5 дәріс

Басқару жүйесінің тұрақтылығы

Егер жүйе сыртқы әсерден соң қайтадан тұрақтылыққа немесе тыныштыққа оралса ол *тұрақты жүйе* болып табылады.

Сыртқы әсерден соң тұрақтылыққа оралмаған жүйені *тұрақсыз жүйе* деп атайды.

5.1. Алгебралық критерийлер арқылы тұрақтылықты талдау

Жүйенің тұрақтылығы оның өзінің ырғалысына байланысты. Оны дәлелдеу үшін жүйе келесі дифференциал теңдеумен сипатталсын

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_m x.$$

Лаплас түрлендірілуінен соң

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) y(p) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \cdots + b_m) x(p).$$

Мұнда $x(p)$ кіріс әсері.

Тұрақты теңдеу кіріс әсері $x(p) \equiv 0$ болғанда тыныштыққа қайта оралады.

Сонымен тұрақты жүйе үшін біркелкі дифференциал теңдеудің шешімі

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n) y(p) = 0$$

t шексіздікке ұмтылғанда *нөлге* ұмтылуы тиіс.

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Егер сипаттаушы теңдеудің $p_1, p_2, \ldots, p_n$ шешімдері табылса біркелкі теңдеудің шешімі келесідей болады

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \, e^{\,p_k t}$$

Қандай жағдайда жүйе тұрақты?

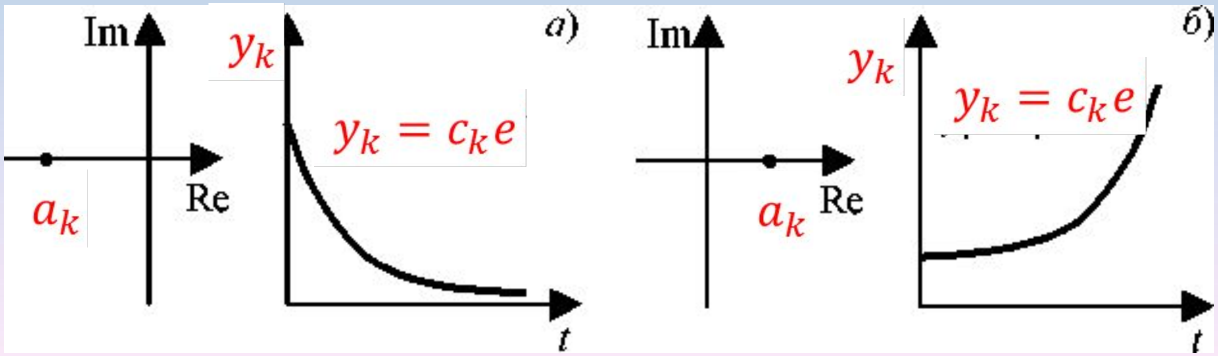
$p_k = a_k$ нақты шешім болсын дейік. Онда оған келесі қосынды сәйкес келеді

$$c_k e^{p_k t}.$$

Егер $a_k < 0$ болса t шексіздікке ұмтылғанда бұл қосынды нөлге ұмтылады.

Ал егер $a_k > 0$ болғанда t шексіздікке ұмтылғанда $y(t) \to \infty$.

Егер $a_k = 0$ болса t шексіздікке ұмтылғанда $y_k(t) = c_k$.



$p_k = a_k + j b_k$ және $\acute{p}_k = a_k - j b_k$ сиппаттаушы теңдеудің комплекс түбірлері болсын.

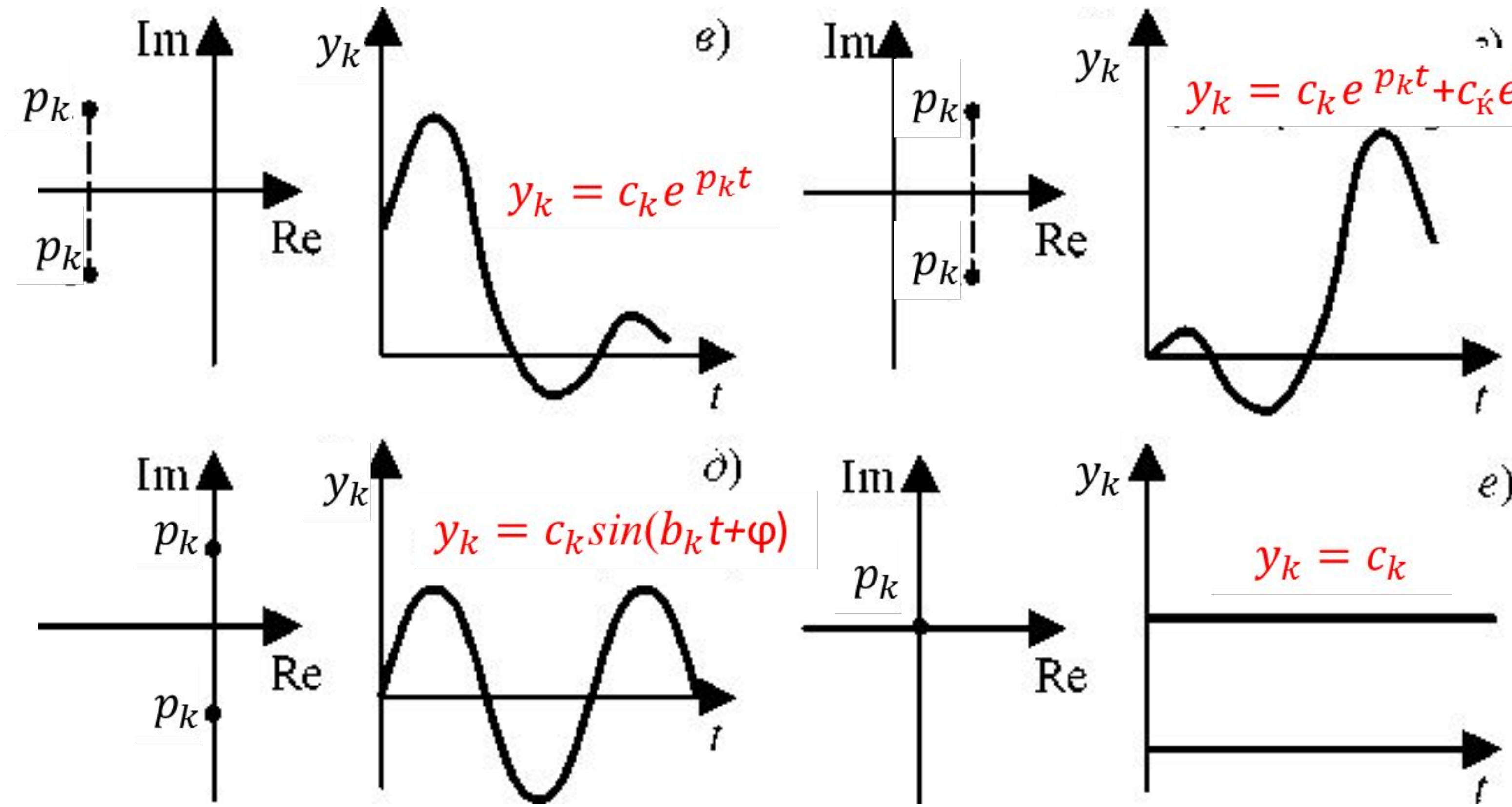
$$y_k = c_k e^{p_k t} + c_{\acute{k}} e^{\acute{p}_k t} = C e^{a_k t} sin(b_k t + \varphi)$$

Б ұл жағдайда $a_k < 0$ болғанда жүйеде өшетін тербеліс (затухающие колебания) болады.

Егер $a_k > 0$ болғанда тербеліс амплитудасы өсетін болады.

Ал $a_k = 0$ болғанда тербеліс амплитудасы тұрақты c_k болады.

Сонымен егер сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің нақты бөліктері теріс сан болған жағдайда ғана жүйе *тұрақты* болады.



Im
Re
p_k
p_k
y_k
в)
$y_k = c_k e^{p_k t}$
t
Im
Re
p_k
p_k
y_k
$y_k = c_k e^{p_k t} + c_{ḱ} e^{ṕ_k t}$
t
Im
Re
p_k
p_k
y_k
д)
$y_k = c_k sin(b_k t + φ)$
t
Im
Re
p_k
y_k
е)
$y_k = c_k$
t

5.2. Раус өлшемі

Тұрақтылықтың Раус өлшемі стационар сызықтық жүйенің тұрақтылығын айқындайтын әдістердің бірі болып табылады.

Ол тұрақтылықтың алгебралық өлшемі.

Раус өлшемі жоғарғы дәрежелі сипаттаушы полиномдарға пайдаланылады.

Жүйенің тұрақтылығын табу үшін арнайы таблица толтырылады.

Таблицада сипаттаушы полиномның коэффициенттері былай толтырылады:

бірінші жолда жұп индексті коэффициенттер өсу тәртібіне сәйкес толтырылады;

екінші жолда — тақ индексті коэффициенттер;

басқа элементтер формула бойынша толтырылады.

Таблицаның жолының саны сипаттаушы теңдеудің дәрежесінен бірге үлкен болады.

Жолдың нөмірі	Баған нөмірі			λ
	1	2	3	
1	a_0	a_2	a_4	
2	a_1	a_3	a_5	
3	$к_{13}=a_2-λ_1·a_2$	$к_{23}=a_4-λ_1·a_3$	$к_{33}=a_6-λ_1·a_7$	$λ_1 = a_0 / a_1$
4	$к_{14}=a_3-λ_2·к_{23}$	$к_{24}=a_5-λ_2·к_{33}$	$к_{34}=a_7-λ_2·к_{43}$	$λ_2 = a_1 / к_{13}$
...	...	...	...	...

Раус өлшеміне сәйкес жүйе *тұрақты* болуы үшін бірінші бағанадағы коэффициенттердің таңбалары бірдей болса жеткілікті.

Бұл шарт орындалмаса жүйе тұрақсыз.