Многочлены с одной переменной

Нам уравненья,как поэмы,

И полином поддерживает дух.

Бином Ньютона, будто песня,

А формулы ласкают слух

Многочлены. Степень многочлена.

Многочлен с одной переменной x – это выражение вида

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

где n –любое натуральное число или ноль,

а коэффициенты a_0 a_1 a_n – произвольные числа.

Степень многочлена – наибольший из показателей степени одночленов, входящих в канонический вид.

Deg f (англ. Degree – степень)

Deg f = nнаиб

Пример:

deg(2x-1+3x²)=2

deg(x³+x+2)=3

Действия с многочленами

- Сложение
- Вычитание
- Умножение
- Деление

$$(2x^5+1-4x^3-x)+$$
$$+(3x^4+x^3-2x)=$$
$$=2x^5+3x^4-3x^3-3x+1.$$

Свойства действий с многочленами:

- $f+g=g+f,\quad fg=gf$
- $(f+g)+h=f+(g+h),\quad (fg)h=f(gh)$
- $(f+g)h=fg+gh$

Произведение многочленов

- Если произведение двух многочленов равно нулевому многочлену, то хотя бы один из многочленов нулевой

  $f \times g = 0$, т.е. $f = 0$ или $g = 0$.

- Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме степеней этих многочленов

  $\deg (f \times g) = \deg f + \deg g \ (f, g \neq 0)$

- Свободный член произведения двух многочленов равен произведению их свободных членов

$$(2x^5 + 1 - x^2 - x)(3x^4 + x^3 - 2) = 6x^9 + \ldots - 2.$$

Техника умножения многочленов

$$(2x^5-x^2-x+1)(3x^4+x^3-2)=$$
$$=6x^9+2x^8-3x^6-8x^5+2x^4+x^3+2x^2+2x-2$$

2	0	0	-1	-1	1				
3	1	0	0	-2					
6	0	0	-3	-3	3				
	2	0	0	-1	-1	1			
				-4	0	0	2	2	-2
6	2	0	-3	-8	2	1	2	2	-2

Деление многочленов

- Деление многочленов без остатка

$$\begin{array}{l|l} 4x^5 - 3x^3 + x - 1 & 2x^2 - 3 \\ \cline{2-2} 4x^5 - 6x^3 & 2x^3 + 1,5x \\ \hline \quad 3x^3 + x - 1 & \\ \quad 3x^3 - 4,5\,x & \\ \hline \qquad 5,5x - 1 \text{ (ост.)} & \end{array}$$

- Деление многочленов с остатком

$f = g \,.\, q + r$

где g – делитель

q – частное

r – остаток

$$4x^5 - 3x^3 + x - 1 = \\ = (2x^2 - 3)(2x^3 + 1,5x) + \\ + 5,5x - 1$$

Значения и корни

$f=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1} x+a_n$
c – некоторое число,
$f(c)=a_0c^n+a_1 c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n$.

Пример

$x^3 - 6x + 5 = 0$

5: ±1; ±5

Определение:

Число C называется корнем многочлена f, если $f(c)=0$.

Схема Горнера

	1	0	-6	5
-1	1	-1	-5	-1
1	1	1	-5	0

Замечания:

1. $f(0) = a_n$
2. $f(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Целые корни

Теорема 1. Если целое число k - корень многочлена с целыми коэффициентами, то k - делитель его свободного члена.

Теорема 2. Если целое число k - корень многочлена f с целыми коэффициентами , то k-1 - делитель числа f(1), k+1 - делитель числа f(-1).

Пример

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$

2: ±1, ±2

$f(1) = 0$

$f(-2) = 0$

Дробные корни

Теорема 1. Если f - многочлен с целыми коэффициентами и значения f(0) и f(1) нечётные числа, то f не имеет целых корней.

Теорема 2 . Пусть рациональное число p/q - корень многочлена с целыми коэффициентами, причем эта дробь несократима. Тогда числитель дроби p - делитель свободного члена, а знаменатель q - делитель старшего коэффициента многочлена.

$$6x^3 + 10x^2 + 8x - 4 = 0$$

	6	10	8	-4
1/3	6	12	12	0
2/3	6	14	52/3	68/9

Линейные множители многочлена

Теорема Безу:

Пусть f – многочлен, с – некоторое число.

1) **f делится на двучлен (x – c) тогда и только тогда, когда число с является его корнем**
2) **Остаток от деления f на (x – c) равен f(c)**

$f = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - 2^{0,5})(x - 1 + 2^{0,5})$

$D = 8$

$x_1 = 1 - 2^{0,5}$

$x_2 = 1 + 2^{0,5}$

$x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x - 1)(x - 1 - 2^{0,5})(x - 1 + 2^{0,5})$

Разложение многочлена на множители

- *Многочлен степени, большей или равной 1, называется неприводимым, если его нельзя разложить в произведении многочлена меньшей степени.*

- *Для многочлена с целыми коэффициентами существует один специальный прием разложения многочлена на множители - метод неопределенных коэффициентов.*

$$x^3 - 6x + 5 = (x-1)(x^2 + px + q)$$

Значит { -q=5 {q=-5

{ p-1=0 {p=1

$$x^3 - 6x + 5 = (x-1)(x^2 + x - 5)$$

Наибольший общий делитель

Наибольший общий делитель многочленов - это многочлен наибольшей степени, на который делится каждый из данных многочленов.

Пример: Найти НОД

$$f = x^{474} - 1 \qquad g = x^{342} - 1$$

$$x^{474} - 1 = (x^{342} - 1)x^{132} + x^{132} - 1, r_1 = x^{132} - 1$$
$$x^{24} - 1 = (x^6 - 1)(x^{18} + x^{12} + x^6 + 1)$$
$$x^{54} - 1 = (x^{24} - 1)(x^{30} + x^6) + x^6 - 1, r_5 = x^6 - 1$$

Следовательно НОД равен

$$x^6 - 1$$

Наименьшее общее кратное – это многочлен наименьшей степени, который делится на эти многочлены

Основная теорема о делимости.

Теорема. Всякий многочлен степени, большей или равной 1, единственным образом раскладывается в произведение неприводимых многочленов.

Следствия:

1. f делится на q тогда, когда кратность каждого неприводимого множителя в многочлен f больше или равна кратности этого множителя в многочлен q.
2. Произведение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного многочленов f и q равно произведению этих многочленов:

$$\text{НОД}(f,q) \times \text{НОК}(f,q) = f \times q$$

Многочлены f и q называют взаимно простыми, если их НОД = 1.

Бином Ньютона

- **Формулу для степени** $(a+b)^n$ **обычно называют формулой Бинома Ньютона.**
- $C_m^л$ **- это наименьший коэффициент, стоящий в разложении степени** $a^{n-k}b^k$ **при одночлене**

$$(a+b)^n = c_n^0 a^n + c_n^1 a^{n-1} b + \ldots + c_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + c_n^n b^n$$

$$c_n^0 = c_n^n = 1$$

$$c_n^1 = c_n^{n-1} = n$$

$$c_n^k = c_{n-1}^{k-1} + c_{n-1}^k$$

Пример

$$(a+1)^8 = x^8 + 8x^7 + 28x^6 + 56x^5 + 70x^4 + 56x^3 + 28x^2 + 8x + 1.$$

Авторы курсовой работы

- Мальцева Ольга
- Колесникова Яна
- Богданов Антон