

Производна

Содержание

Понятие
производной

Производная
частных функций

Основные формулы
дифференцирования

Физический смысл производной

Правила
дифференцирования

Производная элементарных
функций

Геометрический
смысл

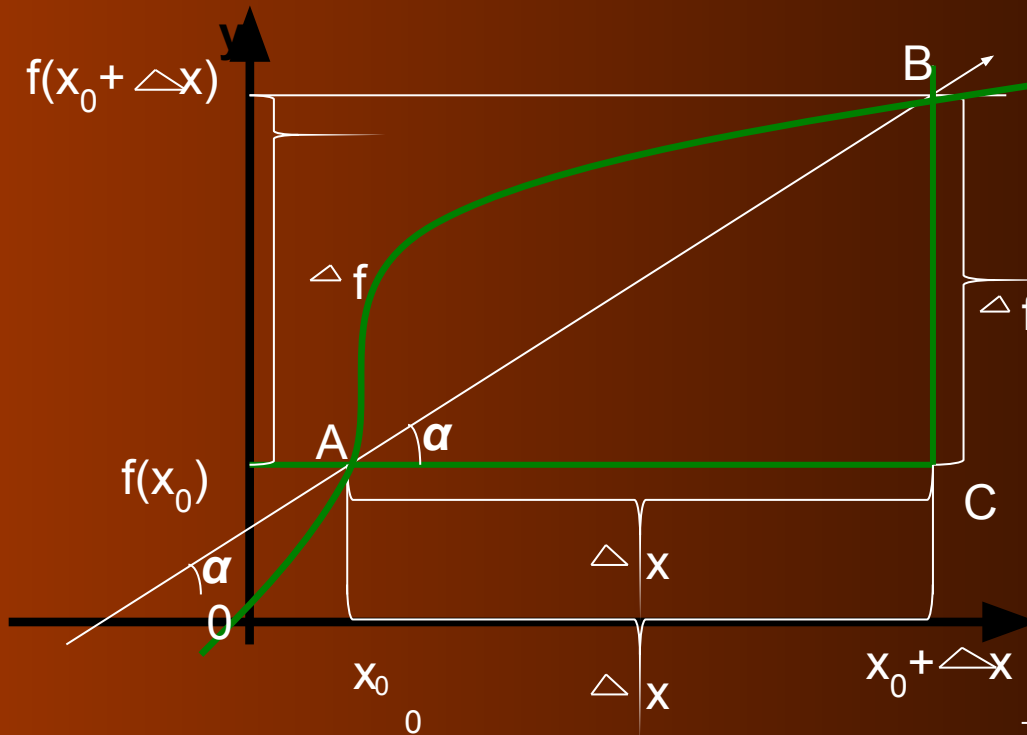
Непрерывность

Исследование функции с
помощью производной

Задачи на нахождение
наибольшего и
Наименьшего значения функции

Практическая часть

Понятие производной



$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

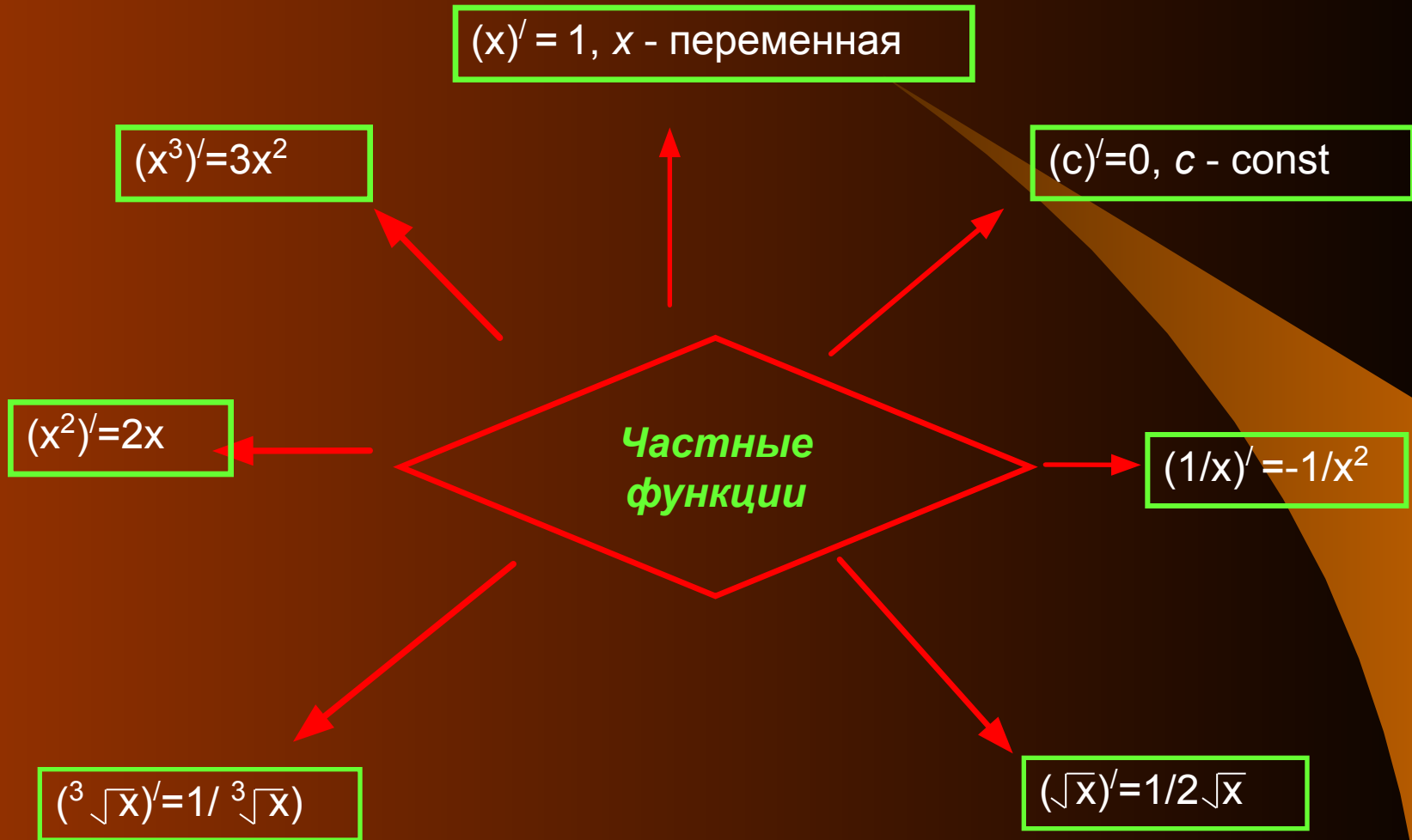
Определение.

Производной функции f в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

При Δx , стремящемся к нулю.

Производная частных функций



Правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u$$

$$(C u)' = C u'$$

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$$



Основные формулы дифференцирования

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\ln x)' = 1/x$$

$x > 0$

$$(\log_a)' = 1/(x \ln a)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(\ln(kx + b))' = k/(kx + b)$$

$$(x^p)' = p x^{p-1}$$

$$(\log_a)' = 1/x \ln a$$

$$(\lg)' = 1/x \cdot \lg e$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$$

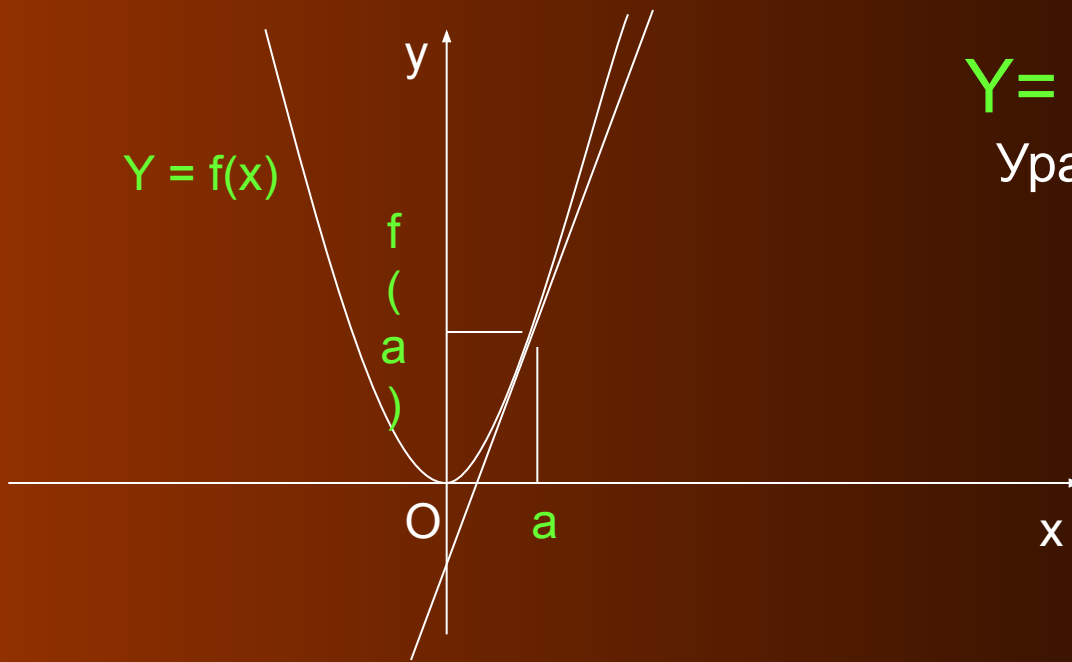
$$(kx + b)' = k$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$$



Геометрический смысл производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке $x = a$. Через точку $(a; f(a))$, проведена касательная к графику функции $y = f(x)$. Угловым коэффициентом или тангенсом угла наклона этой касательной будет равен производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, то есть $k = \operatorname{tg} \alpha = f'(a)$.



$$Y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Уравнение касательной

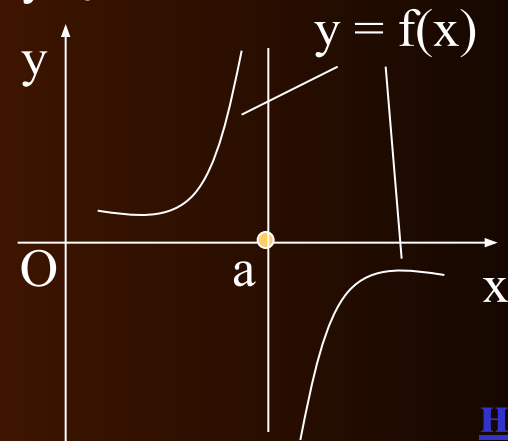
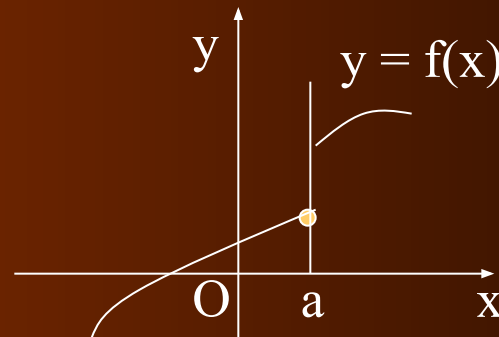
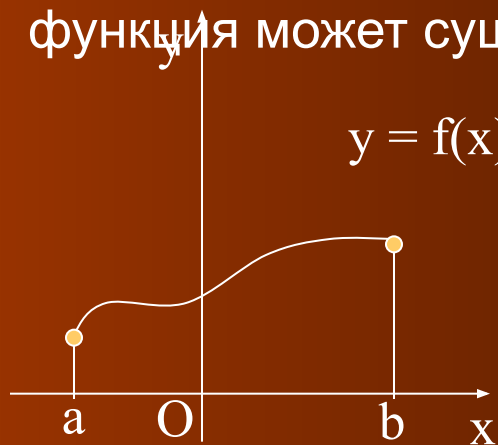


Непрерывность

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на промежутке, если она определена на этом промежутке и непрерывна в каждой точке промежутка.

Геометрическая непрерывность функции на промежутке означает, что график этой функции на данном промежутке изображен сплошной линией без скачков и разрывов. При этом малому изменению аргумента соответствует малое изменение функции.

Если при $x = a$ функция $y = f(x)$ существует в окрестности этой точки, но в самой точке $x = a$ не выполняется условие непрерывности, говорят, что точка $x = a$ есть точка разрыва функции. В самой точке $x = a$ функция может существовать, а может и не существовать.

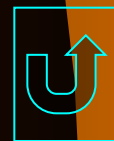


Физический смысл производной

Пусть точка движется по некоторой прямой линии, так что ее положение меняется с течением времени. Рассмотрим эту прямую как числовую ось, тогда положение точки определяется её координатой, и с течением времени эта координата меняется, являясь тем самым функцией от времени. Уравнением движения называется запись $y = f(t)$, показывающая, каким образом меняется координата с течением времени.

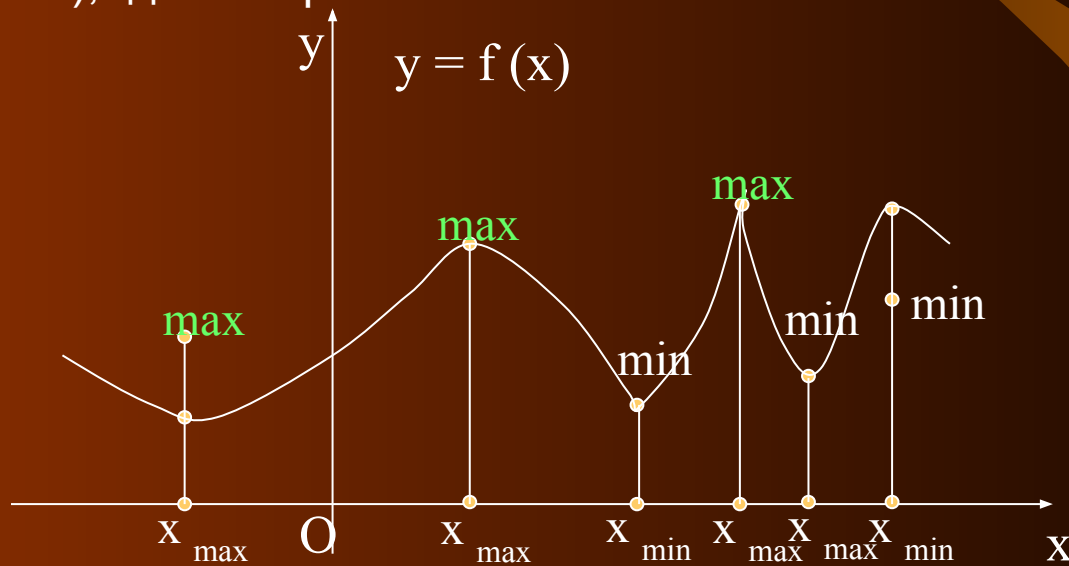
Скорость движения с уравнением $y = f(t)$ в момент времени t равна значению производной $f'(t)$ в этот момент времени. В этом состоит физический смысл производной.

Скорость движения при неравномерном движении изменяется с течением времени. Скорость изменения скорости называется ускорением, То есть $f''(t)$. В этом состоит физический смысл второй производной.



Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет максимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0 , целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Под окрестностью точки x_0 понимают интервал длины 2ϵ с центром в точке x_0 , т. е. $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$, где ϵ – произвольное положительное число.



Определение 2. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Говорят, что функция имеет минимум в точке $x_0 \in [a; b]$, если существует окрестность точки x_0 , целиком содержащаяся в $[a; b]$ и такая, что для любого x , принадлежащего этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



Максимумы и минимумы функции не являются обязательно наибольшими и наименьшими значениями этой функции во всей области определения.

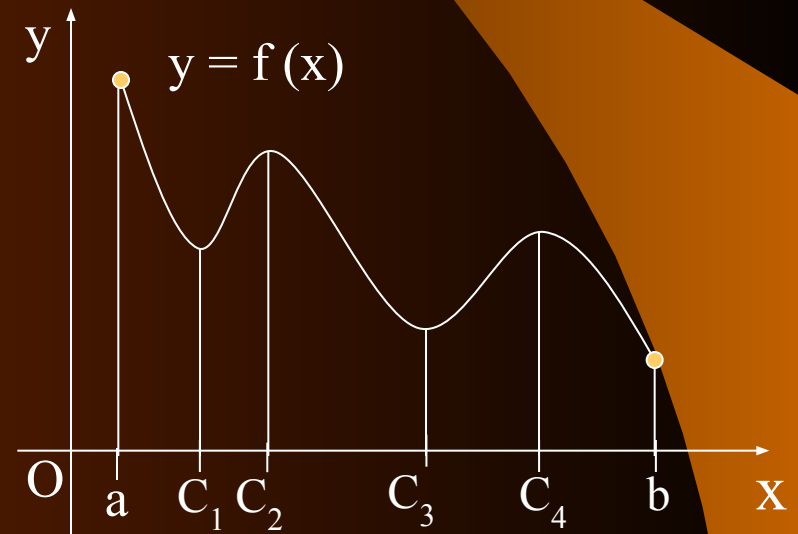
Например, функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, имеет четыре экстремума: два минимума ($x = C_1$ и $x = C_3$) и два максимума ($x = C_2$ и $x = C_4$). Вместе с тем, функция достигает наибольшего значения при $x = a$ и наименьшего при $x = b$.

Признак максимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции:

Если функция непрерывна в точке x_0 и ее производная, переходя через нее, меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть Точка минимума.



Исследование функции с помощью производной

Схема исследования:

1. Область определения.
2. Чётность.
3. Периодичность.
4. Критические точки.
5. Значение функции в критических точках.
6. Промежутки возрастания и убывания.
7. Экстремумы.
8. Наибольшее и наименьшее значение функции.
9. Дополнительные точки.

Пример: исследовать функцию $y = -x^3 + 3x - 2$ и построить её график

• Решение:

1. Область определения: $D_y = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция не является ни чётной, ни нечётной.
3. Функция не является периодической.
4. Производная: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = -1$.
6. $y'(1) = 0$; $y(-1) = -4$.
7. $y' < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$, следовательно, на промежутке $(-\infty; -1)$ функция убывает;
 $y' > 0$ при $x \in (-1; 1)$ функция возрастает;
 $y' < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, следовательно, на промежутке $(1; +\infty)$ функция убывает.
Так как в точка $x = -1$ и $x = 1$ функция непрерывна, то эти точки присоединим к промежуткам убывания и промежутку возрастания.
 $(-\infty; -1]$; $[1; +\infty)$ – промежутки убывания. $[-1; 1]$ – промежуток возрастания.



8. Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ – точка минимума

Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с плюса на минус, то точка $x = 1$ – точка максимума

Минимум функции:

$$y_{\min} = -4$$

Максимум функции:

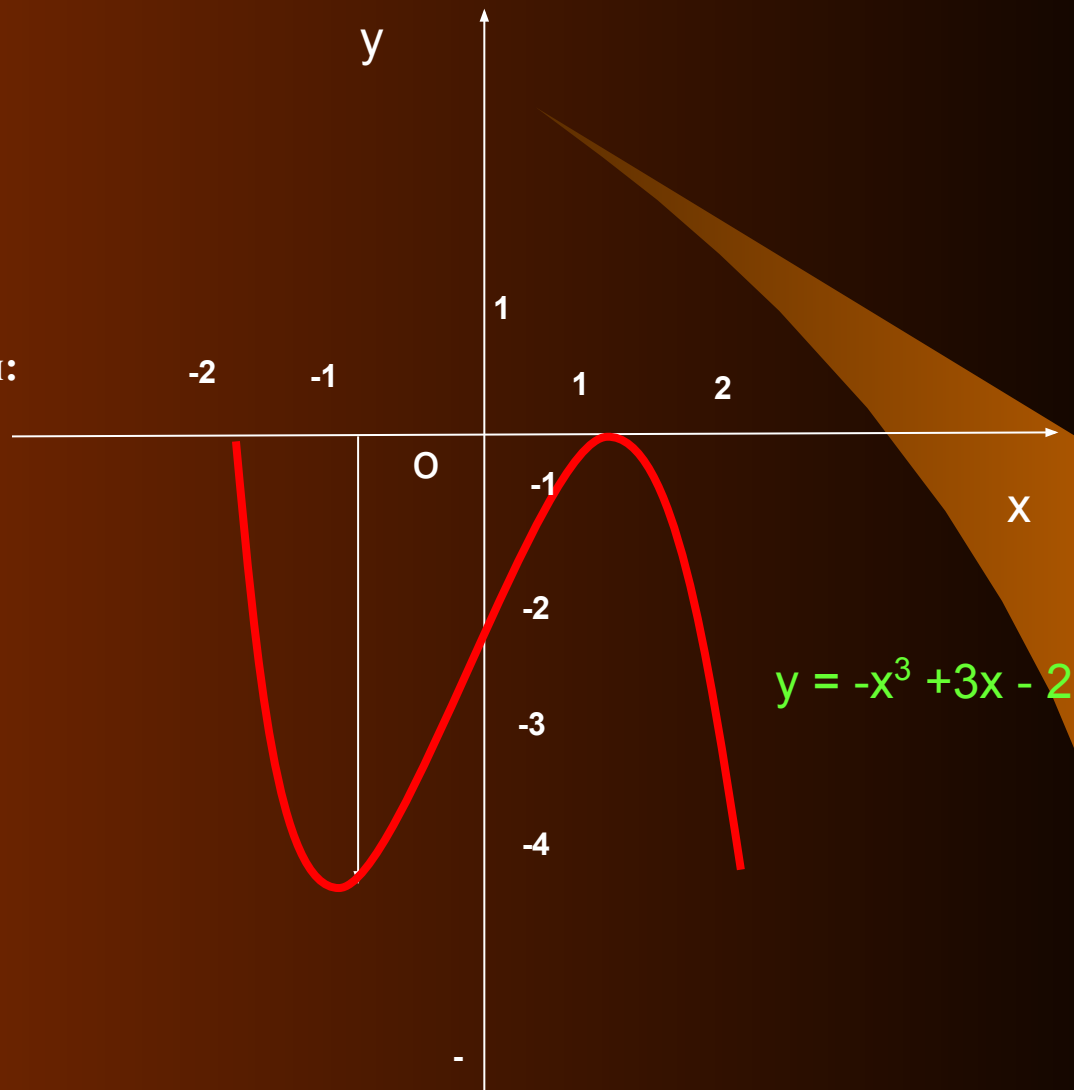
$$y_{\max} = 0.$$

9. Дополнительные точки:

Если $x = 0$, то $y = -2$;

Если $x = -2$, то $y = 0$.

Построим график функции:



Задачи на нахождение наименьшего и наибольшего значения функции.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема во всех точках этого отрезка и имеет конечное число критических точек на этом отрезке.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$, на отрезке $[a; b]$, необходимо:

1. Найти критические точки;
2. Вычислить значение функции на концах отрезка и в критических точках;
3. Выбрать из найденных значений наибольшее и наименьшее.

если функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ – наименьшее значение, $f(b)$ – наибольшее значение функции на этом отрезке.

если функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то $f(a)$ – наибольшее значение, $f(b)$ – наименьшее значение функции на этом отрезке.



Практическая часть

Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

Решение: данная функция непрерывна и дифференцируема в каждой точке отрезка

$[-1; 2]$.

Найдём производную: $y' = x^2 - 4x + 3$.

Найдём критические точки: $y' = 0$ при $x = 1$ и $x = 3$, $3 \notin [-1; 2]$.

Найдём значение функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка $[-1; 2]$:

$$y(1) = 1^3/3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 = 1/3 - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$$

$$y(-1) = (-1)^3/3 - 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{4}{3}$$

$$y(2) = 2^3/3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 = \frac{12}{3}$$

Ответ: $\max_{[-1;2]} y(x) = 2\frac{1}{3}$; $\min_{[-1;2]} y(x) = -\frac{4}{3}$.



Составьте уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Решение:

уравнение касательной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Найдём производную функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 20$: $f'(x) = 4x - 12$.

Найдём значение производной и функции при $x = 4$:

$$f'(4) = 4 \cdot 4 - 12 = 4$$

$$f(4) = 2 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 20 = 4.$$

Составим уравнение касательной:

$$y = 4 + 4(x - 4);$$

$$y = 4 + 4x - 16;$$

$$y = 4x - 12$$

$y = 4x - 12$ - уравнение касательной к параболе $y = 2x^2 - 12x + 20$ в точке с абсциссой $x = 4$.

Ответ: $y = 4x - 12$.



Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и точки минимума функции, максимумы и минимумы функции:
 $y = 2x^2 + 4x + 1$.

Решение: Найдём производную данной функции: $y' = 4x + 4$.

Так как $y' > 0$ на $(-1; +\infty)$, значит, на этом интервале функция возрастает.

Так как $y' < 0$ на $(-\infty; -1)$, значит, на этом интервале функция убывает.

Так как в точке $x = -1$ функция $y = 2x^2 + 4x + 1$ непрерывна, то эту точку присоединим к промежутку возрастания и промежутку убывания, то есть на промежутке $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает;

Так как в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то $x = -1$ является точкой минимума.

Найдём минимум функции:

$$y_{\min} = 2 * (-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1.$$

Ответ: на $[-1; +\infty)$, функция возрастает, на промежутке $(-\infty; -1]$, функция убывает; $x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -1$.



Найти координаты точки, в которой касательная к параболе $y = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$ образует угол 135° с осью Ox .

Решение:

Тангенс угла наклона равен производной функции в точке касания, то есть $\operatorname{tg} 135^\circ =$

$$f'(x), \operatorname{tg} 135^\circ = -1$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 4x + 5\right)' = 3x - 4, \quad 3x - 4 = -1; \quad 3x = 3; \quad x = 1.$$

Значит, 1 – абсцисса точки касания. Найдём ординату этой точки:

$$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = \frac{3}{2} - 4 + 5 = 2,5$$

$(1; 2,5)$ – координаты точки касания.

Ответ: $(1; 2,5)$.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 1/3 t^3 - 1/2 t^2 + 2$. Выведите формулу для вычисления скорости в любой момент времени и найдите скорость в момент $t = 5$ с. (Путь – в метрах).

Решение: Скорость движения с уравнением $x(t) = 1/3 t^3 - 1/2 t^2 + 2$ в момент времени t равна значению производной $x'(t)$ в этот момент времени.

Поэтому:

$$V = x'(t) = t^2 - t$$

Найдём скорость в момент времени $t = 5$;

$$V(5) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20 \text{ (м/с)}.$$

Ответ: $V = 20$ (м/с).

УСПЕХОВ
ВЭМ
НА
ЛЕС!