

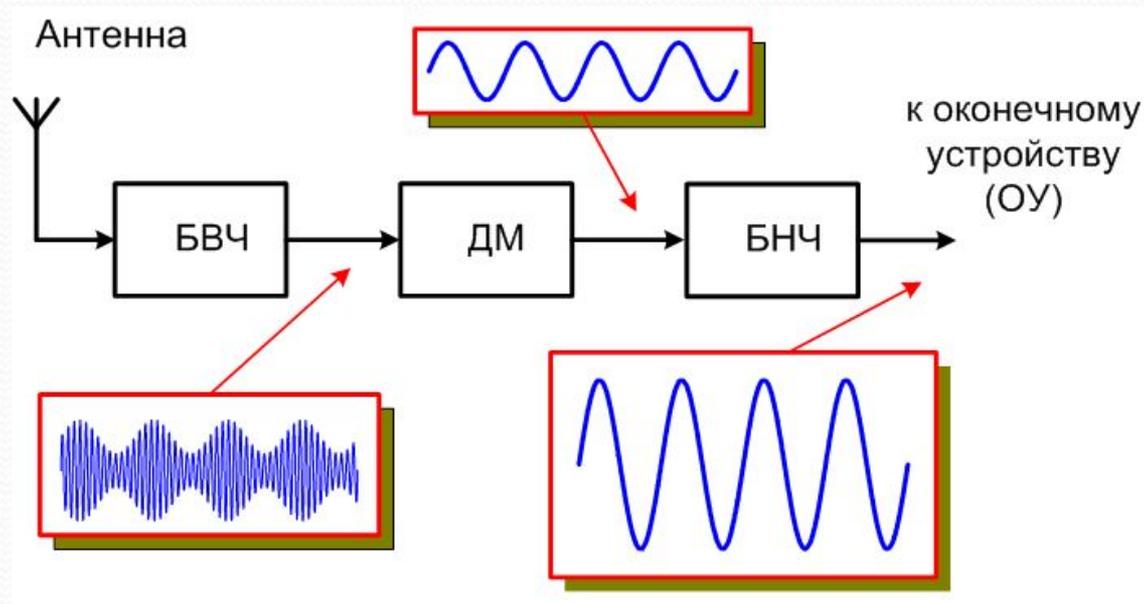
**Тема 1:**  
**Статистические**  
**характеристики**  
**шума**

**на выходе БВЧ**

# Оценка качества приема смеси сигнала и шума:

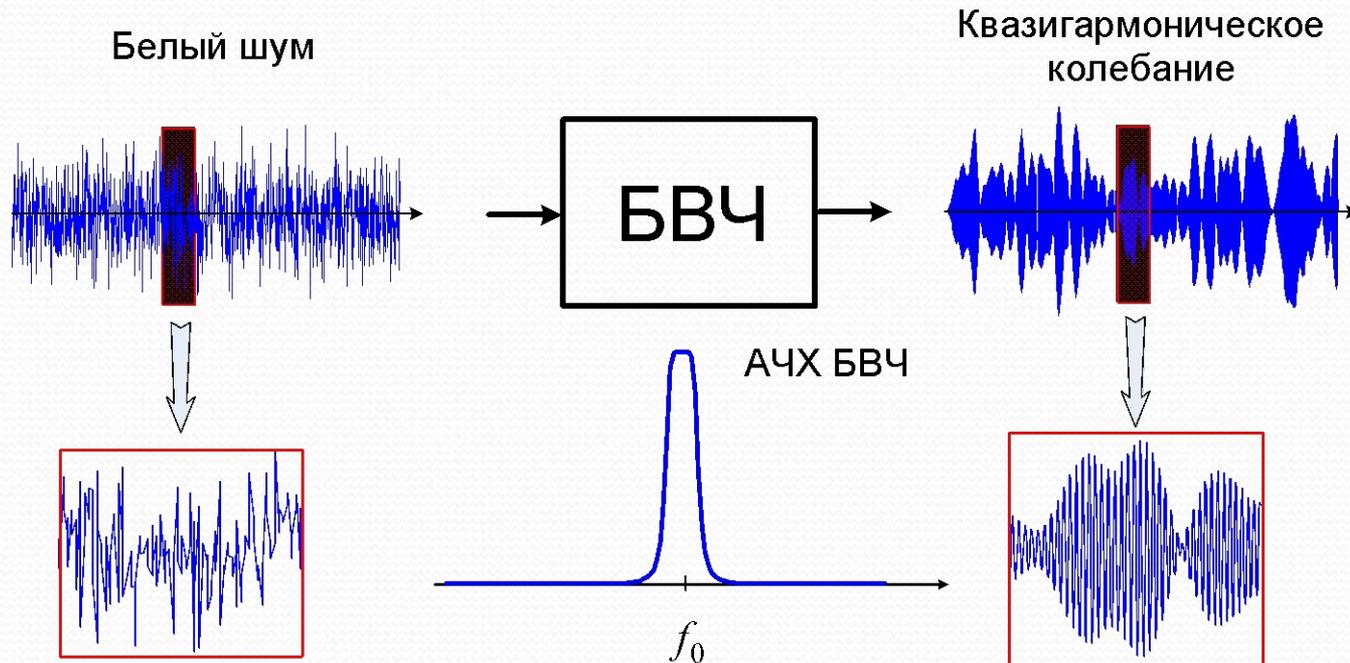
- Отношение сигнал-шум на выходе ДМ;
- Вероятность правильного обнаружения сигнала;
- Вероятность правильного различения нескольких сигналов;
- Погрешность выделения полезного сигнала
- И т.д.

# Структурная схема РПУ



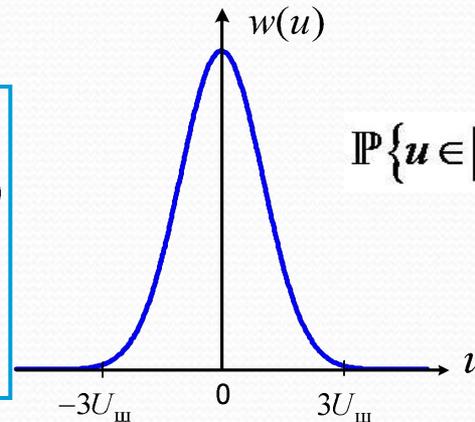
- БВЧ – линейное, инерционное устройство, нешумящий. Раздельный анализ сигнала и шума. Шум на входе БВЧ – стационарный случайный нормальный процесс, белый шум. Закон распределения не меняется.
- ДМ – нелинейное устройство. Закон распределения зависит от характеристик шума и сигнала на входе.

# Статистические характеристики шума на выходе БВЧ



Плотность вероятности напряжения шум  $u$   
 (нормальное распределение с нулевым средним)

$$w(u) = \frac{1}{U_{\text{ш}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2U_{\text{ш}}^2}}$$



$$\mathbb{P}\{u \in [-3U_{\text{ш}}, 3U_{\text{ш}}]\} = 0,997$$

# Автокорреляционная функция шума

## Теорема Винера-Хинчина

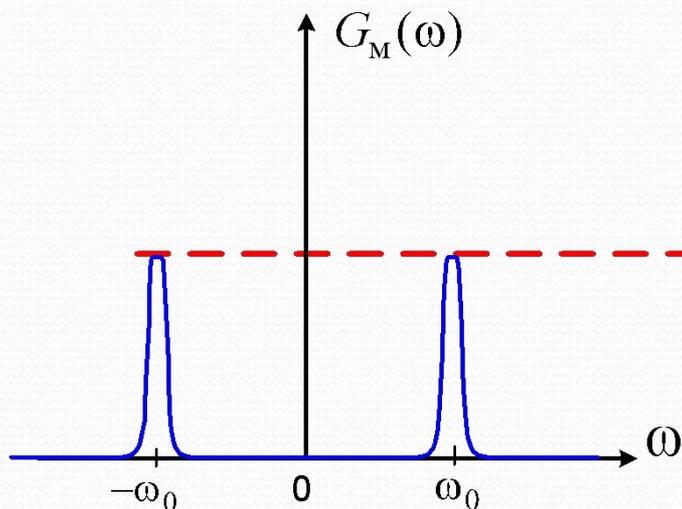
«Математический»  
энергетический спектр

Автокорреляционная  
функция (АКФ)

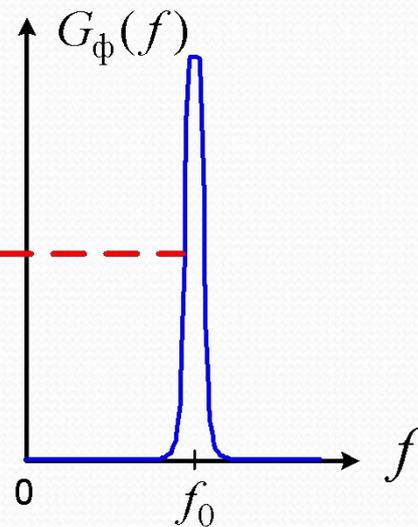
$$G_M(\omega) = \mathcal{F}\{K(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$K(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_M(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_M(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

«Математический»  
спектр



«Физический»  
спектр



$$G_\phi(f) = 2G_M(2\pi f)$$

$$G_M(\omega) = \frac{1}{2} G_\phi\left(\frac{|\omega|}{2\pi}\right)$$

# Автокорреляционная функция шума

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_M(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} G_M(\omega) \cos \omega\tau d\omega = \int_0^{\infty} G_\Phi(f) \cos(2\pi f \tau) df$$

*Приближённое выражение при симметричной АЧХ БВЧ*

$G_0$  - спектральная плотность дисперсии белого шума на входе БВЧ

АЧХ БВЧ:  $K(f) = K_0 \kappa(f)$   Энергетический спектр:  $G_\Phi(f) = G_0 K_0^2 \kappa^2(f)$

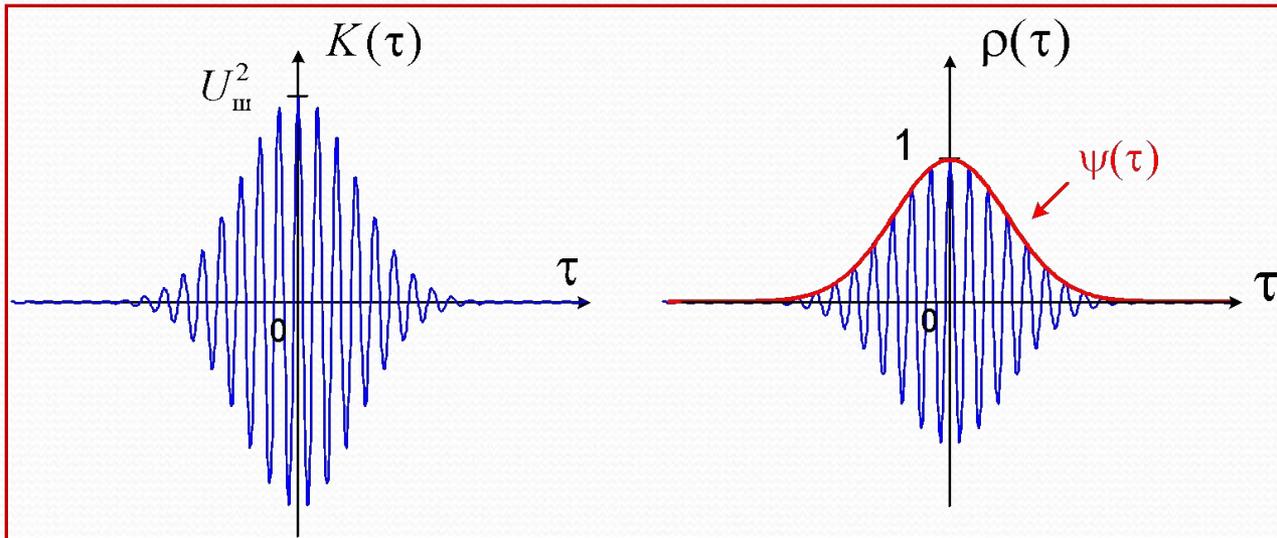
$$\begin{aligned} K(\tau) &= G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \int_0^{\infty} \kappa^2(f) \cos(2\pi f \tau) df = G_0 K_0^2 \int_{-f_0}^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi f \tau + 2\pi F \tau) dF \approx \\ &\approx G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \left\{ \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi F \tau) dF_0 \right] \cos(2\pi f_{\text{БВЧ}} \tau) - \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2(F) \sin(2\pi F \tau) dF_0 \right] \sin(2\pi f \tau) \right\} = \\ &= 2G_{\text{БВЧ}} K_0^2 \left[ \int_0^{\infty} \kappa^2(F) \cos(2\pi F \tau) dF \right] \cos(2\pi f_{\text{БВЧ}} \tau) = U^2 \rho(\tau) \end{aligned}$$

# Автокорреляционная функция шума

$$K(\tau) = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

$U_{\text{ш}}^2 = K(0)$  — спектральная плотность шума на выходе БВЧ

$$\psi(\tau) = \frac{2}{\Pi_{\text{ш}}} \int_0^{\infty} \Pi_{\text{ш}}^2(f) \cos(2\pi f \tau) df$$



# Низкочастотные квадратурные составляющие узкополосного шума

Узкополосный шум (квазигармоническое колебание)

$$u(t) = U(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) =$$

$$= U(t) \cos \varphi(t) \cdot \cos \omega_0 t - U(t) \sin \varphi(t) \cdot \sin \omega_0 t = U^c(t) \cdot \cos \omega t - U^s(t) \cdot \sin \omega t$$

$$\text{Огибающая } U(t) = \sqrt{U_{\text{ш}}^c(t)^2 + U_{\text{ш}}^s(t)^2}$$

*Статистические характеристики низкочастотных квадратурных составляющих шума*

ш)  $U_{\text{ш}}^s(t)$  и  $U_{\text{ш}}^c(t)$  — случайные процессы с

нулевым математическим ожиданием:

$$\overline{U_{\text{ш}}^s(t)} = \overline{U_{\text{ш}}^c(t)} = 0$$

Дисперсия  $\overline{[U_{\text{ш}}^s(t)]^2} = \overline{[U_{\text{ш}}^c(t)]^2} = U_{\text{ш}}^2$

АКФ  $K_{U_{\text{ш}}^c}(\tau) = K_{U_{\text{ш}}^s}(\tau) = U_{\text{ш}}^2 \psi(\tau) \Rightarrow (K) \tau = K_{U_{\text{ш}}^c} \cos \omega_0 \tau = K_{U_{\text{ш}}^s} \cos \omega_0 \tau$

В) совпадающие моменты времени  $U_{\text{ш}}^c(t)$  и  $U_{\text{ш}}^s(t)$  некоррелированы:  $\overline{U_{\text{ш}}^c(t) U_{\text{ш}}^s(t)} = 0$

## 9.2. Воздействие сигнала и шума на линейный АД

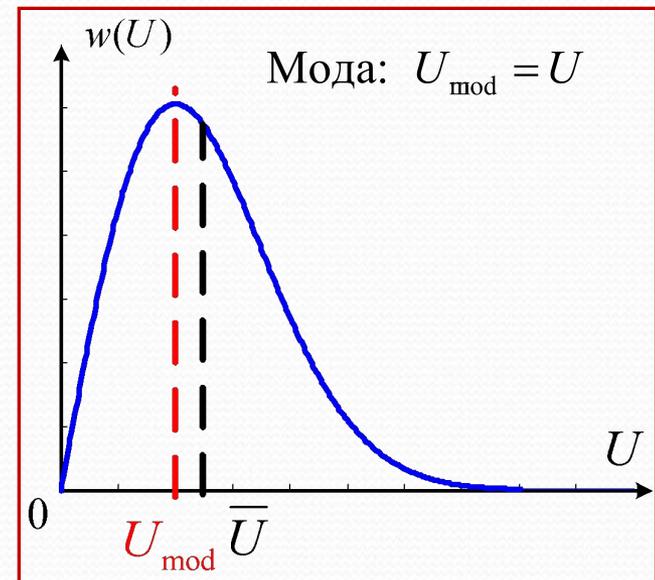
### Статистические характеристики огибающей шума на выходе БВЧ

Распределение Релея:  $w(U) = \frac{U}{U_{\text{ш}}^2} e^{-\frac{U^2}{2U_{\text{ш}}^2}}, U \geq 0$

Среднее значение:  $\bar{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} U_{\text{ш}} \approx 1,25 U_{\text{ш}} > U_{\text{mod}}$

Дисперсия:  $\sigma_U^2 = \frac{4 - \pi}{2} U_{\text{ш}}^2$

АКФ:  $K_U(\tau) = \overline{[U(t) - \bar{U}(t)][U(t + \tau) - \bar{U}(t + \tau)]} =$   
 $= \sigma_U^2 \rho_U(\tau)$



Нормированная АКФ огибающей:  $\rho_U(\tau) = \frac{\pi}{4 - \pi} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^2 \psi^2(\tau) + \left( \frac{1}{2 \cdot 4} \right)^2 \psi^4(\tau) + \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 \psi^6(\tau) + \dots \right] \approx$   
 $\approx 0,915 \psi^2(\tau) + 0,057 \psi^4(\tau) + 0,014 \psi^6(\tau) + \dots \approx 0,915 \psi^2(\tau)$

# Энергетический спектр огибающей шума на выходе БВЧ

«Математический» спектр огибающей:  $G_{UM}(\omega) = \mathcal{F}\{K_U(\tau)\}$

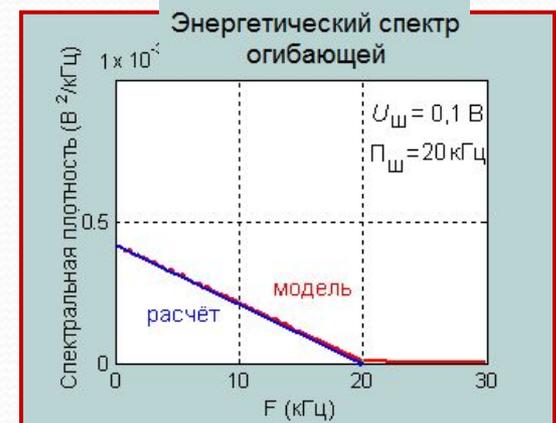
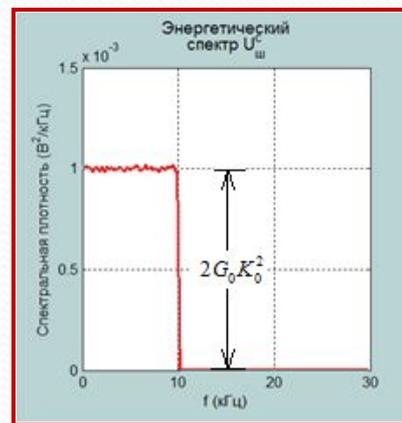
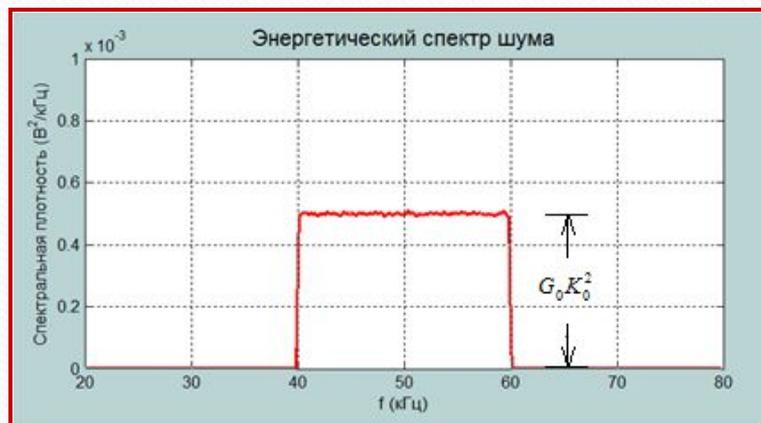
«Физический» спектр огибающей:  $G_U(f) = 2G_{UM}(2\pi f)$

При прямоугольной АЧХ БВЧ:  $G_U(f) \approx (4 - \pi)G_0K_0^2 \frac{\Pi_{ш} - f}{\Pi_{ш}}, f \in [0, \Pi_{ш}]$

$G_0$  – спектральная плотность белого шума на входе БВЧ

$K_0$  – коэффициент усиления БВЧ по напряжению

$\Pi_{ш}$  – полоса пропускания БВЧ

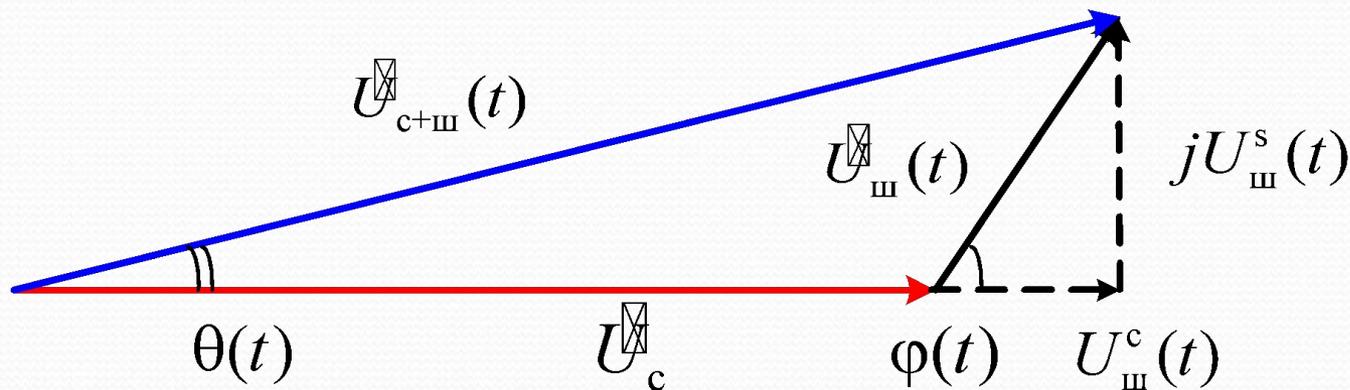


# Статистические характеристики огибающей суммы сигнала и шума на выходе БВЧ

Сигнал  $u_c(t) = U_c \cos \omega_0 t$ , шум  $u_{ш}(t) = U_{ш}^c(t) \cos \omega_0 t - U_{ш}^s(t) \sin \omega_0 t$

$$u_c(t) + u_{ш}(t) = [U_{ш}^c(t) + U_c] \cos \omega_0 t - U_{ш}^s(t) \sin \omega_0 t = V(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]$$

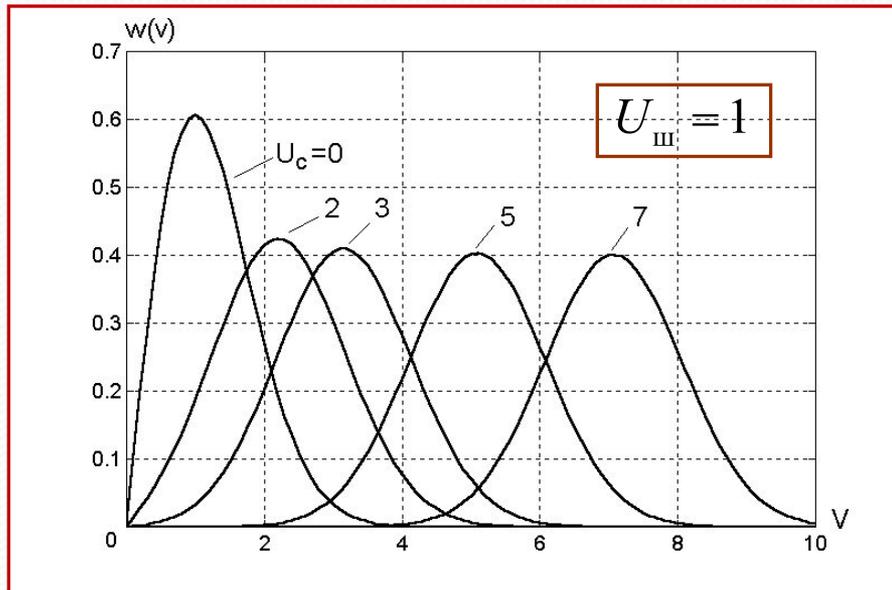
Огибающая с+ш:  $V(t) = |U_{с+ш}(t)| = \sqrt{[U_c + U_{ш}^c(t)]^2 + U_{ш}^s(t)^2}$



# Распределение вероятностей огибающей

Распределение Райса:  $w(V) = \frac{V}{U_{\text{ш}}^2} I_0\left(\frac{VU_c}{U_{\text{ш}}^2}\right) e^{-\frac{V^2+U_c^2}{2U_{\text{ш}}^2}}, V \geq 0$

Сигнал отсутствует ( $U_c = 0$ ):  $I_0(0) = 1 \Rightarrow$



Распределение Релея  
 $w(V) = \frac{V}{U_{\text{ш}}^2} e^{-\frac{V^2}{2U_{\text{ш}}^2}}$

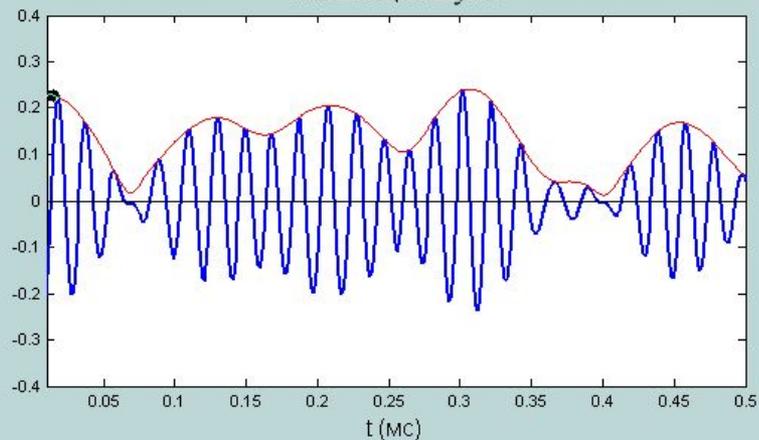
$U_c \gg U_{\text{ш}} : I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \Rightarrow$

$w(V) \approx \frac{1}{U_{\text{ш}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-U_c)^2}{2U_{\text{ш}}^2}}$

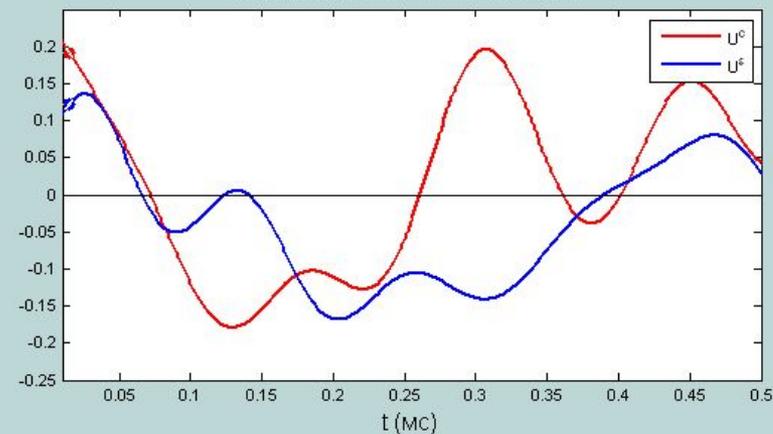
– нормальное распределение

# Шум на выходе БВЧ ( $U_c = 0$ )

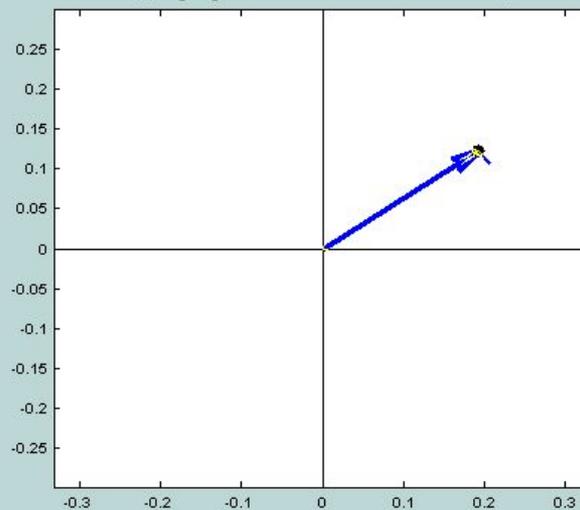
Реализация шума



Квадратурные составляющие



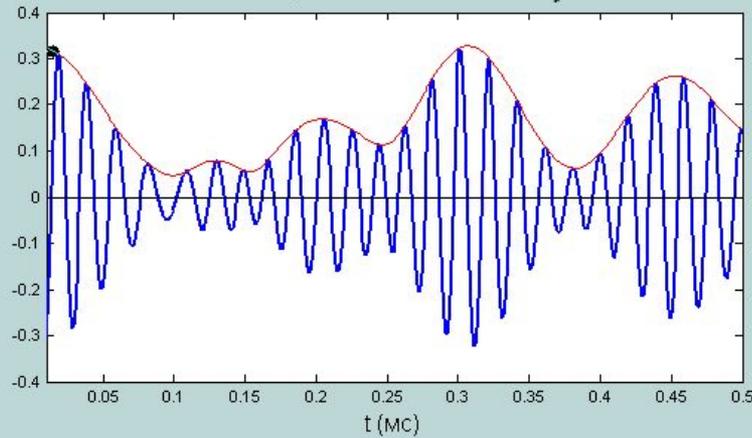
Вектор комплексной огибающей



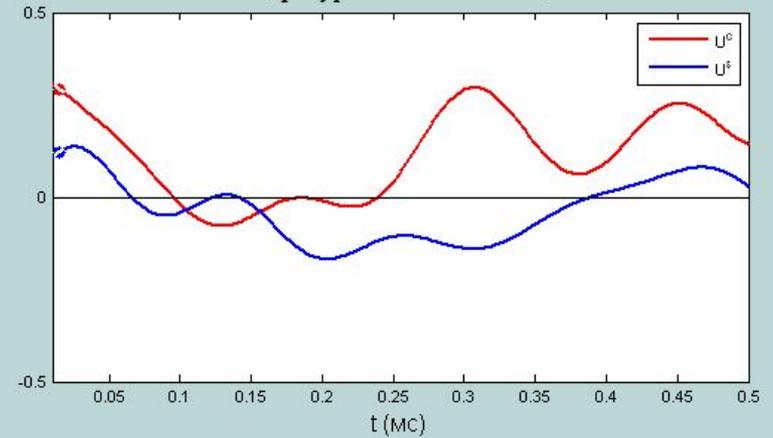
$$U_{\text{ш}} = 0,1$$

# Сигнал + шум на выходе БВЧ ( $U_c = 0,1$ )

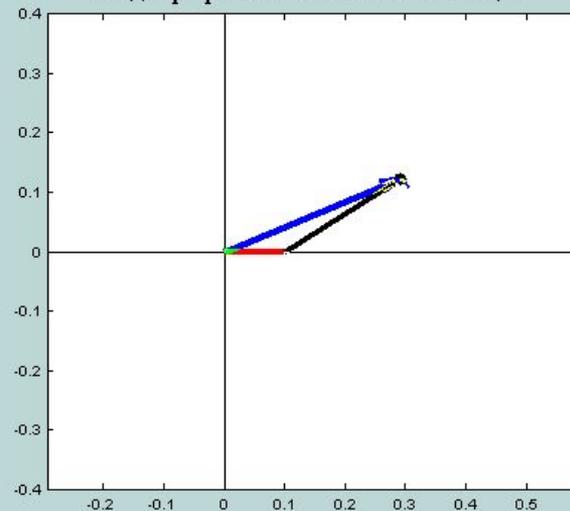
Реализация смеси сигнала и шума



Квадратурные составляющие



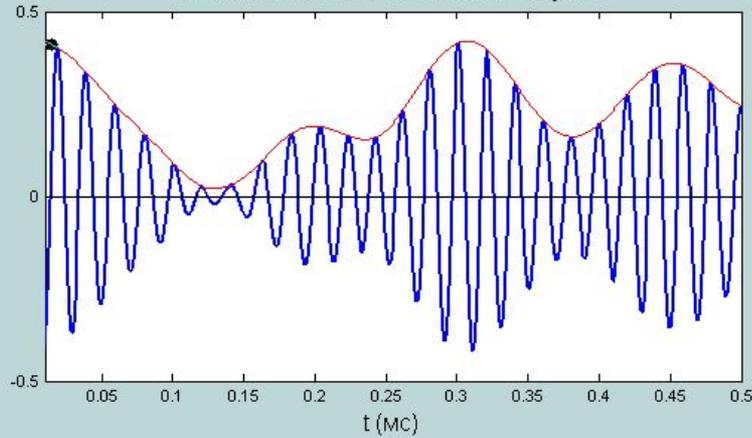
Годограф комплексной огибающей



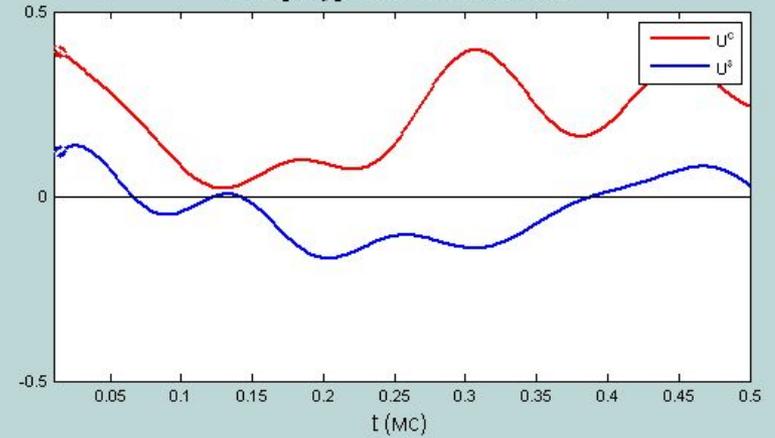
$$U_{\text{ш}} = 0,1$$

# Сигнал + шум на выходе БВЧ ( $U_c = 0,2$ )

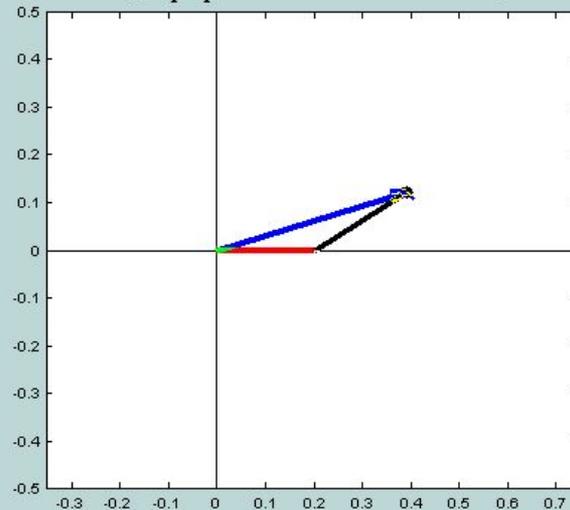
Реализация смеси сигнала и шума



Квадратурные составляющие



Годограф комплексной огибающей



$$U_{\text{ш}} = 0,1$$

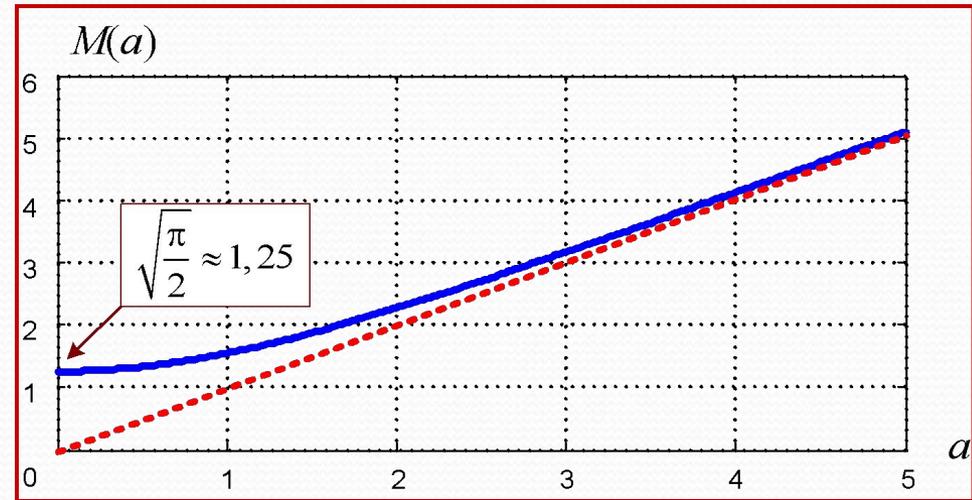
# Математическое ожидание и СКО огибающей

$$\bar{M} = a \int_0^{\infty} V w_{\text{Райса}}(V) dV = U_{\text{ш}} \quad ( ), \quad = \frac{U_c}{U_{\text{ш}}}$$

$$M(a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{a^2}{4}} \left[ \left( 1 + \frac{a^2}{2} \right) I_0 \left( \frac{a^2}{4} \right) + \frac{a^2}{2} I_1 \left( \frac{a^2}{4} \right) \right]$$

Среднее значение напряжения на выходе АД:

$$\bar{M}_d \neq K_d \bar{V} = K_d U_{\text{ш}} \quad ( )$$

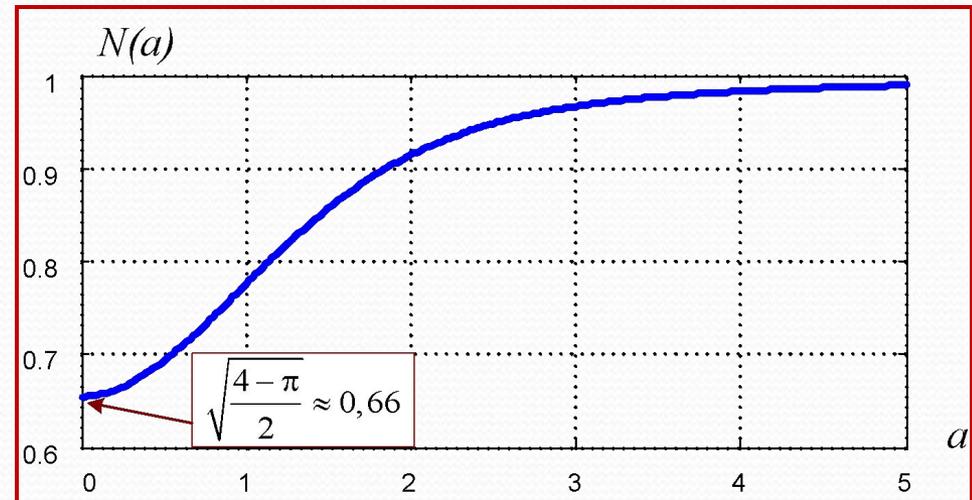


$$\sigma_V = \sqrt{\int_0^{\infty} (V - \bar{V})^2 w_{\text{Райса}}(V) dV} = U_{\text{ш}} N(a),$$

$$N(a) = \sqrt{2 + a^2 - M^2(a)}$$

СКО шума на выходе АД:

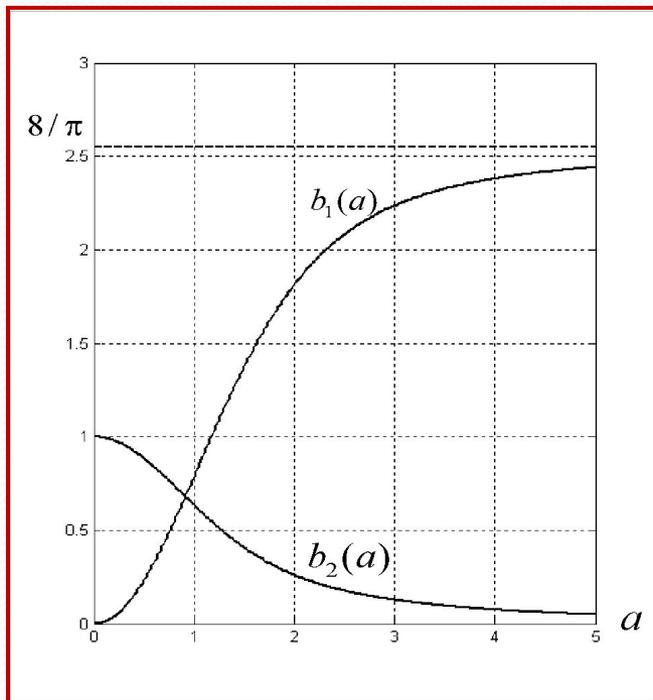
$$\sigma_{U_d} = K_d \sigma_V = K_d U_{\text{ш}} N(a)$$



# Автокорреляционная функция огибающей

$$K_V(\tau) \approx \frac{4-\pi}{2} U_{\text{ш}}^2 \left[ b_1(a) \cdot \psi(\tau) + b_2(a) \cdot \psi^2(\tau) \right] = K_{V_1}(\tau) + K_{V_2}(\tau),$$

$$K_{V_{\text{ш}}}(\tau) = \frac{4-\pi}{2} U^2 b(a) \cdot \psi(\tau), \quad K_{V_{\text{ш}}}(\tau) = \frac{4-\pi}{2} U^2 b(a) \cdot \psi^2(\tau),$$



$$b_1(a) = \left\{ a e^{-\frac{a^2}{4}} \left[ I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) + I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right] \right\}^2,$$

$$b_2(a) = \left[ e^{-\frac{a^2}{4}} I_0\left(\frac{a^2}{4}\right) \right]^2 + \left[ e^{-\frac{a^2}{4}} I_1\left(\frac{a^2}{4}\right) \right]^2$$

# Энергетический спектр огибающей

«Математический» спектр огибающей:

$$G_{V_M}(\omega) = \mathcal{F}\{K_V(\tau)\} \approx \mathcal{F}\{K_{V1}(\tau)\} + \mathcal{F}\{K_{V2}(\tau)\} = G_{V1M}(\omega) + G_{V2M}(\omega)$$

«Физический» спектр огибающей:  $G_V(f) = 2G_{V_M}(2\pi f) = G_{V1}(f) + G_{V2}(f)$

При прямоугольной АЧХ БВЧ:

$$G_{V_{\text{ш}}}(f) = b_1(a)(4 - \pi)G_0K_0^2, \quad f \in [0, \Pi / 2]$$

$$G_{V_{\text{ш}}}(f) = b_2(a)(4 - \pi)G_0K_0^2 \frac{\Pi_{\text{ш}} - f}{\Pi_{\text{ш}}}, \quad f \in [0, \Pi_{\text{ш}}]$$

$G_0$  – спектральная плотность белого шума на входе БВЧ

$K_0$  – коэффициент усиления БВЧ по напряжению

$\Pi_{\text{ш}}$  – полоса пропускания БВЧ

