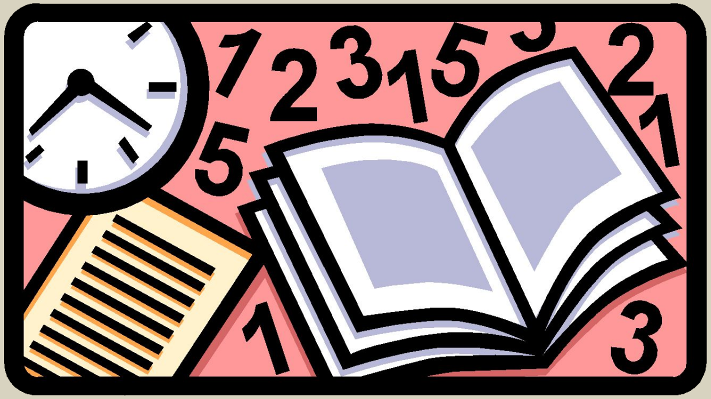


ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ

Средняя школа №46

Тарасова А.М.

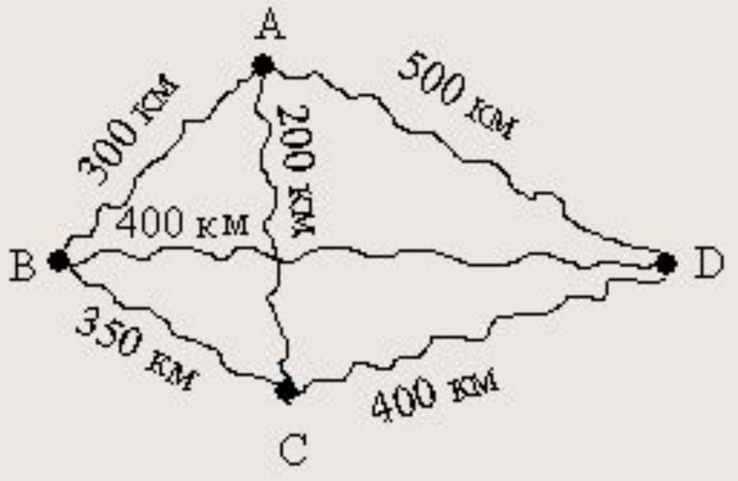
Белгород 2005

Введение в комбинаторику

Задачи, в которых идет речь о всевозможных комбинациях объектов, называются **комбинаторными задачами**

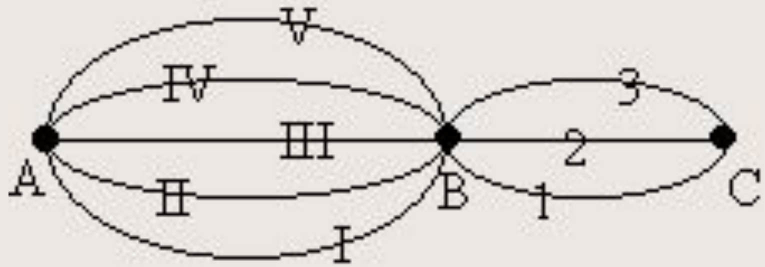
Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется **комбинаторикой**

Задача. Путешественник хочет выехать из города A, посетить города B,C и D, после чего вернуться в город A. Какими путями можно это сделать?

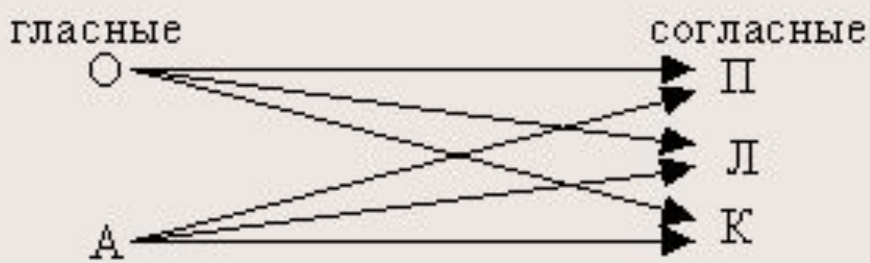


Путь	Длина пути в км
ABCDA	1550
ABDCA	1300
ACBDA	1450
ACDBA	1300
ADBCA	1450
ADCBA	1550

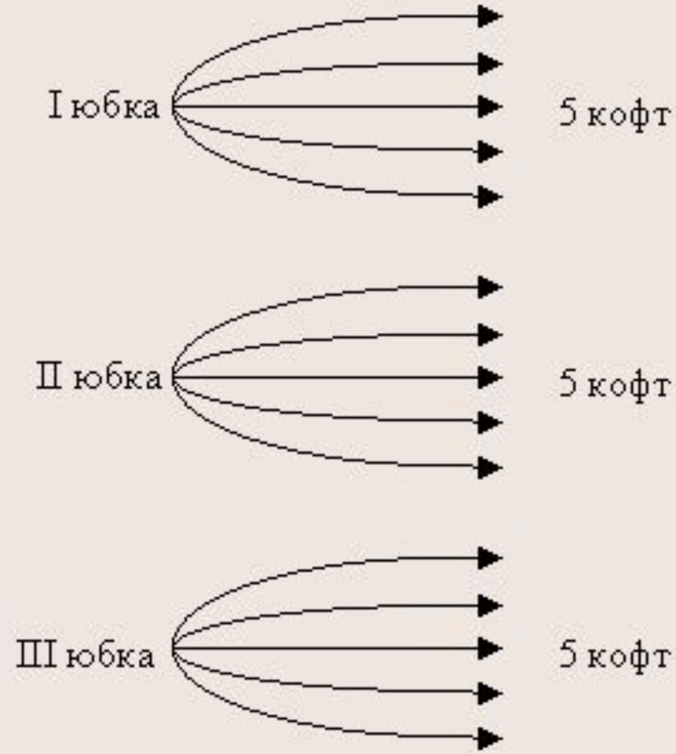
Задача. Из города А в город В ведут 5 дорог, а из города В в город С - три дороги. Сколько путей, проходящих через В, ведут из города А в город С?



Задача. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «полка»?



Задача. У Светланы 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций одежды имеется у Светланы?



Получается 15 различных комбинаций одежды.

Задача. Начальник пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовало в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

Задача. На дискотеку собрался почти весь класс – 22 человека. Лена танцевала с семью мальчиками, Нина – с восьмью, Вера – с девятью и т.д. до Ирины, которая танцевала со всеми мальчиками из этого класса. Сколько мальчиков было в этом классе?

Устные упражнения.

1. В киоске продают 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт и марку?
2. Изменяя порядок слов, составьте предложения: «Я мою руки».
3. Разложите на простые множители число 30. Сколькими способами можно записать в виде простых множителей число 30?

Факториал

Определение.

Произведение первых n натуральных чисел, т. е. **1• 2 • 3 •…• n называют «n-факториал» и обозначают n!** 1•2•3•…•n=n! («эн факториал»)

Например, 4! = 1•2•3•4=24

Главное свойство факториала следует из определения:

(n+1)!=(n+1)•n!

Подставим в эту формулу n=0.

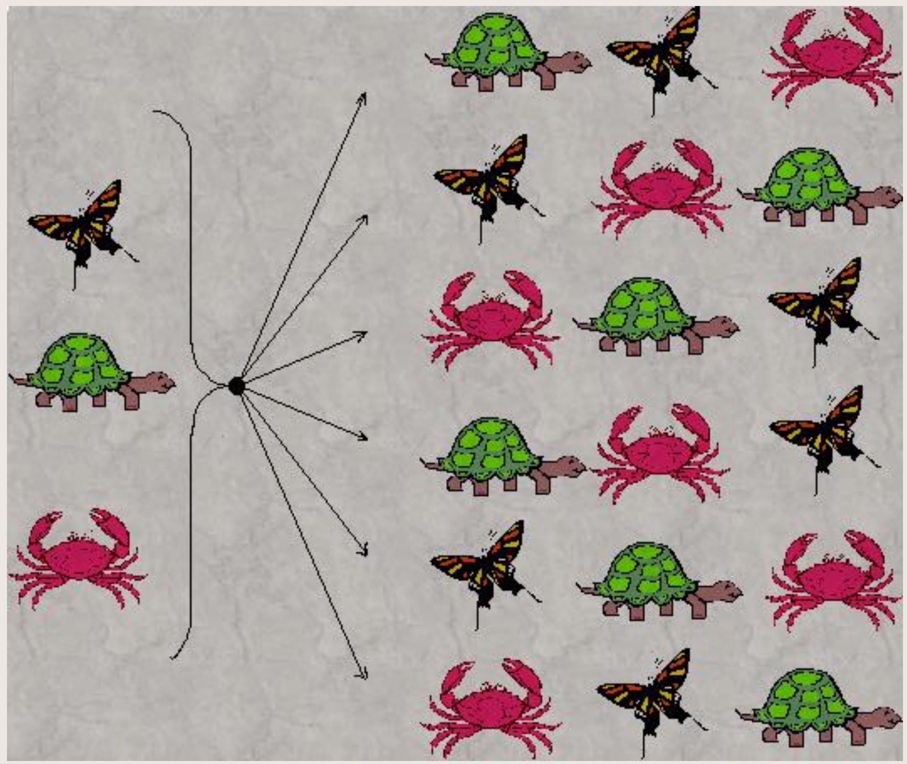
Получим: 1!=1•0!, откуда **0!=1**

4. Упростить:

а) $\dfrac{(n+1)!}{n!}$; б) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$; г) $\dfrac{n!}{n(n-1)}$.

Перестановки

Пусть элементами будут бабочка, черепаха и рак. Составим всевозможные соединения, которые отличаются порядком расположения элементов.



Перестановки

1. Изменяя порядок слов, составьте предложения: «Я мою руки».

2. Разложите на простые множители число 30. Сколькими способами можно записать в виде простых множителей число 30?

Задача. Антон, Борис и Виктор купили 3 билета на футбол на 1-е, 2-е, 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами мальчики могут занять эти места?

	1-е место	2-е место	3-е место
А(Антон)	А	Б	В
	А	В	Б
Б(Борис)	Б	А	В
	Б	В	А
В(Виктор)	В	А	Б
	В	Б	А

В этих задачах мы составили всевозможные соединения из трех элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение.

Комбинации из n-элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются *перестановками* из n элементов.

Перестановки из n элементов обозначают P_n и вычисляют по формуле

$P_n = n!$(пэ из эн).

Например, $P_3 = 6$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

7) Сколько различных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом из этих чисел все цифры различны?

Решение.

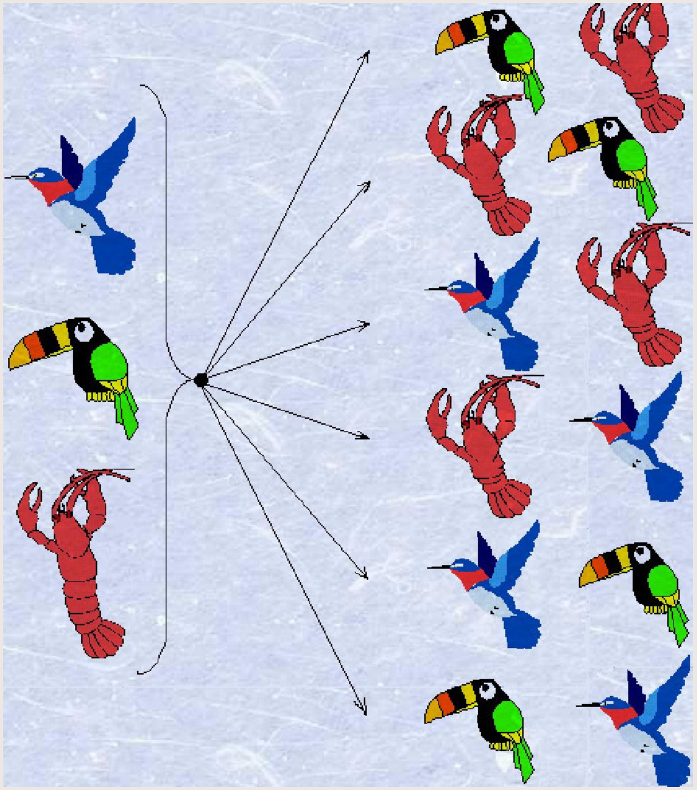
$P_5 = 5! = 120$.

Так как число не может начинаться нулем, то надо вычесть количество чисел, первая цифра которых 0, Таких чисел будет $P_4 = 4! = 24$.

$P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$. Ответ: 96 чисел.

Размещения

Колибри, тукан и рак – элементы, из которых будем составлять соединения по два элемента.



Пары отличаются либо составом элементов, либо их расположением в паре.

Размещения

Задача. Антон, Борис и Виктор приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько существует способов занять эти два места на стадионе?

Решение.

А(Антон) 1. А Б, 2.А В, 3.Б В .

Б (Борис)

В(Виктор)

(Если мальчики будут пересаживаться со своего места на место друга, то таких соединений будет 6).

Размещения

Полученные пары называются размещениями из трех элементов по два.

Определение.

Комбинации из n элементов по k, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения, называются размещениями из n элементов по k. Если будем иметь n элементов , а соединения будем брать по k элементов, то $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ $(k \le n)$

A_n^k (– а из эн по ка)

*Сколько надо взять элементов, чтобы число размещений из них по четыре было в 12 раз больше, чем число размещений из них по два?

Решение.

Пусть надо взять n элементов, тогда $A_n^4 = 12 \cdot A_n^2$,

…

$n^2 - 5n - 6 = 0$

(учащиеся 7-го класса представят 5n в виде суммы двух слагаемых);

$n^2 + n - 6n - 6 = 0,$

$n(n+1) - 6(n+1) = 0,$

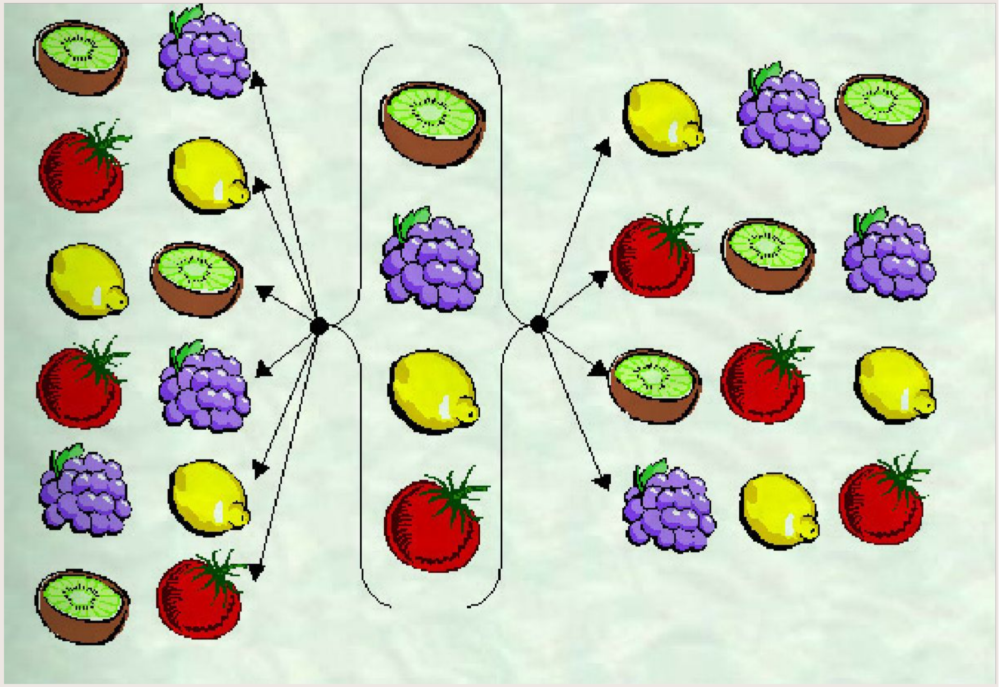
$(n+1)(n-6) = 0,$

$n = -1, n = 6.$

По смыслу задачи n=6.

Сочетания

На рисунке имеем 4 элемента: половина киви, кисть винограда, лимон, помидор. Слева создаются соединения по два элемента и записываются C_4^2 Справа создаются соединения по три элемента и записываются C_4^3



Пары и тройки отличаются составом элементов.

Сочетания

Определение.

Комбинации из n элементов по k, отличающиеся друг от друга лишь составом элементов, называются сочетаниями из n элементов по k. ($k \le n$).

Записывают и читают это так: C_n^k (сочетания из n элементов по k).

Количество сочетаний можно посчитать по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, (k \le n)$$

ЗАДАЧИ

1. Найти: $A_8^2 - P_4$

2. Задача.

У лесника 3 собаки Астра (А), Вега (В) и Гриф(Г). На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

Сделать рисунок. Посчитать по формуле.

ЗАДАЧИ

3.Задача.

Сколькими способами 4 различных монеты можно разместить по двум карманам?

4. Задача.

В классе 35 учеников. 20 из них занимаются в математическом кружке, 11-в биологическом, а 10 ничем не занимаются. Сколько ребят занимаются и математикой, и биологией?

ЗАДАЧИ

5. Найти :$A^5_7+P_5$.

6. Задача.

Из трёх стаканов сока ананасового (а), брусничного (б) и виноградного(в)-Иван решил выпить последовательно два. Перечислить все способы , которыми это можно сделать.

Сделать рисунок. Посчитать по формуле.

ЗАДАЧИ

7.Задача.

Сколько существует способов выбора трёх ребят из 4-х желающих

дежурить в столовой?

8. Задача.

Из 100 человек 85 знают английский. 80 - испанский, 75 - немецкий. Сколько человек заведомо знают все три языка?

Задание на дом

П. 1.4-1.6

№ 1.46(а-г), 1.54(а,б), 1.58(а-г), 1.60(а,б), 1.63(а-г), 1.67(а,б)