимается **коэффициент вариации** или **изменчивости** — ν_x или его оценка *V*:

$$V = \frac{S}{\bar{\bar{X}}} \quad \text{или} \quad \nu_x = \frac{\sigma}{MX}$$

характеристики распределения случайных величин

Учитывая то, что объем выборки, как правило, не велик, необходимо пользоваться **интервальными оценками** точности результатов испытаний.
Эта оценка определяется двумя числами, характеризующими верхнюю доверительную границу интервала $m_в$ и нижнюю доверительную границу интервала $m_н$.



Доверительный интервал (I_α) и доверительные границы ($m_н$, $m_в$) параметра m

характеристики распределения случайных величин

Статистическая характеристика m^* тем точнее определяет параметр m, чем меньше абсолютная величина разности $|m - m^*|$, т. е. $\delta > 0$ и $|m - m^*| < \delta$. Чем меньше δ, тем точнее оценка.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка m^* удовлетворяет неравенству $|m - m^*| < \delta$; можно лишь говорить о вероятности α, при которой это неравенство справедливо.

Доверительной вероятностью (надежностью) оценки *m* по *m** называют вероятность α, при которой выполняется неравенство $|m - m^*| < \delta$, т. е.:

$$P[|m - m^*| < \delta] = P[m^* - \delta < m < m^* + \delta] = \alpha$$

Доверительным интервалом (I_α) называется интервал ($m^* - \delta$, $m^* + \delta$), который покрывает неизвестный параметр с заданной вероятностью α

характеристики распределения случайных величин

Интервал (m^* - δ, m^* + δ) имеет случайные границы, которые называются доверительными границами; $m_н = m^* - δ = m_1$ — нижняя доверительная граница; $m_в = m^* + δ = m_2$ — верхняя доверительная граница.

Доверительный интервал $I_α = m_2 - m_1$ представляет разницу случайных величин — доверительных границ интервала, зависящих от величины выборки и доверительной вероятности.

характеристики распределения случайных величин

Если известна величина *m** (оценка математического ожидания параметра *m*) при известном σ, то верхнюю и нижнюю границы при ***нормальном*** распределении определяют по следующим уравнениям:

$$m_{\text{в}} = m^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$m_{\text{н}} = m^* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

где t — число, которое определяется из равенства $2\Phi(t) = \alpha\Phi(t)$ или $\Phi(t) = \alpha/2$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-t^2/2}dt$$

характеристики распределения случайных величин

Когда значение σ неизвестно - вместо величины $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ подставляют величину $t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$,

$$m_{\text{в}} = m^* - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$m_{\text{н}} = m^* - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}$$

где t_γ — табличный коэффициент распределения Стьюдента

Fin