



# **Классическое определение вероятности**

Теория вероятностей и математическая  
статистика

**Всё в природе подлежит  
измерению, всё может  
быть сосчитано**

**Н.И. Лобачевский**

# Николай Иванович Лобачевский



**1792 – 1856**

Русский математик

Один из  
создателей  
неевклидовой  
геометрии

Ректор Казанского  
университета

# **Детерминизм**

**осуществление определённых  
условий однозначно  
определяет результат**

# Блез Паскаль



**1623 – 1662**

Французский  
математик, механик,  
физик, литератор и  
философ

Один из создателей  
математического  
анализа, теории  
вероятностей и  
проективной  
геометрии

# Пьер Ферма



**1601 – 1665**

Французский  
математик

Один из создателей  
аналитической  
геометрии,  
математического  
анализа, теории  
вероятностей и  
теории чисел

# Христиан Гюйгенс ван Зейлихем



Нидерландский  
математик, механик,  
физик, астроном и  
изобретатель

Один из создателей  
теоретической  
механики и теории  
вероятностей

**1629 – 1695**

# Испытание

- Эксперимент, результат которого заранее (до проведения) предугадать нельзя

**Испытание = опыт =  
= стохастический  
эксперимент**



# Случайное событие

- Явление, которое может произойти или не произойти в результате проведения испытания
- **Пример**  
Бросание игральной кости

# Случайное событие

- Обозначаются большими латинскими буквами, снабжёнными иногда индексами или штрихами
- **Пример**  
Событие  $A =$  «При бросании игральной кости выпало число 3»

# Элементарные события

- Взаимно исключают друг друга, и в результате опыта обязательно происходит одно из этих элементарных событий
- Каково бы ни было случайное событие  $A$ , по наступившему элементарному событию можно сказать о том, произошло или не произошло событие  $A$

# Пример



- Испытание – бросание игральной кости
- Элементарные события – появление любого числа от 1 до 6
- Всего 6 элементарных событий

# Элементарные события

Обозначаются греческой буквой  
 $\omega$  (омега)

ВОЗМОЖНО, С ИНДЕКСАМИ

**Элементарное событие =  
= элементарный исход**

# Пример



- Испытание – бросание игральной кости

$\omega_1$  = «При бросании игральной кости выпало число 1»

$\omega_4$  = «При бросании игральной кости выпало число 4»

# Пространство элементарных событий

Совокупность всех  
элементарных событий  
данного опыта

$\Omega$  (омега)

# Пространство элементарных событий

Совокупность всех  
элементарных событий  
**данного опыта**

$\Omega$  (омега)



# Пример



- Испытание – бросание игральной кости
- Пространство элементарных событий состоит из шести событий
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

# Благоприятные события

- Элементарные события, наступление которых необходимо влечёт наступление события **A**

**Для каждого события A –  
свои благоприятные  
события!**

# Благоприятные события

- **A** – множество элементарных событий, благоприятных событию **A**

$$A \subseteq \Omega$$

**Отождествляем событие **A** и множество **A****

# Достоверное событие

- Наступает в результате любого элементарного события

$$\forall \omega \in \Omega$$

**Достоверное событие =  $\Omega$**

# Невозможное событие

- Не наступает ни при каком элементарном событии

**Невозможное событие =  $\emptyset$**

# Пример



- Испытание – бросание игральной кости
- $A = \text{«Выпало число, меньшее 7»}$
- $A = \Omega$
- $B = \text{«Выпало отрицательное число»}$
- $B = \emptyset$

# Сумма событий

- **$A + B$**  – событие, которое происходит  $\Leftrightarrow$  происходит хотя бы одно из событий  $A$  или  $B$

$$A + B = A \cup B$$

Сумма событий =  
= объединение событий

# Свойства

$$A + A = A$$

$$A + \emptyset = A$$

$$A + \Omega = \Omega$$



# Пример



- Испытание – бросание игральной кости
- $A = \text{«Выпало чётное число»}$
- $A_1 = \text{«Выпало число 2»}$
- $A_2 = \text{«Выпало число 4»}$
- $A_3 = \text{«Выпало число 6»}$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

# Произведение событий

- **$A \times B$**  – событие, которое происходит  $\Leftrightarrow$  происходят оба события  $A$  и  $B$

$$A \times B = A \cap B$$

Произведение событий =  
= пересечение событий

# Свойства

$$A \times A = A$$

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$A \times \Omega = A$$

# Пример

- Испытание – бросание игральной кости
- $V =$  «Выпало число 5»
- $V1 =$  «Выпало нечётное число»
- $V2 =$  «Выпало число, большее 3»

$$V = V1 \times V2$$

# Несовместные события

- Одновременное появление в опыте невозможно

$$A \times B = \emptyset$$

Иначе – совместные события

# Пример

- Испытание – бросание игральной кости
- $A =$  «Выпало чётное число»
- $B =$  «Выпало нечётное число»
- $A$  и  $B$  **несовместны**



# Противоположное событие

- Происходит  $\Leftrightarrow$  не происходит событие  $A$

$\neg A$

# Свойства

$$\neg A \times A = \emptyset$$

$$A + \neg A = \Omega$$

$$\neg(\neg A) = A$$



# Пример

- Испытание – бросание игральной кости
- $A =$  «Выпало чётное число»
- $B =$  «Выпало нечётное число»
- $A$  и  $B$  **противоположные**



# Разность событий

- $A \setminus B$  – событие, которое происходит  $\Leftrightarrow$  происходит событие  $A$  и не происходит событие  $B$

$$\neg A = \Omega \setminus A$$

$$A \setminus B = A \times \neg B$$

# Свойства операций

$$A+B = B+A$$

$$A \times B = B \times A$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$A(BC) = (AB)C$$

# Пример

Производится два выстрела по цели.  
Событие **A** = «При первом выстреле было попадание в цель»

Событие **B** = «При втором выстреле было попадание в цель»

Событие **C** = «В результате двух выстрелов цель поражена»

Выразить **C** через **A** и **B**



# Пример – решение I

Производится два выстрела по цели.  
Событие **A** = «При первом выстреле было попадание в цель»

Событие **B** = «При втором выстреле было попадание в цель»

Событие **C** = «В результате двух выстрелов цель поражена»

Выразить **C** через **A** и **B**

# Пример – решение I

1) первый выстрел – попадание, второй – промах

$$A \times (\neg B)$$

2) первый выстрел – промах, второй – попадание

$$\neg A \times B$$

3) оба выстрела – попадания

$$A \times B$$

# Пример – решение I

Интересующее событие наступает в результате наступления хотя бы одного из вариантов

$$C = A \times (\neg B) + (\neg A) \times B + A \times B$$

## Пример – решение 2

Событие  $\neg C$  = «Поражения цели не было»

$$\neg C = (\neg A) \times (\neg B)$$

$$C = \neg(\neg C) = \neg((\neg A) \times (\neg B))$$

ИЛИ

$$C = \Omega \setminus ((\neg A) \times (\neg B))$$



# Относительная частота

- события  $A$  в серии из  $n$  одинаковых экспериментов

$$v(A) = m(A) / n$$

где  $m(A)$  – число экспериментов, в которых событие  $A$  произошло

# Свойства

$$0 \leq \nu(A) \leq 1$$

$$\nu(\Omega) = 1$$

$$AB = \emptyset \Rightarrow \nu(A+B) = \nu(A) + \nu(B)$$

# Относительная частота

Меняется от серии к серии

Во многих случаях при увеличении числа опытов  $\nu(A)$  приближается к некоторому числу

**Это экспериментально установлено**

# Статистическое определение

Если при увеличении числа опытов  $\nu$  ( $A$ ) стремится к некоторому фиксированному числу  $p(A)$ , то

- событие  $A$  **стохастически устойчиво**,
- $p(A)$  – **вероятность события  $A$**

**численная характеристика**

# Относительная частота

- события  $A$  в серии из  $n$  одинаковых экспериментов

$$v(A) = m(A) / n,$$

где  $m(A)$  – число экспериментов, в которых событие  $A$  произошло

# Относительная частота

- события  $A$  в серии из  $n$  одинаковых экспериментов

$$\nu(A) = m(A) / n,$$

Благоприятны  
е  
Всег

где  $m(A)$  – число экспериментов, в которых событие  $A$  произошло

# Классическое определение

Пространство элементарных  
событий некоторого опыта  $\Omega$

$$|\Omega| = n$$

Все элементарные события  
**равновозможны**

# Классическое определение

Все элементарные события

**равновозможны**  $\Rightarrow$  **вероятность**

их появления одинакова

$$p(\omega_i) = p_i = p = 1/n$$

$$p(\Omega) = \sum p_i = 1$$



# Классическое определение

Пусть событию  $A$  благоприятствуют  $m$  элементарных событий

$$p(A) = \sum p_i^A = m \times 1/n = m/n$$

$$p(A) = m/n$$

Отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов

# Пример

В урне лежит 7 жёлтых и 11 оранжевых шаров. Чему равна вероятность вытащить **жёлтый** шар?

Событие  $A$  = «Вытащили жёлтый шар»

Всего исходов  $n = 7 + 11 = 18$

Благоприятных исходов  $m = 7$

$$p(A) = m/n = 7/18$$

# Пример

В ящике 10 перенумерованных шаров с номерами от 1 до 10.  
Вынули один шар.

Какова вероятность того, что номер вытянутого шара не превышает десяти?

# Пример

Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одного размера.

Полученные кубики перемешаны.

Определить вероятность того, что наудачу выбранный кубик будет иметь ровно две окрашенные грани?

# Пример

В погребе в конце февраля стоит **8** банок с компотом и **7** с соленьями.

Наугад достают **6** банок.

Какова вероятность того, что **одна** банка будет с компотом, а остальные с соленьями?





# КОМБИНАТОРИ КА